



Laurent Fargues
Alain Genestier
Vincent Lafforgue

L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld



BIRKHÄUSER

Progress in Mathematics
Volume 262

Series Editors

H. Bass

J. Oesterlé

A. Weinstein

Laurent Fargues
Alain Genestier
Vincent Lafforgue

L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld

Birkhäuser
Basel · Boston · Berlin

Authors:

Laurent Fargues
Alain Genestier
Laboratoire de Mathématiques d'Orsay
Bâtiment 425
91405 Orsay
France
e-mail: laurent.fargues@math.u-psud.fr
alain.genestier@math.u-psud.fr

Vincent Lafforgue
Centre de Mathématiques de Jussieu
Université Paris 6 Pierre et Marie Curie
175, rue de Chevaleret
75013 Paris
France
e-mail: vlafforg@math.jussieu.fr

2000 Mathematics Subject Classification: 14L05, 14G22, 11R39, 14G35

Library of Congress Control Number: 2007933913

Bibliographic information published by Die Deutsche Bibliothek. Die Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data is available in the Internet at <http://dnb.ddb.de>

ISBN 978-3-7643-8455-5 Birkhäuser Verlag AG, Basel · Boston · Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. For any kind of use whatsoever, permission from the copyright owner must be obtained.

© 2008 Birkhäuser Verlag AG
Basel · Boston · Berlin
P.O. Box 133, CH-4010 Basel, Switzerland
Part of Springer Science+Business Media
Printed on acid-free paper produced from chlorine-free pulp. TCF ∞
Printed in Germany

ISBN 978-3-7643-8455-5

e-ISBN 978-3-7643-8456-2

9 8 7 6 5 4 3 2 1

www.birkhauser.ch

Table des matières

Préambule	xv
Bibliographie	xxi
I L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques <i>par Laurent Fargues</i>	
Introduction	3
I Décomposition cellulaire de la tour de Lubin-Tate	
I.1 Hypothèses et notations	10
I.1.1 Espaces	11
I.1.2 Action	12
I.1.3 Scindage de l’espace de Rapoport-Zink	12
I.1.4 Donnée de descente de Rapoport-Zink	12
I.1.5 Polygone de Newton des points de torsion	13
I.2 Application des périodes	15
I.2.1 Définition	15
I.2.2 Interprétation en termes du cristal \mathcal{O} -extension vectorielle universelle	17
I.2.3 La donnée de descente sur l’espace des périodes	18
I.2.4 Formules explicites pour l’application des périodes et applications	18
I.3 Domaine fondamental de Lafaille/Gross-Hopkins	21
I.3.1 Lien entre le domaine fondamental et les points C.M	26
I.4 Généralisation d’un théorème de Gross-Hopkins	26
I.5 L’espace des paramètres de la décomposition cellulaire	30
I.6 Les cellules rigides en niveau fini	31
I.6.1 Digression philosophique	31
I.6.2 Structures de niveau	31

I.6.3	Fonctorialité de Hecke des $\mathcal{M}_{\Lambda, K}$	32
I.6.4	Les cellules	34
I.6.5	Bord des cellules	35
I.6.6	Donnée de recollement	36
I.6.7	Réécriture en termes des arrêtes orientées de l'immeuble .	37
I.7	Décomposition cellulaire des espaces rigides en niveau fini	37
I.8	Modèles entiers des cellules	39
I.8.1	Niveau fini	39
I.8.2	Niveau infini	44
I.8.3	Donnée de descente	45
I.9	Le schéma formel recollé en niveau fini	45
I.10	Le schéma formel en niveau infini	46
I.11	Décomposition cellulaire écrasée en niveau fini	47
I.12	Une autre décomposition cellulaire	48
A Normalisé d'un schéma formel dans une extension de sa fibre générique		
A.1	Généralités sur les espaces rigides	49
A.2	Schémas formels normaux	51
A.3	Normalisé dans une extension de la fibre générique	52
B Modules de Dieudonné et cristaux des \mathcal{O}-modules π-divisibles		
B.1	Un lemme sur les F -cristaux \mathcal{O} -équivariants	54
B.2	Structure du cristal de Messing d'un \mathcal{O} -module π -divisible	56
B.3	\mathcal{O} -extension vectorielle universelle d'un \mathcal{O} -module π -divisible	56
B.4	Cristal de Messing généralisé et théorie de la déformation	59
B.5	Exponentielle π -adique	60
B.5.1	\mathcal{O} -puissances divisées ([17] section 10, [11] section 7)	60
B.5.2	Logarithme	61
B.5.3	Exponentielle	63
B.6	Extension du cristal de Messing généralisé aux \mathcal{O} -puissances divisées	66
B.7	Théorie de la déformation des \mathcal{O} -modules π -divisibles	69
B.8	Théorie de Dieudonné "classique" des \mathcal{O} -modules π -divisibles	69
	Bibliographie	71

II L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau des points

II.1	Suite de Hodge-Tate des groupes p -divisibles dans le cas infiniment ramifié	77
II.1.1	Décomposition de Hodge-Tate d'un \mathcal{O} -module π -divisible	80
II.2	Propriétés particulières de l'application de Hodge-Tate pour les groupes p -divisibles formels de dimension 1	81
II.2.1	Les périodes de Hodge-Tate vivent dans l'espace de Drinfeld	81
II.2.2	Raffinement, d'après Faltings	82
II.2.3	Formule exacte	84
II.3	Notations concernant les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld	85
II.3.1	Modules de Dieudonné	86
II.3.2	Notations concernant les espaces de Lubin-Tate	86
II.3.3	Notations concernant les espaces de Drinfeld	87
II.3.4	Quelques rappels sur Drinfeld classique	88
II.4	Description de $\mathcal{M}^{\mathcal{L}T}(K)/\sim$ en termes de modules filtrés	90
II.5	Description de $\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}(K)/\sim$ en termes de module filtré	91
II.6	Prolongement des isogénies	92
II.6.1	Prolongement	92
II.6.2	Définition de l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ sur $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$	92
II.7	Diverses descriptions des points de la tour de Lubin-Tate en niveau infini	93
II.7.1	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$ en termes de modules filtrés rigidifiés	93
II.7.2	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$ uniquement en termes du module de Tate	94
II.7.3	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$ en termes d'algèbre linéaire	95
II.8	Diverses descriptions des points de la tour de Drinfeld en niveau infini	96
II.8.1	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$ en termes de modules filtrés rigidifiés	96
II.8.2	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$ uniquement en termes du module de Tate	97
II.8.3	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$ en termes d'algèbre linéaire	98
II.9	La bijection au niveau des points	98
II.9.1	L'application $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$	100
II.9.2	L'application $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$	101
II.9.3	Les deux applications sont inverses l'une de l'autre	103
II.9.4	Retraçage des actions	103

II.9.5	Bijection entre les points des espaces de Berkovich associés	103
II.10	Traduction en termes de matrices de périodes	104
II.11	L'isomorphisme conserve le degré	107
II.12	Un point de vue différent sur la bijection	109
II.12.1	Identification de $K^n \twoheadrightarrow K^n/\text{Fil}_H$ avec l'application de Hodge-Tate de G^D	110
II.12.2	Identification de $K^n \twoheadrightarrow K^n/\text{Fil}_G$ avec l'application de Hodge-Tate de H^D	111
II.12.3	L'application $\mathcal{M}_\infty^{Dr}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K)$	112
II.12.4	L'application $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_\infty^{Dr}(K)$	115
II.12.5	Les deux applications sont inverses l'une de l'autre	116
C	Périodes entières des groupes p-divisibles	
C.1	Groupes p -divisibles sur les anneaux d'entiers de corps non-archimédiens	118
C.2	Théorèmes de comparaison	119
C.2.1	Le déterminant des périodes divisé par $2i\pi$ est une unité p -adique	121
	Bibliographie	130
III	L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld : démonstration du résultat principal	
III.1	La bestiole du côté Drinfeld	139
III.2	Construction du morphisme $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty \longrightarrow \widehat{\Omega}$	142
III.2.1	Définition de l'application de Hodge-Tate sur une cellule de $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty$	142
III.2.2	Rappels de quelques résultats de [9] sur l'application de Hodge-Tate dans le cas d'un point	144
III.2.3	Quelques rappels sur le schéma formel de Deligne-Drinfeld	145
III.2.4	Sur le conoyau de l'application de Hodge-Tate	150
III.2.5	Éclatement de la cellule et construction du morphisme de la cellule éclatée vers $\widehat{\Omega}$	151
III.2.6	Recollement des morphismes sur les cellules	153
III.3	Construction du morphisme $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty \longrightarrow \mathcal{Y}_\infty$	157
III.3.1	Étude des normalisés de $\widehat{\Omega}$ dans la tour de Drinfeld	157
III.3.2	Définition modulaire de \mathcal{Y}_∞	160
III.3.3	Sur la suite de Hodge-Tate en niveau infini	161
III.3.4	Construction d'éléments dans le module de Tate du \mathcal{O}_D -module formel spécial tiré en arrière sur $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty$	163
III.3.5	Construction du morphisme	166

III.3.6	Un remède au canular	168
III.3.7	Construction du morphisme	170
III.4	Construction du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^{n-1}$	171
III.4.1	Applications de Hodge-Tate	172
III.4.2	Éclatements et conoyau de l'application de Hodge-Tate	173
III.4.3	Construction du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \rightarrow \hat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$	175
III.5	Relèvement du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^{n-1}$ vers une cellule de l'espace de Lubin-Tate	177
III.5.1	Éclatement équivariant de l'espace projectif formel	177
III.5.2	Tiré en arrière de l'éclatement de l'espace projectif vers $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$	178
III.5.3	Relèvement vers la cellule	179
III.6	Construction du morphisme $\tilde{\tilde{\mathcal{Y}}}_\infty \rightarrow \mathfrak{X}_\infty$	179
III.6.1	Caractérisation modulaire de \mathfrak{X}_∞	179
III.6.2	Sur la suite de Hodge-Tate en niveau infini	181
III.6.3	Construction d'éléments dans le module de Tate du groupe de Lubin-Tate universel tiré en arrière sur $\tilde{\tilde{\mathcal{Y}}}_\infty$	181
III.6.4	Construction du morphisme de $\tilde{\tilde{\mathcal{Y}}}_\infty$ vers \mathfrak{X}_∞	184
III.7	Construction de l'isomorphisme	185
III.7.1	De nouveaux éclatements	186
III.7.2	Retour aux suites de Hodge-Tate en niveau infini	188
III.7.3	Démonstration du théorème principal	190
D	Compléments sur les schémas formels π-adiques	
D.1	Quelques lemmes d'algèbre π -adique	193
D.2	Rappels sur les schémas formels π -adiques	194
D.3	Morphismes affines	194
D.4	Limite projective dans la catégorie des schémas formels π -adiques	195
D.5	Normalisation dans la fibre générique	195
D.6	Commutation de la normalisation dans la fibre générique et du passage à la limite projective	197
D.7	Éclatements formels admissibles	198
D.7.1	Définition et premières propriétés	198
D.7.2	Adhérence "schématique" de la fibre générique	199
D.7.3	Transformée stricte	200
D.7.4	Commutation à la limite projective	201
	Bibliographie	201

IV Comparaison de la cohomologie des deux tours

IV.1	Schémas formels π -adiques	211
IV.1.1	Rappels sur les schémas formels π -adiques	212
IV.1.2	Morphismes topologiquement de type fini	212
IV.1.3	Morphismes topologiquement de présentation finie	213
IV.1.4	Morphismes affines	213
IV.1.5	Morphismes finis	214
IV.1.6	Morphismes topologiquement plats	214
IV.1.7	Limite projective dans la catégorie des schémas formels π -adiques	215
IV.1.8	Adhérence “schématique” de la fibre générique	215
IV.1.9	Éclatements formels admissibles	217
IV.2	La topologie des ouverts admissibles	220
IV.2.1	La catégorie des ouverts admissibles	220
IV.2.2	La topologie et le topos admissible	221
IV.2.3	Le topos admissible	222
IV.2.4	Topos limite projective contre topos total	223
IV.2.5	Fonctorialité de la topologie et du topos admissible	225
IV.2.6	Commutation des topos admissibles à la limite projective	226
IV.3	Le point de vue spectral sur la topologie admissible	231
IV.3.1	Rappels sur les espaces spectraux	231
IV.3.2	Prétopologie quasicompacte sur les espaces spectraux et passage à la limite projective	231
IV.3.3	Application au topos admissible	233
IV.3.4	Description de l’espace $ \mathfrak{X}^{\text{rig}} $ comme espace de Zariski- Riemann : le point de vue de Huber et Fujiwara	233
IV.3.5	Ouverts surconvergens et espace analytique de Berkovich	238
IV.4	Étude des morphismes finis localement libres	239
IV.4.1	Morphismes finis localement libres	239
IV.4.2	Morphismes finis localement libres rig-étales	241
IV.4.3	Rigidité	243
IV.4.4	Décomplétion des schémas formels finis localement libres rig-étales	246
IV.5	Étude d’une certaine catégorie de morphismes rig-étales	249
IV.5.1	Définitions	249
IV.5.2	Les morphismes de type (\mathcal{E}) engendrent la topologie étale des espaces rigides usuels	250
IV.5.3	Rigidité	251
IV.5.4	Décompletion	251

IV.6	Le topos rig-étale d'un schéma formel π -adique quasicompact . . .	252
IV.6.1	Sur un point concernant les topologies de Grothendieck	252
IV.6.2	Définitions	253
IV.6.3	Lien entre les sites $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ et $\mathfrak{X}_{\text{rig-ét}}$ pour \mathfrak{X} admissible	254
IV.6.4	Le théorème principal sur la décomplétion des topos rig-étales	255
IV.7	Le topos rig-étale d'un schéma formel π -adique non-quasicompact	257
IV.7.1	Le topos	257
IV.7.2	Cycles évanescents	259
IV.7.3	Cohomologie à support compact	259
IV.8	Le formalisme des faisceaux équivariants lisses	259
IV.8.1	Hypothèses	259
IV.8.2	G -faisceaux lisses	260
IV.8.3	Les différentes opérations reliant G -faisceaux, G -faisceaux lisses et faisceaux	261
IV.8.4	Les G -faisceaux lisses forment un topos	266
IV.8.5	Le théorème d'acyclicité	266
IV.8.6	Faisceaux lisses sur une tour formée par un pro-torseur	270
IV.9	Cohomologie à support compact équivariante-lisse des espaces analytiques de Berkovich	274
IV.9.1	Rappels sur les faisceaux mous sur le site étale	274
IV.9.2	Les quatre suites spectrales de cohomologie de Cech per- mettant de calculer la cohomologie à support compact . .	276
IV.9.3	Ouverts distingués	278
IV.9.4	Les sites quasi-étales, quasi-étales compacts et étales . . .	281
IV.9.5	Faisceaux équivariants lisses	282
IV.9.6	Résolutions molles de Godement-Berkovich	285
IV.9.7	Le complexe de cohomologie à support compact équivariant lisse	287
IV.9.8	Le complexe de cohomologie équivariant lisse à support dans un domaine analytique compact	287
IV.9.9	Les opérations d'induction/restriction pour les faisceaux équivariants lisses	289
IV.9.10	Les quatre résolutions/suites spectrales permettant de calculer la cohomologie à support compact équivariante lisse	293

IV.10 Cohomologie à support compact équivariante-lisse des espaces rigides généralisés	295
IV.11 Cohomologie à support compact équivariante- lisse des tours d'espaces analytiques	301
IV.11.1 Hypothèses et notations	301
IV.11.2 Faisceaux de Hecke sur la tour	302
IV.11.3 Le complexe de cohomologie à support compact de la tour	305
IV.11.4 Objets cartésiens sur la tour et domaine fondamental pour l'action des correspondances de Hecke	306
IV.11.5 Faisceaux cartésiens sur la tour et espaces de périodes . .	312
IV.11.6 Résolution de Čech de la cohomologie de la tour par la cohomologie des cellules	315
IV.11.7 Rajout d'une donnée de descente	315
IV.12 Faisceaux de Hecke cartésiens et faisceaux rigides équivariants en niveau infini	316
IV.12.1 Faisceaux lisses sur une tour	316
IV.12.2 Principaux résultats	317
IV.13 Application aux tours de Lubin-Tate et de Drinfeld	319
IV.13.1 La correspondance de Jacquet-Langlands locale géométrique	319
IV.13.2 Comparaison des complexes de cohomologie des deux tours	320
Bibliographie	321
Index	323

II L'isomorphisme des deux tours

Une autre approche en égales caractéristiques

par **Alain Genestier et Vincent Lafforgue**

Introduction	329
I Rappels sur les deux tours et énoncé du théorème	
I.1 Notations	331
I.2 \mathcal{O} et \mathcal{O}_D -modules formels	332
I.3 Tour de Lubin-Tate	333
I.4 Tour de Drinfeld	335
I.5 Énoncé du théorème	337

II Théorèmes de représentabilité explicites	
II.1 Modules de coordonnées	341
II.2 Côté Lubin-Tate	343
II.2.1 Structures de niveau	345
II.2.2 Action du groupe $GL_d(K) \times D^\times$ et de la donnée de descente	346
II.3 Côté Drinfeld	348
II.3.1 Structures de niveau	359
II.3.2 Action du groupe $GL_d(K) \times D^\times$ et de la donnée de descente	361
II.3.3 Le recouvrement mentionné en I.5, associé aux simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits de $PGL_d(K)$	363
III Tour de Lubin-Tate et domaines fondamentaux	
III.1 Décomposition cellulaire de la tour	365
III.2 Le domaine fondamental	369
IV Réduction aux domaines fondamentaux	
IV.1 Enoncé du théorème	371
IV.2 Unicité de $\varphi_{P-\bullet_{\mathcal{O}^a}}$ et de ses localisés, équivariance et recollement	373
V Démonstration du théorème IV.1.1	
V.1 L'anneau intermédiaire	379
V.1.1 Etude de $A_{\mathcal{I}nt}$	380
V.1.2 Intermède : le déterminant de Moore	381
V.1.3 Fin de l'étude de $A_{\mathcal{I}nt}$	382
V.2 Produit	383
V.2.1 Le produit côté Lubin-Tate	383
V.2.2 Le produit côté Drinfeld	385
V.3 Décomposition	387
V.3.1 Lemmes techniques	390
V.3.2 Décomposition côté Lubin-Tate	394
V.3.3 Décomposition côté Drinfeld	399
V.4 Déterminants et structure de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$	403
V.5 Démonstration de IV.1.1.2	405
Bibliographie	405

Préambule

Dans l'article [6] Gerd Faltings a expliqué comment construire un isomorphisme "en niveau infini" entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld. Le but de ce livre est de donner une démonstration détaillée du résultat de Faltings ainsi que des compléments et applications. Il s'agit donc en partie d'un travail de mise au point.

Le résultat est établi en inégales caractéristiques, c'est-à-dire pour les corps p -adiques, ainsi qu'en égales caractéristiques qui est le cas des corps de fonctions d'une variable formelle sur un corps fini. La méthode utilisée par Faltings devrait fournir un isomorphisme en inégales comme en égales caractéristiques. Dans l'article de Laurent Fargues la construction est détaillée en inégales caractéristiques. L'article d'Alain Genestier et Vincent Lafforgue expose une autre construction de l'isomorphisme des deux tours valable seulement en égales caractéristiques.

Dans ce livre nous étudions donc le lien entre deux espaces de modules de groupes p -divisibles ou groupes formels, les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld. En inégales caractéristiques ce sont des analogues locaux p -adiques des variétés de Shimura, qui sont elles-mêmes des tours de variétés algébriques définies sur un corps de nombres comme par exemple les courbes modulaires. Ce sont des cas particuliers d'espaces de modules de groupes p -divisibles tels que définis en toute généralité par Rapoport et Zink dans [9]. En égales caractéristiques ce sont des analogues locaux d'espaces de modules de Shtukas munis de structures additionnelles.

Ils ont été étudiés en détail notamment car leur cohomologie réalise des correspondances de Langlands locales ([3], [2], [8]) et permet ainsi de réaliser géométriquement des généralisations non-abéliennes de la théorie du corps de classe.

En fait l'existence d'un isomorphisme entre ces deux tours avait été conjecturée bien avant l'article de Faltings, sans que personne ne puisse réellement lui donner un sens précis. Une des motivations était que la cohomologie de ces deux tours devait être plus ou moins la même puisque toutes deux devaient réaliser des correspondances de Langlands locales du même type.

D'après les travaux de Michael Harris et Richard Taylor ([8]) et Pascal Boyer ([1]) on connaît complètement la cohomologie des espaces de Lubin-Tate (à Frobe-

nius semi-simplification près) en termes de correspondances de Langlands locales. D'après les résultats de ce livre on connaît également la cohomologie des espaces de Drinfeld et même grâce aux travaux de Jean-François Dat ([4]) leur complexe de cohomologie équivariant.

Rappelons ce que sont les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld. Soit F un corps local et \mathcal{O} son anneau des entiers. En inégales caractéristiques, F est une extension de degré fini de \mathbb{Q}_p . En égales, F est de la forme $\mathbb{F}_q((\pi))$ et $\mathcal{O} = \mathbb{F}_q[[\pi]]$. Rappelons qu'un \mathcal{O} -module formel sur une \mathcal{O} -algèbre est un groupe formel (commutatif formellement lisse) muni d'une action de \mathcal{O} , tel que l'action induite sur son algèbre de Lie soit l'action canonique ([5]). On dit qu'un tel groupe formel est de hauteur finie si l'endomorphisme induit par l'uniformisante π de F est une isogénie. Les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld sont alors des espaces de déformations de \mathcal{O} -modules formels de hauteur finie fixée avec des structures additionnelles. Nous supposons désormais dans la suite de cette introduction que $F = \mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$, où les objets qui apparaissent sont sans doute plus familiers au lecteur.

Espaces de Lubin-Tate

Les espaces de Lubin-Tate sont associés à la donnée d'un entier $n \geq 1$. Ils forment une tour d'espaces rigides analytiques p -adiques. La base de cette tour est une boule ouverte de dimension $n - 1$, \mathbb{B}^{n-1} , sur $\widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}} = W(\overline{\mathbb{F}_p})[\frac{1}{p}]$ le complété de l'extension maximale non-ramifiée de \mathbb{Q}_p

$$\mathbb{B}^{n-1}(\mathbb{C}_p) = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}_p^{n-1} \mid \forall i |x_i| < 1\}$$

Cette base est la "fibre générique" (i.e., après inversion de p) du schéma formel paramétrant les déformations d'un groupe formel de dimension 1 et hauteur n sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, \mathbb{H} (un tel groupe formel est unique à isomorphisme près). Lorsque $n = 2$ un tel groupe formel \mathbb{H} est celui associé à une courbe elliptique supersingulière sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, obtenu à partir de la loi de groupe de la courbe elliptique par complétion formelle en son origine. Ce schéma formel \mathfrak{X} est non-canoniquement isomorphe à

$$\mathrm{Spf}(\widehat{\mathbb{Z}_p^{nr}}[[x_1, \dots, x_{n-1}]])$$

En d'autres termes il n'y a pas d'obstruction aux déformations de tels groupes formels et l'espace tangent du foncteur des déformations est de dimension $n - 1$. On a donc bien $\mathfrak{X}_\eta \simeq \mathbb{B}^{n-1}$.

Pour $n = 2$, si pour $(N, p) = 1$, $X(N)$ désigne la courbe modulaire sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ et $x \in X(N)(\overline{\mathbb{F}_p})$ un point associé à une courbe elliptique supersingulière, d'après le théorème de Serre-Tate

$$\mathfrak{X} \simeq X(N)_{/\{x\}}^\wedge$$

le complété formel le long du point x . Ainsi l'espace de Lubin-Tate comme espace rigide, \mathfrak{X}_η , est l'ensemble des points de la fibre générique se spécialisant sur x et

s'interprète donc comme la “fibre de Milnor” en x de la fibration donnée par les modèles entiers des courbes modulaires (ce que l'on appelle le tube au-dessus de $\{x\}$ en géométrie rigide).

Si D désigne une algèbre à division d'invariant $\frac{1}{n}$ sur \mathbb{Q}_p et \mathcal{O}_D son ordre maximal

$$\mathcal{O}_D^\times \simeq \text{Aut}(\mathbb{H})$$

qui agit sur \mathfrak{X} (le groupe des automorphismes d'un objet agit toujours sur l'espace des déformations de celui-ci) et donc également sur l'espace rigide \mathfrak{X}_η .

Si H désigne la déformation universelle sur \mathfrak{X} et $H[p^k]$ ses points de p^k -torsion alors en fibre générique $H[p^k]_\eta$ est un groupe étale fini sur \mathfrak{X}_η , un système local rigide-étale en $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ -modules localement libres de rang n . Les trivialisations partielles de ces systèmes locaux permettent de définir une tour d'espaces rigides analytiques $\text{GL}_n(\mathbb{Q}) \times D^\times$ -équivariante

$$(\mathcal{LT}_K)_{K \subset \text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)}$$

de revêtements étales finis de $\mathcal{LT}_{\text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} := \coprod_{\mathbb{Z}} \mathfrak{X}_\eta \simeq \coprod_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}^{n-1}$, indexée par les sous-groupes ouverts de $\text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, le cas des sous-groupes de congruence principaux $K = Id + p^k M_n(\mathbb{Z}_p)$ correspondant aux trivialisations de $H[p^k]_\eta$. L'action “verticale” de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ se fait par correspondances de Hecke et permute les différents sous-groupes $K \subset \text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ suffisamment petits; il s'agit d'une action à la limite lorsque $K \rightarrow \{Id\}$. L'action de D^\times est elle “horizontale” sur chaque élément de la tour. Le diagramme qui suit schématise ce que l'on vient de dire où \mathcal{LT}_∞ désigne “la tour en niveau infini” (même si cela n'a aucun sens pour l'instant)

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{LT}_\infty & \\
 & \downarrow & \\
 K & \mathcal{LT}_K & \\
 \uparrow & \downarrow & \uparrow \\
 D^\times & \mathcal{LT}_{\text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} & \text{GL}_n(\mathbb{Z}_p) \\
 \uparrow & \downarrow & \\
 D^\times & \mathcal{LT}_{\text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} & \\
 & \downarrow & \\
 & \mathfrak{X}_\eta & \simeq \coprod_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}^{n-1}
 \end{array}$$

Si $T_p(H)$ désigne le module de Tate de la déformation universelle, il y a une représentation de monodromie

$$\pi_1(\mathfrak{X}_\eta) \longrightarrow \text{GL}(T_p(H))$$

et \mathcal{LT}_K est obtenu en forçant cette monodromie à vivre dans K .

Lorsque $n = 2$, comme précédemment, cette tour s'interprète comme fibre de Milnor en un point supersingulier de la tour modulaire $X(p^k N)$, lorsque $k \rightarrow +\infty$ et $(N, p) = 1$ (ou plutôt les composantes de cette tour dans l'union disjointe $\coprod_{\mathbb{Z}}$).

La tour possède un “bon” modèle entier dont la base est le schéma formel \mathfrak{X} et qui est obtenu grâce à la notion de structures de niveau de Drinfeld ([5]). Néanmoins nous n'utilisons pas ces modèles entiers dans ce livre.

Espaces de Drinfeld

Les espaces de Drinfeld forment une tour de revêtements d'espaces rigides p -adiques dont la base est l'espace Ω de Drinfeld

$$\Omega(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}_p) \setminus \bigcup_{H \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{Q}_p)} H(\mathbb{C}_p)$$

muni de son action de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$. Par exemple si $n = 2$, $\Omega(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$, le demi-plan p -adique. Cet espace Ω possède un modèle entier équivariant semi-stable $\widehat{\Omega}$ dont les composantes irréductibles et leurs intersections sont paramétrées par l'immeuble de Bruhat-Tits de $PGL_n(\mathbb{Q}_p)$. Ce schéma formel paramètre des déformations par “quasi-isogénies” de certains groupes formels de dimension n et hauteur n^2 , munis d'une action de \mathcal{O}_D . Si \mathbb{G} est un tel groupe formel sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, unique à isogénie près,

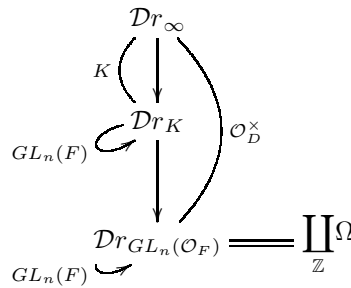
$$\text{End}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \simeq M_n(\mathbb{Q}_p)$$

isomorphisme qui fournit une définition modulaire de l'action de $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ sur $\widehat{\Omega}$.

De plus si G désigne la déformation universelle sur $\widehat{\Omega}$ alors

$$\text{rg}_{\mathcal{O}_D} T_p(G) = 1$$

d'où une représentation de monodromie $\pi_1(\Omega) \longrightarrow (\mathcal{O}_D^{opp})^\times \simeq \mathcal{O}_D^\times$, ce qui permet de définir une tour $(\mathcal{D}r_K)_{K \subset \mathcal{O}_D^\times}$ comme précédemment



Lorsque $n = 2$, cette tour uniformise des courbes de Shimura associées à des algèbres de quaternions sur \mathbb{Q} .

En égales caractéristiques, la situation est similaire en remplaçant \mathbb{Q}_p par $\mathbb{F}_q((\pi))$.

Les principaux théorèmes

Le schéma formel $\widehat{\Omega}$ est p -adique au sens où p engendre un idéal de définition de $\widehat{\Omega}$. Localement, c'est un schéma formel de la forme $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p\langle X_1, \dots, X_d \rangle / \text{Idéal})$, où $\mathbb{Z}_p\langle X_1, \dots, X_d \rangle$ désigne les séries formelles restreintes, le complété p -adique de $\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_d]$. On obtient alors un modèle entier de la tour de Drinfeld en prenant les normalisés $\widehat{\mathcal{D}r}_K$ de $\widehat{\Omega}$ dans $\mathcal{D}r_K$. On peut alors former

$$\widehat{\mathcal{D}r}_\infty = \varprojlim_K \widehat{\mathcal{D}r}_K$$

dans la catégorie des schémas formels p -adiques, i.e.,

$$\varprojlim_i \mathrm{Spf}(A_i) = \mathrm{Spf}((\varprojlim_i A_i)^\wedge)$$

(complété p -adique).

Par contre les modèles entiers usuels de la tour de Lubin-Tate ne sont pas p -adiques, puisque déjà pour la base de la tour $\mathfrak{X} \simeq \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_{n-1}]])$ l'idéal de définition est (p, x_1, \dots, x_{n-1}) .

Voici le premier théorème.

Théorème 1 (Faltings). *Il existe une “ p -adification” $\widetilde{\mathcal{L}T}_\infty$ (en un sens qui sera rendu clair dans le corps de l'ouvrage) de la tour de Lubin-Tate “en niveau infini” munie d'un isomorphisme*

$$\widetilde{\mathcal{L}T}_\infty \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{D}r}_\infty$$

où $\widetilde{\mathcal{D}r}_\infty$ est un certain éclatement formel admissible de $\widehat{\mathcal{D}r}_\infty$. Cet isomorphisme est équivariant lorsque l'on munit $\widehat{\mathcal{D}r}_\infty$ de l'action de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ obtenue en tordant l'action naturelle par l'involution de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times: (g, d) \mapsto ({}^t g^{-1}, d)$.

En fait, comme le suggère sans doute la notation, la p -adification $\widetilde{\mathcal{L}T}_\infty$ est elle-même obtenue comme éclatement formel admissible d'un schéma formel p -adique $\widehat{\mathcal{L}T}_\infty$.

Ce résultat est démontré en inégales caractéristiques dans l'article de Fargues et en égales (en remplaçant p par π bien entendu dans l'énoncé) dans l'article de Genestier et Lafforgue par une méthode différente de celle de Faltings.

Bien sûr une partie du théorème consiste à définir ce qu'est ce schéma formel p -adique $\widehat{\mathcal{L}T}_\infty$ et quel est son lien avec la tour de Lubin-Tate usuelle. C'est l'objet du premier chapitre de l'article de Fargues dans ce livre. Sur ce point l'article de Genestier et Lafforgue utilise une variante “en niveau Iwahori” de la construction explicite de $\widehat{\mathcal{L}T}_\infty$ et se dispense des éclatements.

Quant aux éclatements formels admissibles, cela demande quelques précautions pour définir ce que cela signifie pour de tels schémas formels (de tels éclatements proviennent en fait localement par transformé strict d'un niveau fini des tours).

Rappelons que d'après Raynaud les espaces rigides quasicompacts peuvent s'interpréter comme des schémas formels admissibles, et donc p -adiques, à éclatements formels admissibles près. Les espaces rigides

$$\varprojlim_K \mathcal{L}\mathcal{T}_K \quad \text{et} \quad \varprojlim_K \mathcal{D}r_K$$

n'existent pas dans la théorie classique des espaces rigides. Néanmoins le théorème précédent dit qu'on peut leur donner un sens, quitte à choisir de bons modèles entiers. En fait, Fargues développe dans le chapitre IV de son article une théorie des espaces rigides pour laquelle ces limites projectives ont un sens sans référer à un système projectif de modèles entiers particulier. Néanmoins cette théorie n'est pas nécessaire pour la démonstration de ce premier théorème.

Le second théorème obtenu dans l'article de Fargues concerne les applications cohomologiques et est nouveau par rapport aux travaux de Faltings. Il est valable en égales et inégales caractéristiques.

Théorème 2.

- *Il existe une équivalence de topos*

$$\varprojlim_{K \subset GL_n(\mathcal{O}_F)} (\mathcal{L}\mathcal{T}_K)_{\text{rig-ét}}^{\sim} \simeq \varprojlim_{K \subset \mathcal{O}_D^\times} (\mathcal{D}r_K)_{\text{rig-ét}}^{\sim}$$

compatible à l'action de $GL_n(F) \times D^\times$ (action tordue de l'action naturelle sur l'une des deux tours comme dans le théorème précédent).

- *Soit Λ un anneau de torsion. Il y a alors des isomorphismes $GL_n(F) \times D^\times \times W_F$ -équivariants*

$$\forall q \geq 0, \quad \varinjlim_{K \subset GL_n(\mathcal{O}_F)} H_c^q(\mathcal{L}\mathcal{T}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{K \subset \mathcal{O}_D^\times} H_c^q(\mathcal{D}r_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda)$$

(cohomologie étale à support compact).

- *Plus précisément, on peut donner un sens aux complexes de cohomologie “ $\varinjlim_K R\Gamma_c(\mathcal{L}\mathcal{T}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda)$ ” et “ $\varinjlim_K R\Gamma_c(\mathcal{D}r_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda)$ ” dans la catégorie dérivée des Λ -modules munis d'une action lisse de $GL_n(F) \times D^\times \times W_F$. Ces deux complexes sont alors isomorphes.*
- *Il y a une équivalence de topos “de Jacquet-Langlands” entre faisceaux rig-étales D^\times -équivariants, tels que l'action de D^\times soit “lisse”, sur l'espace des périodes de Gross-Hopkins \mathbb{P}^{n-1} (ou plutôt une forme tordue, une variété de Severi-Brauer) et les mêmes type de faisceaux $GL_n(F)$ -équivariants sur Ω .*

Plan du livre

Le livre contient deux articles complètement indépendants. Celui de Laurent Fargues intitulé “L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques” traite du cas d’inégales caractéristiques ainsi que des applications cohomologiques. L’article d’Alain Genestier et Vincent Lafforgue intitulé “L’isomorphisme des deux tours. Une autre approche en égales caractéristiques” traite du cas d’égales caractéristiques. On renvoie aux introductions respectives de chacun des articles pour plus de détails.

L’isomorphisme au niveau des squelettes

Le lecteur désirant approfondir le sujet pourra consulter l’article [7] dans lequel Fargues donne une description détaillée de l’isomorphisme au niveau des “squelettes” des espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld.

Remerciements

Ce livre est né d’un groupe de travail organisé à l’IHES par Jean-François Dat, Laurent Fargues et Alain Genestier au printemps 2004. Les auteurs remercient tous les participants de celui-ci et plus particulièrement Jean-François Dat pour de nombreuses discussions. Nous tenons également à remercier Laurent Lafforgue pour nous avoir fait bénéficier de l’hospitalité de l’IHES. En particulier, l’article de Laurent Fargues a été rédigé alors que celui-ci résidait dans cet institut à l’invitation de Laurent Lafforgue.

Laurent Fargues tient également à remercier Ofer Gabber avec qui il a bénéficié de discussions fructueuses lors de la rédaction du quatrième chapitre de son article.

Alain Genestier remercie également l’université de Bielefeld, où il a eu l’occasion de donner une série d’exposés sur ce sujet. Il remercie aussi Thomas Zink et Eike Lau, le premier pour son invitation à Bielefeld, et tous les deux pour les questions stimulantes qu’ils lui ont posées lors des exposés.

Bibliographie

- [1] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples et applications. *Prépublication*.
- [2] P. Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138(3):573–629, 1999.
- [3] H. Carayol. Nonabelian Lubin-Tate theory. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, volume 11 of *Perspect. Math.*, pages 15–39. Academic Press, Boston, MA, 1990.

- [4] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques. *À paraître à Invent. Math.*
- [5] V.G. Drinfeld. Elliptic modules. *Mat. Sb. (N.S.)*, 136(94):594–627, 1974.
- [6] G. Faltings. A relation between two moduli spaces studied by v.g. Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 115–129, 2002.
- [7] L. Fargues. Application de Hodge-Tate duale d’un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification. *À paraître à Duke Math.*
- [8] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [9] M. Rapoport, Th. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*. Number 141 in *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

Première partie

**L'isomorphisme entre les tours
de Lubin-Tate et de Drinfeld et
applications cohomologiques**

par

Laurent Fargues

Introduction

Cet article est divisé en quatre chapitres qui pourraient être vus comme quatre articles différents. Les trois premiers sont consacrés à la construction de l'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld en inégales caractéristiques. Le dernier est une application de l'isomorphisme à la cohomologie des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et s'applique aussi bien en égales qu'inégales caractéristiques. Le troisième chapitre dépend des deux premiers, mais à part cela la lecture des autres chapitres est indépendante. Plus précisément,

- Dans le premier chapitre, on construit une décomposition cellulaire de la tour de Lubin-Tate “en niveau infini”. Il s'agit d'une étape préliminaire à la construction de l'isomorphisme “en niveau infini” entre les deux tours. Comme expliqué dans le préambule, il faut transformer les modèles entiers usuels des espaces de Lubin-Tate en modèles entiers pouvant être comparés aux modèles usuels des espaces de Drinfeld.
- Le second, indépendant du premier, est consacré à la construction de l'isomorphisme au niveau des points.
- Dans le troisième chapitre, on démontre le résultat principal, c'est-à-dire l'existence d'un isomorphisme équivariant “en niveau infini” entre les modèles entiers construits dans le chapitre I et ceux des espaces de Drinfeld. Ce chapitre dépend donc du premier et du second (à moins que le lecteur, pris d'une pulsion suicidaire, désire s'attaquer à la preuve de l'isomorphisme en général sans avoir compris sa construction au niveau des points).
- Le quatrième chapitre est largement indépendant des autres et complètement original par rapport aux travaux de Faltings. Il est consacré à une application de l'isomorphisme. On y démontre entre autres que l'isomorphisme construit précédemment en niveau infini induit un isomorphisme équivariant entre la cohomologie étale des tours rigides analytiques de Lubin-Tate et de Drinfeld. Ce chapitre contient de nombreux autres résultats sur la cohomologie des espaces rigides analytiques p -adiques indépendants des trois articles précédents.

On y démontre également l'existence d'une équivalence de topos entre certains faisceaux rigides-étales équivariants sur l'espace des périodes de Gross-Hopkins et sur l'espace de Drinfeld. Combinés aux résultats de Pascal Boyer ([5]) sur la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, les résultats de ce

dernier article ont été utilisés par Jean-François Dat ([6]) afin de calculer le complexe de cohomologie équivariant des espaces de Drinfeld et en déduire la conjecture de monodromie poids pour les variétés uniformisées par ceux-ci.

Chapitre I

Une décomposition cellulaire de la tour de Lubin-Tate

Introduction

Cette première partie vise à p -adifier la tour de Lubin-Tate: les modèles entiers usuels de la tour de Lubin-Tate ([8]) sont donnés par le spectre formel d'anneaux du type $\mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_{n-1}]]$, un idéal de définition étant (p, x_1, \dots, x_{n-1}) . Les modèles entiers naturels de la tour de Drinfeld eux sont p -adiques: l'idéal de définition des schémas formels associés est l'idéal engendré par p , les anneaux associés étant du type $\mathbb{Z}_p\langle x_1, \dots, x_d \rangle / \text{Idéal}$. Pour pouvoir comparer ces deux tours nous devons donc d'abord modifier les modèles usuels de la tour de Lubin-Tate.

Utilisant certains domaines fondamentaux quasicompacts pour l'action des correspondances de Hecke sphériques, on reconstruit un modèle entier p -adique en niveau infini de la tour de Lubin-Tate, modèle qui pourra être comparé à la tour de Drinfeld. Ce schéma formel p -adique est obtenu par recollement d'itérés sous les correspondances de Hecke d'un modèle entier p -adique du domaine fondamental.

Ces correspondances de Hecke sont paramétrées par un immeuble de Bruhat-Tits et le schéma formel est obtenu par recollement équivariant de "cellules", des schémas formels affines, indexées par les sommets de l'immeuble. Il est à noter que, contrairement à celle de l'espace de Drinfeld, cette décomposition cellulaire est indexée par les sommets de l'immeuble et non les simplexes. Ainsi, dans l'article [12], on montre que dans le cas de GL_2 l'image de ces cellules dans l'immeuble de Bruhat-Tits paramétrant l'espace de Drinfeld consiste en les boules de rayon $1/2$ centrées en les sommets de l'immeuble (cf. figure I.1).

Le schéma formel p -adique construit n'est pas un schéma formel topologiquement de type fini, il vit en niveau infini. Il n'est pas possible d'effectuer sa construction en niveau fini (par niveau on entend un sous-groupe compact ouvert de $GL_n(\mathbb{Z}_p)$). Plus précisément, si $r \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ et $\mathbb{B}^{n-1}(0, r)$ désigne la boule fermée de rayon r dans la boule ouverte p -adique $\mathring{\mathbb{B}}^{n-1}(0, 1)$, la base de l'espace de

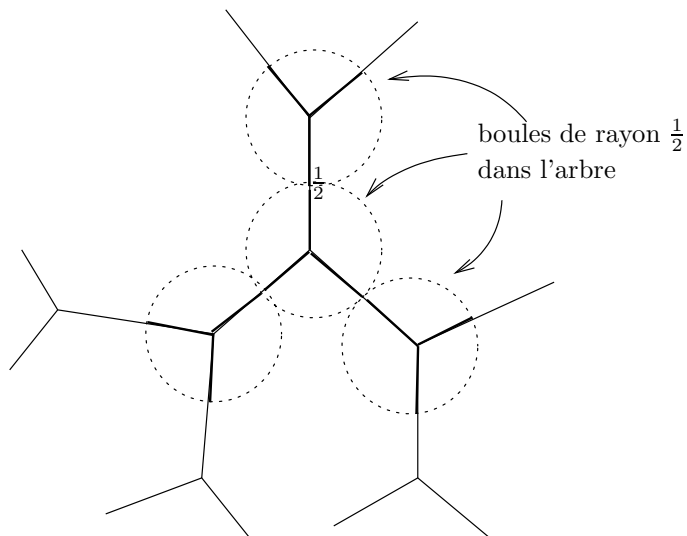


FIG. I.1: La décomposition cellulaire de l'arbre de PGL_2 indexée par les sommets

Lubin-Tate (sans niveau), on peut alors construire un tel espace en niveau fini pour l'image réciproque de cette boule dans la tour de Lubin-Tate. Mais lorsque $r \rightarrow 1$, ou si l'on veut, lorsque l'on tend vers le bord de l'immeuble de Bruhat-Tits, i.e., on sort de tout compact, le niveau doit tendre vers l'infini. Cela est relié au fait suivant. Soit \mathcal{I} l'immeuble de Bruhat-Tits de $PGL_n(\mathbb{Q}_p)$ et $A \subset \mathcal{I}$ un sous-ensemble simplicial fini. Il existe alors un sous-groupe compact ouvert $K_A \subset GL_n(\mathbb{Z}_p)$ tel que la composée $A \hookrightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/K_A$ soit un plongement. Mais lorsque A grandit, $K_A \longrightarrow \{Id\}$.

Décrivons les différentes parties de l'article:

- Dans les sections 2, 3 et 4, nous démontrons des résultats généralisant ceux de [17], concernant l'application des périodes de l'espace de Lubin-Tate vers l'espace projectif et les domaines fondamentaux pour les correspondances de Hecke non-ramifiées dans ces espaces. Nous y donnons également des formules matricielles basées sur la théorie des Displays pour l'application des périodes. Certains de ces résultats sont déjà dans l'article [26].

Puis nous étudions en détail les domaines fondamentaux pour l'action des correspondances de Hecke non-ramifiées sur la base de la tour de Lubin-Tate, définis par Gross-Hopkins dans [17]. Ces résultats sont placés dans un cadre plus conceptuel et généralisés dans [12]. Néanmoins, les résultats plus complexes de [12] ne sont pas nécessaires à une première compréhension de l'isomorphisme entre les deux tours. C'est pourquoi ils ne sont pas inclus.

Par exemple dans [12] on montre comment construire de façon systématique des domaines fondamentaux généralisant ceux de Gross-Hopkins et comment comprendre la façon dont ils se recollent avec leurs itérés sous des correspondances de Hecke.

- Les sections 5 à 8 sont le coeur de l'article. Nous y utilisons les domaines fondamentaux de Gross-Hopkins pour décomposer cellulièrement la tour de Lubin-Tate. Nous y construisons à la fin un schéma formel p -adique cellulièrement décomposé au-dessus de l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire. La cellule au-dessus d'un sommet de l'immeuble est le spectre formel d'une algèbre p -adique du type la boule unité dans une algèbre de Banach p -adique obtenue par complétion d'une union croissante $\bigcup_{k \geq 0} \mathcal{A}_k$, où \mathcal{A}_k est une algèbre affinoïde munie de sa norme infinie et $\mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_{k+1}$ est fini. L'algèbre \mathcal{A}_0 est la fibre générique d'un espace de déformations de groupe p -divisible avec contraintes sur le polygone de Newton de ses points de p -torsions. Les algèbres \mathcal{A}_k sont obtenues en ajoutant des points de torsions (structures de niveau).
- Dans l'appendice A, on discute de la normalisation des schémas formels p -adiques admissibles dans un revêtement fini de leur fibre générique, vue comme espace rigide. On utilise ces résultats de façon cruciale dans la construction de nos schémas formels. Cet appendice est né de diverses questions de géométrie rigide que s'est posé l'auteur et pour lesquelles il n'a pas trouvé de référence dans la littérature. Il est à noter que le recours à des modèles entiers normaux et non quelconques de nos espaces rigides est crucial, mais cela n'apparaîtra clairement que dans le chapitre III.
- Soit \mathcal{O} l'anneau des entiers d'une extension de degré fini de \mathbb{Q}_p d'uniformisante π . Dans l'appendice B, nous établissons une théorie de la déformation pour les \mathcal{O} -modules π -divisibles relativement aux immersions nilpotentes définies par des idéaux munis de π -analogues des puissances divisées (le cas $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$ et $\pi = p$ étant le cas "classique" traité par la théorie de Messing). Cette section n'est pas strictement nécessaire pour démontrer les résultats auxquels nous nous intéressons mais permet néanmoins d'interpréter agréablement certains objets intervenant dans la définition de l'application des périodes, et accessoirement d'améliorer les résultats d'intégralité de cette application. Les résultats de [11] sont plus généraux que ceux de cet appendice, puisqu'ils s'appliquent aux groupes plats finis. Néanmoins, dans le cas des groupes p -divisibles, la méthode utilisée dans l'appendice B est plus simple que celle de [11].

Prérequis: Concernant les espaces de Lubin-Tate, on supposera le lecteur familier avec les chapitres 1 et 4 de [8], le chapitre II de [14] et [17]. Concernant [17], nous n'aurons à utiliser que le corollaire 23.26 de cet article, les autres résultats étant redémontrés et généralisés par d'autres méthodes. Néanmoins, la lecture de [17] est fortement conseillée, car elle fournit une introduction "concrète" à l'étude détaillée

des espaces de Lubin-Tate. Nous utiliserons le langage des espaces de Rapoport-Zink ([22]), qui est le langage naturel de ce type de problème. On pourra consulter [15] pour une reformulation de [14] dans ce langage-là. On suppose également le lecteur familier avec la théorie de la déformation de Messing ([21]).

Avertissements: Le lecteur uniquement intéressé par la construction du schéma formel p -adique, qui sera relié plus tard à l'espace de Drinfeld, peut sauter les chapitres 2 et 4. Néanmoins le résultat concernant l'application des périodes sera utilisé plus tard dans la construction de l'isomorphisme entre les deux tours. Le recours à des modèles entiers normaux et non quelconques de nos espaces rigides peut sembler artificiel mais est crucial, cependant cela n'apparaîtra clairement que dans les détails techniques du chapitre III. L'appendice B est réservé aux "experts".

Introduction bis: Construction du schéma formel dans le cas de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ par éclatements des courbes modulaires

Soit, pour $N \geq 3$, $Y(N)$ la courbe modulaire ouverte sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ classifiant les courbes elliptiques E munies d'une structure de niveau N , $(N^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^2 \rightarrow E[N]$, au sens de Katz-Mazur ([18]). On a

$$Y(N)(\mathbb{C}) = \coprod_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \Gamma(N) \backslash \mathbb{H}^\pm$$

où $\mathbb{H}^\pm = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Fixons un nombre premier p ainsi qu'un entier $N_0 \geq 3$ tel que $(N_0, p) = 1$. Soit E la courbe elliptique universelle sur $Y(N_0) \otimes \mathbb{F}_p$. Considérons le Verschiebung $V : E^{(p)} \rightarrow E$ c'est-à-dire l'isogénie duale du Frobenius $F : E \rightarrow E^{(p)}$. Le morphisme induit au niveau des formes différentielles invariants est

$$V^* : \omega_E \rightarrow \omega_{E^{(p)}} \simeq \omega_E^{\otimes p}$$

où l'on a fixé un isomorphisme (non canonique) entre fibrés en droites $\omega_{E^{(p)}} \simeq \omega_E^{\otimes p}$. Il fournit une forme modulaire mod p de poids $p-1$

$$H \in \Gamma(Y(N_0)_{\mathbb{F}_p}, \omega_E^{\otimes(p-1)})$$

qui est l'invariant de Hasse. Cela définit un diviseur de Cartier réduit D dans $Y(N_0)_{\mathbb{F}_p}$ de support le lieu supersingulier, un nombre fini de points de la fibre spéciale. Si $y \in Y(N_0)(\overline{\mathbb{F}_p})_{s.s.}$

$$Y(N_0)_{\{y\}}^\wedge \simeq \text{Spf}(W(\overline{\mathbb{F}_p})[[x]])$$

où l'on peut choisir $x \equiv H \pmod{p}$ (si $p \neq 2, 3$, x peut être choisi égal à une série d'Eisenstein E_{p-1}).

Désormais, on notera $Y(N_0)$ pour $Y(N_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}_p^{nr}}$ et D pour le diviseur de Cartier précédent étendu à $Y(N_0)_{\overline{\mathbb{F}_p}}$. Soit

$$Y(p^\infty N_0) = \varprojlim_{k \geq 0} Y(p^k N_0)$$

un $\widehat{\mathbb{Z}_p^{nr}}$ -schéma et

$$\pi : Y(p^\infty N_0) \longrightarrow Y(N_0)$$

la projection. C'est un morphisme plat totalement ramifié au-dessus des points supersinguliers. Le schéma $Y(p^\infty N_0)$ est muni d'une action de Hecke de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le morphisme π est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -invariant.

Considérons le diviseur de Cartier

$$D_\infty = \pi^* D$$

Il est "infiniment ramifié" au sens où le sous-schéma fermé de $Y(p^\infty N_0)_{\overline{\mathbb{F}_p}}$, défini par D_∞ , possède des nilpotents d'ordre quelconque. Néanmoins, $\mathrm{supp}(\pi^* D)$ est un nombre fini de points fermés

$$\pi : \mathrm{supp}(\pi^* D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{supp}(D) = Y(N_0)_{s.s.}(\overline{\mathbb{F}_p})$$

Le morphisme π étant $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -invariant, D_∞ est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -invariant

$$\forall g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p), \quad g^* D_\infty = D_\infty$$

Considérons les itérés de D_∞ par les correspondances de Hecke

$$\{g^* D_\infty \mid g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\}$$

ensemble paramétré par l'arbre de GL_2 . Bien sûr, $\forall g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) / \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $\mathrm{supp}(g^* D_\infty) = \mathrm{supp}(D_\infty)$, puisque les correspondances de Hecke laissent invariant le lieu supersingulier. Néanmoins, lorsque g varie dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, ces diviseurs de Cartier sont distincts.

Fixons un entier $\alpha \geq 1$. Pour $A \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, un sous-ensemble fini de sommets de l'arbre, soit

$$X_A = \quad \text{L'éclatement de } Y(p^\infty N_0) \text{ le long du diviseur } \sum_{g \in A} g^* D_\infty^\alpha$$

de la fibre spéciale $Y(p^\infty N_0)_{\overline{\mathbb{F}_p}}$

(un diviseur de la fibre spéciale définit un sous-schéma fermé de codimension 2 du modèle entier) et $U_A \subset X_A$, l'ouvert où p engendre le diviseur exceptionnel. En fibre générique, i.e., après inversion de p , $(U_A)_\eta = (X_A)_\eta = Y(p^\infty N_0)_\eta$.

Si $A \subset B$, notons $\Pi_{A,B} : X_B \longrightarrow X_A$. On a $\Pi_{A,B}^{-1}(U_A) \subset U_B$ et $\Pi_{A,B}$ induit un isomorphisme

$$\Pi_{A,B} : \Pi_{A,B}^{-1}(U_A) \xrightarrow{\sim} U_A$$

et donc, via $\Pi_{A,B}$, $U_A \subset U_B$. Soit

$$Z = \varinjlim_{A \subset GL_2(\mathbb{Q}_p)/GL_2(\mathbb{Z}_p)} U_A$$

où les sous-ensembles finis de l'arbre sont ordonnés par l'inclusion. C'est un schéma sur $\text{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_p))$, muni d'une action de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, puisque pour $g \in GL_2(\mathbb{Q}_p)$ on a $g : U_A \rightarrow U_{g.A}$. De plus, $Z_\eta = Y(p^\infty N_0)_\eta$.

Soit maintenant Z' le normalisé de Z dans sa fibre générique Z_η . Soit \mathfrak{Z} le schéma formel sur $\text{Spf}(W(\overline{\mathbb{F}}_p))$ égal au complété p -adique de Z' . Il est muni d'une action de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Pour $\alpha = 2$, le schéma formel \mathfrak{Z} est "à quelques détails près" le schéma formel p -adique associé à la tour de Lubin-Tate, que nous allons construire en général. Nous ne le construirons pas de cette manière. Pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, ce schéma formel \mathfrak{X}_∞ sera un schéma formel p -adique, muni d'une action de $GL_2(\mathbb{Q}_p) \times D^\times$, où $D|\mathbb{Q}_p$ est une algèbre de quaternions. On aura alors

$$\mathfrak{Z} \simeq \prod_{i \in I} \mathfrak{X}_\infty / \pi^{a_i \mathbb{Z}}$$

où I est un ensemble fini et $a_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Bien sûr, sur la construction précédente, on ne voit pas l'action de D^\times , il faut utiliser le théorème de Serre-Tate pour la voir.

I.1 Hypothèses et notations

Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension de degré fini, d'uniformisante π et de corps résiduel $k = \mathbb{F}_q = \mathcal{O}_F/\pi\mathcal{O}_F$. On note $\check{F} = \widehat{F^{nr}}$ le complété de l'extension maximale non-ramifiée de F dans une clôture algébrique de celui-ci et F^0 l'extension maximale non-ramifiée de \mathbb{Q}_p dans F . On note parfois \mathcal{O} pour \mathcal{O}_F et $\check{\mathcal{O}}$ pour $\mathcal{O}_{\check{F}}$. On fixe un isomorphisme entre le corps résiduel de $\mathcal{O}_{\check{F}}$ et $\overline{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique de \mathbb{F}_q .

Si \mathfrak{Z} est un schéma formel d'idéal de définition \mathfrak{J} , par définition, la catégorie des groupes p -divisibles sur \mathfrak{Z} est la catégorie limite projective

$$\varprojlim_{k \geq 1} (\text{Groupes } p\text{-divisibles sur } \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}/\mathfrak{J}^k))$$

de la catégorie fibrée des groupes p -divisibles sur le système de schémas

$$(\mathfrak{Z} \bmod \mathfrak{J}^k)_{k \geq 1}.$$

Cela signifie concrètement que se donner un groupe p -divisible sur \mathfrak{Z} est équivalent à se donner une famille de groupes p -divisibles $(G_k)_{k \geq 1}$ sur les $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}/\mathfrak{J}^k)_{k \geq 1}$

munis d'isomorphismes $\forall k, G_{k+1} \bmod \mathfrak{I}^k \xrightarrow{\sim} G_k$, satisfaisant une condition de cocycle évidente. Rappelons que si $\mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}(A)$ est affine, il y a une équivalence de catégories entre groupes p -divisibles sur \mathfrak{Z} et groupes p -divisibles sur $\mathrm{Spec}(A)$ (il s'agit de l'analogie du théorème d'algébrisation de Grothendieck appliqué aux schémas abéliens).

Une quasi-isogénie $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ entre deux groupes p -divisibles sur \mathfrak{Z} est un système compatible de quasi-isogénies sur les $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}/\mathfrak{I}^k)_{k \geq 1}$. On prendra garde que la notion de quasi-isogénies sur $\mathrm{Spec}(A)$ est beaucoup plus forte que celle sur $\mathrm{Spf}(A)$.

Si S est un \mathcal{O}_F -schéma ou bien un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_F)$ -schéma formel, un \mathcal{O} -module π -divisible sur S est un groupe p -divisible H sur S muni d'une action de \mathcal{O} induisant l'action canonique sur son algèbre de Lie (cf. appendice B pour plus de détails). Il sera dit formel si ses fibres géométriques en tous les points de la base ne possèdent pas de partie étale.

I.1.1 Espaces

Définition I.1.1. Nous notons \mathbb{H}_0 un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension 1 et hauteur n sur \mathbb{F}_q . Nous notons $\mathbb{H} = \mathbb{H}_0/\overline{\mathbb{F}_q}$.

Définition I.1.2. Nous notons \mathfrak{X}_0 l'espace de Lubin-Tate des déformations par isomorphismes de \mathbb{H}_0 , ou encore l'espace des $*$ -déformations d'une loi de groupe formel associée comme dans [17]. Nous notons H_0 la déformation universelle. On note de même \mathfrak{X}, H , les objets étendus à $\check{\mathcal{O}}$.

Le \mathcal{O}_F -schéma formel \mathfrak{X}_0 est non-canoniquement isomorphe à

$$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}[[x_1, \dots, x_{n-1}]])$$

Il représente le foncteur qui à une \mathcal{O} -algèbre locale complète R d'idéal maximal \mathfrak{m} et de corps résiduel \mathbb{F}_q , associe les classes d'isomorphisme de couples (H_0, ρ_0) où H_0 est un \mathcal{O} -module π -divisible sur R et

$$\rho_0 : \mathbb{H}_0 \xrightarrow{\sim} H_0 \otimes_R R/\mathfrak{m}$$

Définition I.1.3. On note $\widehat{\mathcal{M}}$ l'espace de Rapoport-Zink, associé sur $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$, des déformations par quasi-isogénies de \mathbb{H} ([22]). On note \mathcal{M} l'espace rigide fibre générique associé.

Le schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}$ représente le foncteur qui à un $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ -schéma formel \mathcal{S} associe les classes d'isomorphismes de couples (H, ρ) , où H est un \mathcal{O} -module π -divisible sur \mathcal{S} et

$$\rho : \mathbb{H} \times_{\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}_q})} (\mathcal{S} \bmod \pi) \rightarrow H \times_{\mathcal{S}} (\mathcal{S} \bmod \pi)$$

est une quasi-isogénie.

I.1.2 Action

Le groupe \mathbb{H}_0 étant défini sur \mathbb{F}_q , $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{(q)}$, et donc le morphisme de Frobenius définit un élément

$$\Pi = \text{Frob}_q \in \text{End}(\mathbb{H})$$

et alors

$$\text{End}(\mathbb{H}) = \mathcal{O}_{F_n}[\Pi] = \mathcal{O}_D$$

l'ordre maximal dans une algèbre à division D d'invariant $\frac{1}{n}$, où $F_n|F$ désigne l'extension non-ramifiée de degré n . L'action de F_n n'est pas définie sur \mathbb{F}_q , on a $\text{End}(\mathbb{H}_0) = \mathcal{O}_F[\Pi]$, l'anneau des entiers d'une extension totalement ramifiée (le polynôme caractéristique de Π est d'Eisenstein).

Définition I.1.4. On munit \mathfrak{X} de l'action à gauche de \mathcal{O}_D^\times et $\widehat{\mathcal{M}}$ de celle de D^\times , en posant

$$d.(H, \rho) = (H, \rho \circ d^{-1})$$

pour H un groupe p -divisible et ρ l'isomorphisme ou quasi-isogénie définissant la déformation.

I.1.3 Scindage de l'espace de Rapoport-Zink

Rappelons que toute quasi-isogénie de degré zéro entre \mathcal{O} -modules π -divisibles formels de dimension 1, définis sur un schéma réduit annulé par p , est un isomorphisme. Il y a donc une décomposition

$$\widehat{\mathcal{M}} = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{M}}^{[i]}$$

où $\widehat{\mathcal{M}}^{[i]}$ désigne l'ouvert-fermé de $\widehat{\mathcal{M}}$ où la quasi-isogénie universelle est de hauteur i . De plus,

$$\begin{aligned} \Pi^{-i} : \widehat{\mathcal{M}}^{[0]} &\xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{M}}^{[i]} \\ (H, \rho) &\mapsto (H, \rho \circ \text{Frob}_q^i) \end{aligned}$$

et

$$\widehat{\mathcal{M}}^{[0]} \simeq \mathfrak{X}$$

I.1.4 Donnée de descente de Rapoport-Zink

Elle est définie dans la section 3.48 de [22]. Soit σ le Frobenius arithmétique de $F^{nr}|F$. Cette donnée de descente α est donnée dans notre cas par le diagramme

suivant

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\alpha} & \widehat{\mathcal{M}}^{(\sigma)} \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{X} & \xrightarrow{\Pi \otimes \sigma} & \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{X} \end{array}$$

où l'opérateur Π est l'identité de \mathfrak{X} décalée de -1 dans $\prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{X}$ et $1 \otimes \sigma$ est donné par

l'égalité $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \check{\mathcal{O}}$. On voit en particulier qu'elle n'est pas effective puisqu'elle décale de -1 la hauteur de l'isogénie. Cependant, elle devient effective sur les quotients $\widehat{\mathcal{M}}/\pi^{a\mathbb{Z}}$, pour tout entier $a \in \mathbb{N}^*$ (ce qui revient du point de vue cohomologique à prendre les représentations ayant un caractère central d'ordre fini). L'action de D^\times commute à cette donnée de descente α .

Remarque I.1.5. La donnée de descente $1 \otimes \sigma$ définissant \mathfrak{X}_0 sur $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \check{\mathcal{O}}$ n'est pas la bonne puisque, par exemple, elle ne commute pas à l'action de \mathcal{O}_D^\times . Dans [17] Gross et Hopkins utilisent cependant cette donnée de descente, quitte à tordre l'action de \mathcal{O}_D^\times en le remplaçant par le groupe étale localement constant $\text{Aut}(\mathbb{H}_0)$ ($\text{Aut}(\mathbb{H}_0)$ est un groupe sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)_{\text{ét}}$, qui devient constant sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_{q^n})$; il définit donc un groupe sur $(\mathfrak{X}_0)_{\text{ét}}$, qui devient constant sur $\mathfrak{X}_0 \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{F_n}$). Nous préférons cependant adopter le point de vue de Rapoport-Zink.

I.1.5 Polygone de Newton des points de torsion

Soit $L|F$ une extension valuée complète pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (il s'agit des corps intervenant dans la théorie des espaces analytiques de Berkovich). Si H est un \mathcal{O} -module π -divisible formel sur \mathcal{O}_L de groupe formel associé \widehat{H} , il y a une application "valuation"

$$v : \widehat{H}(\mathcal{O}_L) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

qui est définie en fixant un isomorphisme de \mathcal{O}_L -schémas formels pointés

$$\text{Spf}(\mathcal{O}_L[[T]]) \xrightarrow{\sim} \widehat{H},$$

l'un étant pointé par la section $T = 0$ et l'autre par sa section unité (c'est-à-dire en fixant une loi de groupe formel associée), par la "valuation de la coordonnée T ". Cette application ne dépend pas du choix d'un tel isomorphisme puisque tout automorphisme du schéma formel $(\mathbb{A}^1)_{\setminus \{0\}}$, envoyant l'origine sur l'origine, induit en fibre générique un automorphisme de \mathbb{B}^1 conservant la distance à l'origine.

On s'intéressera en fait à la valuation des points de torsion

$$H(\mathcal{O}_L) = \widehat{H}[\pi^\infty](\mathcal{O}_L).$$

La “valuation” définit une filtration appelée filtration de ramification inférieure par des sous- \mathcal{O} -modules sur ces points de torsion, formée des sous-modules où la valuation est supérieure à un nombre donné. Elle est étudiée en détail dans [12]. Bornons-nous à quelques rappels.

Il existe un système de coordonnées formelles (x_1, \dots, x_{n-1}) sur \mathfrak{X}_0 , i.e., un isomorphisme

$$\mathfrak{X}_0 \simeq \mathrm{Spf}(\mathcal{O}[[x_1, \dots, x_{n-1}]])$$

et une loi de groupe formel universelle F^{univ} , telle que

$$[\pi]_{F^{\mathrm{univ}}} = \pi u_0 T + x_1 u_1 T^q + \dots + x_{n-1} u_{n-1} T^{q^{n-1}} + u_n T^{q^n}$$

où $u_0, \dots, u_n \in \check{O}[[x_1, \dots, x_{n-1}]][[T]]^\times$ sont des unités (cf. [20] chapitre 1 page 106, cela se déduit également de la théorie de Cartier cf. [17]). Nous fixons un tel isomorphisme. Pour $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathfrak{X}_0^{\mathrm{rig}}(\overline{F})$, ou plus généralement $\mathfrak{X}_0^{an}(L) := \mathfrak{X}_0(\mathcal{O}_L)$, avec $L|F$ une extension valuée complète comme précédemment, on note $H_{\underline{x}}$ la spécialisation du groupe p -divisible universel.

On vérifie alors aisément que le polygone de Newton de la multiplication par π sur la loi de groupe formel universelle est l’enveloppe convexe des $(q^i, v(x_i))_{0 \leq i \leq n}$, où $x_0 = \pi$ et $x_n = 1$ (cf. figure I.2). Ses pentes non infinies $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, où λ_i apparaît $q^i - q^{i-1}$ fois entre les abscisses q^{i-1} et q^i , sont les valuations des points de π -torsion non nuls dans $H_{\underline{x}}[\pi](\mathcal{O}_L) \setminus \{0\}$. On peut donc lire sur ce polygone de Newton la filtration de ramification de $H_{\underline{x}}[\pi](\mathcal{O}_L)$.

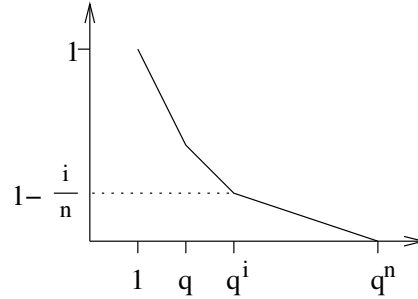


FIG. I.2: Le polygone de Newton de la multiplication par π

Remarque I.1.6. Notons encore H_0 le groupe p -divisible sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}[[\underline{x}]])$ associé à celui sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}[[\underline{x}]])$. Le choix de coordonnées précédentes implique que la stratification de Newton de $H_0 \bmod \pi$ sur $\mathrm{Spec}(k[[\underline{x}]])$ est donnée par

$$V(x_1, \dots, x_{n-1}) \subset \dots \subset V(x_1, x_2) \subset V(x_1)$$

où $V(x_1, \dots, x_{n-1})$ est le lieu supersingulier (le point dont on est parti et qu'on a déformé) et $V(x_1)^c$ le lieu ordinaire, et c'est essentiellement la seule propriété

dont nous auront besoin. On vérifie en effet que cette seule propriété sur la stratification de Newton implique que le polygone de Newton de $H_0[\pi]$ est celui donné précédemment.

L'ensemble des points de $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$ où le polygone de Newton de $H[\pi]$ est au-dessus d'un polygone donné est un ouvert admissible quasicompact. Cela permet de stratifier l'espace rigide $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$ par de tels polygones. En quelque sorte, les "bonnes coordonnées" sur l'espace $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$ ne sont pas les $(v(x_i))_{1 \leq i \leq n-1}$, mais celles données par le polygone de Newton précédent.

I.2 Application des périodes

I.2.1 Définition

Définition I.2.1. On note $\check{\pi}_1 : \mathcal{M}^{[0]} \rightarrow \mathbb{P}_{\check{F}}^{n-1}$ l'application des périodes telle que définie dans la section 23 de [17] ou plus généralement le chapitre 5 de [22].

Ce morphisme étale \mathcal{O}_D^\times -équivariant d'espaces rigides est défini de la façon suivante. Soit \mathcal{E}_1 le cristal de Messing de H comme objet de

$$\left((\mathfrak{X} \otimes (\check{\mathcal{O}}/p\check{\mathcal{O}}) / \text{Spec}(\check{\mathcal{O}})) \right)_{NCRIS}$$

(le cristal algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de [21] sur le site cristallin nilpotent). Soit $\mathcal{E}_1^{\text{rig}}$ l'isocristal convergent associé sur $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$. Soit \mathcal{E}_2 le cristal de Dieudonné de \mathbb{H} sur $(\text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q) / \text{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_q)))_{NCRIS}$.

Il y a un plongement

$$\iota : W(\overline{\mathbb{F}}_q) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\check{F}}$$

fixé par le choix de l'isomorphisme entre le corps résiduel de \check{F} et $\overline{\mathbb{F}}_q$. Soit

$$f : \mathfrak{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{\check{F}}) \rightarrow \text{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_q))$$

le morphisme composé. Il y a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} \otimes (\mathcal{O}_{\check{F}}/p\mathcal{O}_{\check{F}}) & \longrightarrow & \text{Spec}(\check{\mathcal{O}}) \\ f \text{ mod } p \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q) & \longrightarrow & \text{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_q)) \end{array}$$

qui induit donc un morphisme de topos

$$f^{CRIS} : \left((\mathfrak{X} \otimes (\mathcal{O}_{\check{F}}/p\mathcal{O}_{\check{F}}) / \text{Spec}(\check{\mathcal{O}})) \right)_{NCRIS} \rightarrow (\text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q) / \text{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_q)))_{NCRIS}$$

La quasi-isogénie universelle $\rho : \mathbb{H} \times_{\overline{\mathbb{F}}_q} (\mathfrak{X} \bmod p) \longrightarrow H \times_{\mathfrak{X}} (\mathfrak{X} \bmod p)$ sur l'espace des déformations induit une quasi-isogénie de cristaux

$$\mathbb{D}(\rho) : f^{CRIS*} \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$$

et donc un isomorphisme d'isocristaux convergents

$$f^{\text{rig}*}(\mathcal{E}_2^{\text{rig}}) = (f^* \mathcal{E}_2)^{\text{rig}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1^{\text{rig}} \quad (\text{I.1})$$

Si $\mathbb{D}(\mathbb{H})$ désigne le module de Dieudonné covariant “classique” de \mathbb{H} , c'est-à-dire l'évaluation de \mathcal{E}_2 sur l'épaississement $\text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q) \hookrightarrow \text{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_q))$, et $E(H)$ l'extension vectorielle universelle du groupe p -divisible universel H (un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module libre de rang $n[F : \mathbb{Q}_p]$), il y a donc un isomorphisme \mathcal{O}_D^\times -équivariant

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}, \iota}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}} \simeq \text{Lie}(E(H))^{\text{rig}} \quad (\text{I.2})$$

et de plus

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}, \iota}} \check{F} = (\text{Lie}(E(H))^{\text{rig}})^{\nabla=0}$$

où ∇ désigne la connexion de Gauss-Manin induite par la structure cristalline de l'extension vectorielle universelle.

On renvoie à la section 5.3 de [7] ou la proposition 2.3.26 de [13] pour la construction des isomorphismes (I.1) et (I.2), qui repose sur la construction de Berthelot-Ogus du foncteur des F -cristaux à isogénie-près vers les isocristaux convergents. Cette construction repose elle-même sur l'astuce de Dwork; la structure de Frobenius permet d'agrandir les domaines de définition des solutions de l'équation différentielle $\nabla = 0$, où ∇ est la connexion de Gauss-Manin.

Il est également construit sans recours à la structure de F -cristal mais en utilisant la rigidité des quasi-isogénies dans [22] (cf. proposition 5.15 de [22]).

L'isomorphisme (I.2) est un isomorphisme de $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} \check{F}$ -modules, via l'action de \mathcal{O}_F sur H et \mathbb{H} . Considérons la décomposition isotypique

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{\tau : F^0 \hookrightarrow W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}, \tau}$$

Le morphisme $\iota : W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \check{F}$ induit un plongement $\tau_0 : F^0 \hookrightarrow W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}}$. Celui-ci induit un isomorphisme $\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}_{F^0, \tau_0}} W(\overline{\mathbb{F}}_q) \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ ($W_{\mathcal{O}}$ désigne les vecteurs de Witt ramifiés, cf. [9]). Notons alors

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} = \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}, \tau_0}$$

où \mathcal{O} est là pour \mathcal{O}_F . C'est un $W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ -module muni d'un Frobenius φ qui est semi-linéaire relativement au Frobenius de $W_{\mathcal{O}}$. C'est un cristal relativement à \mathcal{O} , les cristaux usuels correspondant au cas $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$.

Soit $\alpha : F \otimes_{\mathbb{Q}_p} \check{F} \rightarrow \check{F}$. Le plus grand quotient de $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}, \iota}} \check{F}$ à travers lequel F agit via $F \subset \check{F}$ est

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}, \iota}} \check{F} \right) \otimes_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} \check{F}, \alpha} \check{F} &= \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_{F \otimes W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}}} \check{F} \\ &= \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

Notons $(\text{Lie}(E(H))^{\text{rig}})'$ le plus grand quotient de $\text{Lie}(E(H))^{\text{rig}}$ sur lequel \mathcal{O} agit à travers $F \subset \check{F}$. L'isomorphisme \mathcal{O}_D^{\times} -équivariant (I.2) induit alors un isomorphisme entre fibrés \mathcal{O}_D^{\times} -équivariants sur $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}} \simeq (\text{Lie}(E(H))^{\text{rig}})'$$

La filtration localement facteur direct

$$V(H) \subset \text{Lie } E(H)$$

définie par la partie vectorielle de l'extension universelle est telle que sur son quotient $\text{Lie } H$, \mathcal{O} agisse à travers $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\check{F}}$. Le $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ -module $\text{Lie } E(H)^{\text{rig}}$ est libre d'après l'isomorphisme (I.2). On en déduit (cf. par exemple la démonstration la proposition B.3.3 de l'appendice B) que si $I = \ker(\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O})$ alors

$$(V(H)^{\text{rig}})' := V(H)^{\text{rig}}/I.\text{Lie } E(H)^{\text{rig}} \hookrightarrow (\text{Lie } E(H)^{\text{rig}})'$$

est une filtration localement facteur direct de codimension 1. D'où une filtration

$$(V(H)^{\text{rig}})' \subset \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}) \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$$

localement facteur direct de codimension 1. Cette filtration définit l'application des périodes

$$\mathfrak{X}^{\text{rig}} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}))^{\text{rig}}$$

Bien sûr, cette application s'étend sur tout l'espace de Rapoport-Zink en un morphisme étale D^{\times} -équivariant

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}))^{\text{rig}}$$

défini de la même façon que précédemment en remplaçant \mathfrak{X} par $\widehat{\mathcal{M}}$. L'espace des périodes $\mathbb{P}(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}))^{\text{rig}}$ est en quelque sorte l'espace \mathcal{M} quotienté par la relation d'isogénie, c'est-à-dire le quotient de la tour de Lubin-Tate par le groupe $\text{GL}_n(F)$.

I.2.2 Interprétation en termes du cristal \mathcal{O} -extension vectorielle universelle

Les résultats de l'appendice B permettent de construire directement l'application des périodes précédente en interprétant $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$ et $\text{Lie}(H)/I.\text{Lie}(H)$ comme évaluations d'un cristal algèbre de Lie de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle sur un site cristallin défini en termes de \mathcal{O} -puissances divisées.

Ils permettent par exemple de voir que l'application des périodes est "entière" sur le polydisque $\forall i, v(x_i) \geq p - 1$, alors que la théorie "classique" montre que ce n'est le cas que sur le polydisque $\forall i, v(x_i) \geq e(p - 1)$, où e est l'indice de ramification de $F|\mathbb{Q}_p$.

I.2.3 La donnée de descente sur l'espace des périodes

Le Verschiebung sur le cristal $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})$ induit un isomorphisme

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^{(\sigma)}$$

qui induit une donnée de descente de \check{F} à F compatible à l'action de D^{\times} sur l'espace des périodes

$$\mathbb{P}(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})^{(\sigma)}$$

L'application des périodes est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink sur \mathcal{M} et à cette donnée de descente. On remarquera que cette donnée de descente est effective et que la variété descendue sur F est la variété de Severi-Brauer associée à l'algèbre à division D .

I.2.4 Formules explicites pour l'application des périodes et applications

Nous donnons dans cette section des formules explicites pour l'application des périodes en utilisant la théorie des displays de [27]. Ces formules sont plus simples à manipuler que celles utilisées dans [17] basées elles sur la théorie des quasi-logarithmes. Bien que la théorie de [27] concerne des groupes p -divisibles, les résultats de l'appendice B permettent d'étendre celle-ci au cas des \mathcal{O} -modules formels, en remplaçant les vecteurs de Witt par les vecteurs de Witt ramifiés (l'auteur n'affirme pas avoir revérifié chaque démonstration de [27], mais il en a revérifié suffisamment pour se convaincre que cela marchait et il invite le lecteur à en faire de même).

I.2.4.1 Display universel sur \mathfrak{X} . Considérons le module de Cartier (pour la théorie de Cartier des \mathcal{O} -modules formels, cf. [9] ou [16]) sur $\check{\mathcal{O}}[[x_1, \dots, x_{n-1}]]$ ayant pour V -base e et comme équation structurelle

$$F.e = [x_1]e + V[x_2]e + \dots + V^{n-2}[x_{n-1}]e + V^{n-1}e$$

La loi de \mathcal{O} -module formel associée est la loi universelle considérée dans [17]. Ce module de Cartier provient d'un \mathcal{O} -Display (P, Q, F, V^{-1}) où

$$P = L \oplus T \quad T = \langle \epsilon_1 \rangle \quad L = \langle \epsilon_2, \dots, \epsilon_n \rangle \quad Q = L \oplus I_{W_{\mathcal{O}}}T$$

$I_{W_{\mathcal{O}}}$ désignant l'idéal d'augmentation des vecteurs de Witt, T est un relèvement de l'espace tangent et la matrice de $F \oplus V^{-1}$ dans la base $(\epsilon_i)_i$ est

$$\begin{pmatrix} [x_1] & [x_2] & \dots & [x_{n-1}] & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n \left(W_{\mathcal{O}}(\check{\mathcal{O}}[[x_1, \dots, x_{n-1}]]) \right)$$

Cette matrice s'écrit

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & [x_1] & \dots & [x_{n-1}] \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

comme dans la formule (86) page 174 de [27], où la matrice de droite est ici la matrice du cristal généralisé (cf. la section B.8 de l'appendice B) du \mathcal{O} -module formel \mathbb{H} que l'on déforme. La matrice de l'opérateur F s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} [x_1] & \pi[x_2] & \dots & \pi[x_{n-1}] & \pi \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \pi & & 0 & 0 \\ & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \pi & 0 \end{pmatrix}$$

I.2.4.2 Formule pour l'application des périodes. Notons

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & \pi x_2 & \dots & \pi x_{n-1} & \pi \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \pi & & 0 & 0 \\ & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \pi & 0 \end{pmatrix}$$

la réduite modulo l'idéal d'augmentation de $W_{\mathcal{O}}$ de la matrice précédente et $\forall i \in \mathbb{N}$, $A^{(\sigma^i)}$ la matrice obtenue en remplaçant $\forall k, x_k$ par $x_k^{\sigma^i}$. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \pi \\ 1 & & & 0 & 0 \\ & \pi & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \pi & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de l'opérateur F du cristal de \mathbb{H} . Alors, d'après la proposition 71 de [27]

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (1, 0, \dots, 0).AA^{(\sigma)} \dots A^{(\sigma^{k-1})}B^{-k} \quad (\text{I.3})$$

existe dans $\Gamma(\mathfrak{X}^{\text{rig}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}})^n$, où l'anneau $\Gamma(\mathfrak{X}^{\text{rig}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}})$ est muni de sa topologie de Frechet usuelle de la convergence uniforme sur toutes les boules fermées de rayon plus petit que 1. Notons (f_0, \dots, f_{n-1}) cette limite. Il s'agit également d'une limite au sens de la topologie (x_1, \dots, x_{n-1}) -adique. Plus précisément

$$(f_0, \dots, f_{n-1}) \equiv (1, 0 \dots 0).A \dots A^{(\sigma^{k-1})}B^{-k} \pmod{(x_1^{q^k}, \dots, x_{n-1}^{q^k})}$$

On peut également réécrire la limite précédente sous la forme

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \pi^{-l(n-1)} (1, 0 \dots 0) AA^{(\sigma)} \dots A^{(\sigma^{l n-1})}$$

Alors, toujours d'après la proposition 71 de [27],

$$\check{\pi}_1 = [f_0 : \dots : f_{n-1}]$$

et on peut réécrire

$$\check{\pi}_1 = \lim_{l \rightarrow +\infty} [1 : 0 : \dots : 0].AA^{(\sigma)} \dots A^{(\sigma^{l n-1})} \in \mathbb{P}^{n-1}(\Gamma(\mathfrak{X}^{\text{rig}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}))$$

qui exprime $\check{\pi}_1$ comme une limite d'orbite " σ -linéaire" dans \mathbb{P}^{n-1} sous l'action de $A \in \text{PGL}_n$.

Exemple I.2.2. Lorsque $n = 2$, si

$$\langle a_1, \dots, a_i \rangle = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_i}}}$$

alors $\check{\pi}_1 = [1 : f(x)]$, où

$$f = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\langle \frac{x^{q^{2k}}}{\pi}, x^{q^{2k-1}}, \frac{x^{q^{2k-2}}}{\pi}, \dots, x^q, \frac{x}{\pi} \right\rangle$$

Utilisons la formule limite (I.3) pour l'application des périodes. Remarquons qu'avec les notations précédentes $A = CB$, où

$$C = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \mathbf{I}_{n-1} & \end{array} \right)$$

et que donc, si l'on pose

$$(f_0^{(k)}, \dots, f_{n-1}^{(k)}) = (1, 0 \dots 0).AA^{(\sigma)} \dots A^{(\sigma^{k-1})}B^{-k}$$

alors on a la formule de récurrence

$$\begin{aligned} (f_0^{(k+1)}, \dots, f_{n-1}^{(k+1)}) &= (f_0^{(k)}, \dots, f_{n-1}^{(k)}) \cdot B^k A^{(\sigma^k)} B^{-k-1} \\ &= (f_0^{(k)}, \dots, f_{n-1}^{(k)}) \cdot B^b C^{(\sigma^k)} B^{-b} \end{aligned}$$

où $k = an + b$, $b \in \{0, \dots, n-1\}$. On en déduit les formules de récurrence suivantes:

$$\text{Si } b = 0 \quad \begin{cases} f_0^{(k+1)} &= f_0^{(k)} \\ \forall i > 0 \quad f_i^{(k+1)} &= f_i^{(k)} + x_i^{q^k} f_0^{(k)} \end{cases}$$

Si $b \neq 0$, en posant $x_0 = 1$ et $\forall i \in \mathbb{Z}$, $x_i = x_j$, où $j \equiv i \pmod{n}$, $j \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\begin{cases} f_b^{(k+1)} &= f_b^{(k)} \\ \forall i \neq b \quad f_i^{(k+1)} &= f_i^{(k)} + \pi^{\alpha(b,i)} x_{n-b+i}^{q^k} f_b^{(k)} \end{cases}$$

où

$$\alpha(b, i) = \begin{cases} -1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } 1 \leq i \leq b-1 \\ -1 & \text{si } b+1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

On peut alors retrouver les formules données dans [26] pour l'application des périodes.

I.3 Domaine fondamental de Lafaille/Gross-Hopkins

Définition I.3.1. Posons

$$\mathcal{D} = \{ \underline{x} \in \mathfrak{X}^{\text{rig}} \mid \forall 1 \leq i \leq n-1, \quad v(x_i) \geq 1 - \frac{i}{n} \}$$

un ouvert admissible quasi-compact dans la boule unité ouverte de dimension $n-1$.

Après extension des scalaires à $\check{F}(\pi^{1/n})$, l'espace \mathcal{D} devient isomorphe à la boule unité fermée de rayon 1 et de dimension $n-1$.

Remarque I.3.2. Le domaine \mathcal{D} admet la description intrinsèque (i.e., indépendante du choix de coordonnées) modulaire suivante:

$$\mathcal{D} = \{ \underline{x} \in \mathfrak{X}^{\text{rig}} \mid \text{le polygone de Newton de } H_{\underline{x}}[\pi] \text{ est } \geq \text{ à celui de la figure I.3} \}$$

En particulier, il est stable sous \mathcal{O}_D^\times , puisqu'il ne dépend pas de la déformation ρ mais seulement de la classe d'isomorphisme de $H_{\underline{x}}$.

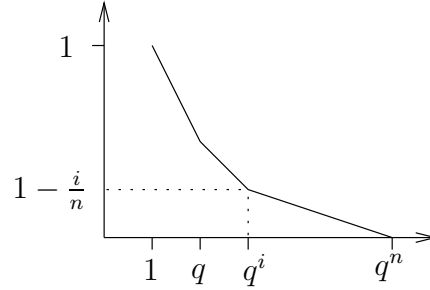


FIG. I.3: Le polygone de Newton bordant le domaine fondamental de Gross-Hopkins

Rappelons la proposition suivante, qui est un cas particulier du théorème I.4.1:

Proposition I.3.3 (Gross-Hopkins [17]). *Le morphisme étale $\check{\pi}_1$ restreint à \mathcal{D} induit un isomorphisme entre \mathcal{D} et l'ouvert suivant*

$$\check{\pi}_1(\mathcal{D}) = \{ [y_0 : \dots : y_n] \mid \forall i, v\left(\frac{y_i}{y_0}\right) \geq 1 - \frac{i}{n} \}$$

Pour toute extension valuée $L|F$ les fibres du morphisme $\check{\pi}_1$ sur les L -points correspondent aux \mathcal{O} -modules π -divisibles isogènes, via une isogénie déformant une puissance de π en fibre spéciale. Cependant il existe des points distincts de \mathcal{D} correspondant à des \mathcal{O} -modules π -divisibles isogènes, via des isogénies déformant une puissance de Π , ce que précise les définitions et propositions suivantes. En d'autres termes, on cherche à comprendre comment se recolle \mathcal{D} avec ses itérés sous les correspondances de Hecke sphériques.

Définition I.3.4. Pour $1 \leq i \leq n - 1$, posons

$$\partial_i \mathcal{D} = \{ \underline{x} \in \mathcal{D} \mid v(x_i) = 1 - \frac{i}{n} \}$$

un domaine de Laurent dans \mathcal{D} .

Remarquons que sur $\partial_i \mathcal{D}$ le polygone de Newton de $H_{\underline{x}}[\pi]$ possède un point de rupture en q^i , ce qui correspond à l'existence d'un cran de rang i dans la filtration de ramification du schéma en groupes $H_{\underline{x}}[\pi]$, ou encore à l'existence d'un sous-groupe canonique "généralisé".

Proposition I.3.5 (Faltings). *Soient $\underline{x} \in \mathcal{D}$, $\underline{x}' \in \mathfrak{X}^{an}$ et $f : H_{\underline{x}} \rightarrow H_{\underline{x}'}$, une isogénie qui n'est pas un isomorphisme et qui ne se factorise pas par la multiplication par π . Le point \underline{x}' appartient à \mathcal{D} ssi $\exists i$, $\underline{x} \in \partial_i \mathcal{D}$ et f est une isogénie de noyau le sous-groupe de rang i de $H_{\underline{x}}[\pi]$ formé des q^i -points de plus grande valuation (un sous-groupe canonique généralisé).*

Démonstration. Rappelons que, si $L|F$ est une extension valuée complète et $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$ est une isogénie entre deux \mathcal{O} -modules π -divisibles formels de dimension 1, alors

$$\forall x \in \widehat{H}_1(\mathcal{O}_L), \quad v(\varphi(x)) = \sum_{\alpha \in \ker \varphi} v(x - \alpha)$$

Supposons que $\underline{x} \in \partial_i \mathcal{D}$, et soit $f : H_{\underline{x}} \rightarrow H_{\underline{x}'}$, l'isogénie définie par le quotient des q^i -points de plus grande valuation. Notons $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ les pentes du polygone de Newton de $H_{\underline{x}}[\pi]$ (λ_k est la pente entre les abscisses q^{k-1} et q^k).

Les éléments de $H_{\underline{x}'}[\pi] \setminus \{0\}$ sont de deux types:

- de la forme $f(\alpha)$, où $\alpha \in H_{\underline{x}}[\pi] \setminus \ker f$. Alors, leurs valuations sont (puisque $\forall \beta \in \ker f, v(\beta) > v(\alpha)$) $v(f(\alpha)) = q^i v(\alpha)$, et varient donc dans $(q^i \lambda_{i+1}, \dots, q^i \lambda_n)$.
- de la forme $f(\alpha)$, où α est un zéro de la série formelle $[\pi]_{F_{\underline{x}}} - \beta$, avec $\beta \in \ker f \setminus \{0\}$, et $F_{\underline{x}}$ désigne une loi de groupe formel associée à $H_{\underline{x}}$. Le polygone de Newton de cette série formelle est obtenu en prenant l'enveloppe convexe de $(0, v(\beta))$ et celui de $[\pi]_{F_{\underline{x}}}$.

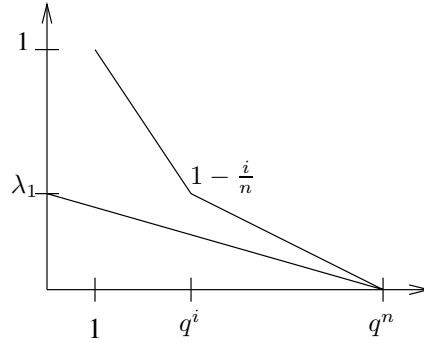


FIG. I.4: Le polygone de Newton de $[\pi]_{F_{\underline{x}}} - \beta$, $v(\beta) = \lambda_1$

Mais, $\sup_{\beta \in \ker f \setminus \{0\}} v(\beta) = \lambda_1$. Or, $\frac{\lambda_1}{q^n} < \lambda_n$. En effet,

$$v(x_1) \geq 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda_1 \leq \frac{1}{n(q-1)} \quad \text{et} \quad v(x_n) \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda_n \geq \frac{1}{n(q^n - q^{n-1})}$$

Donc, $\forall \beta \in \ker f \setminus \{0\}$, $\text{Newt}([\pi]_{F_{\underline{x}}} - \beta)$ est le segment joignant $(0, v(\beta))$ à $(q^n, 0)$ avec $v(\beta) \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_i\}$ (figure I.4). Les valuations des éléments de $[\pi]_{F_{\underline{x}}}^{-1}(\ker f \setminus \{0\})$ sont donc $(\frac{\lambda_1}{q^n}, \dots, \frac{\lambda_i}{q^n})$. Or, $\frac{\lambda_1}{q^n} < \lambda_i$, puisque $\lambda_1 \leq \frac{1}{n(q-1)}$, et l'égalité

$v(x_i) = 1 - \frac{i}{n}$ implique que $\lambda_i \geq \frac{1}{n(q^i - q^{i-1})}$. Donc,

$$\forall \beta \in \ker f \setminus \{0\}, \forall \alpha \in [\pi]_{F_{\underline{x}}}^{-1}(\ker f \setminus \{0\}), \quad v(\alpha) < v(\beta)$$

On en déduit que $v(f(\alpha)) = q^i v(\alpha)$, qui sont donc les $(\frac{\lambda_1}{q^{n-i}}, \dots, \frac{\lambda_i}{q^{n-i}})$, lorsque α varie. Or,

$$q^i \lambda_{i+1} \geq \dots \geq q^i \lambda_n > \frac{\lambda_1}{q^{n-i}} \geq \dots \geq \frac{\lambda_i}{q^{n-i}}$$

On en déduit aussitôt que $\underline{x}' \in \partial_{n-i}\mathcal{D}$.

Réciproquement, soit $f : H_{\underline{x}} \rightarrow H_{\underline{x}'}$ une isogénie, comme dans l'énoncé, telle que $\underline{x}, \underline{x}' \in \mathcal{D}$.

Commençons par remarquer que les analyses précédentes montrent que les valuations des éléments non nuls de $H_{\underline{x}}[\pi^k]$ sont

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > \frac{\lambda_1}{q^n} \geq \dots \geq \frac{\lambda_n}{q^n} > \dots > \frac{\lambda_1}{q^{n(k-1)}} \geq \dots \geq \frac{\lambda_n}{q^{n(k-1)}}$$

où l'on compte $(q^i - q^{i-1})q^{n(k-1)}$ éléments de valuations $\frac{\lambda_i}{q^{n(k-1)}}$ dans la liste précédente.

Soit $M = \ker f$. Notons

$$k = \sup\{j \mid M[\pi^j] \neq M[\pi^{j-1}]\}$$

Pour j entre 1 et k , notons

$$r_j = \dim_{\mathbb{F}_q} M[\pi^j]/M[\pi^{j-1}]$$

On a donc

$$n - 1 \geq r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_k > 0$$

Posons, pour simplifier les notations, $r = r_k$. Le \mathbb{F}_q -e.v. $\pi^{k-1}.M \subset H_{\underline{x}}[\pi]$ est de dimension r . Choisisant un drapeau complet de $\pi^{k-1}.M$ raffinant la filtration de ramification inférieure (celle donnée par la valuation), on en déduit que les valuations des éléments de $\pi^{k-1}.M \setminus \{0\}$ sont de la forme

$$\underbrace{\lambda_{a_1}}_{q-1 \text{ élts.}} \geq \dots \geq \underbrace{\lambda_{a_r}}_{(q^r - q^{r-1}) \text{ élts.}}$$

où $\forall j, a_j \geq j$. Soit $M' \subset H_{\underline{x}}[\pi^{k+1}]$, un sous- \mathcal{O} -module tel que $M = M'[\pi^k]$ et $\pi M' = M$. Les valuations des éléments de $M' \setminus M$ sont

$$\frac{\lambda_{a_1}}{q^{nk}} \geq \dots \geq \frac{\lambda_{a_r}}{q^{nk}}$$

et sont en particulier strictement inférieures à celles des éléments de M . On en déduit que $f(M') \subset H_{\underline{x}'}[\pi]$ est un \mathbb{F}_q -e.v. de dimension r dont les valuations des éléments non nuls sont

$$\underbrace{\frac{\lambda_{a_1}}{q^{nk-(r_1+\dots+r_k)}}}_{(q-1) \text{ élts.}} \geq \dots \geq \underbrace{\frac{\lambda_{a_r}}{q^{nk-(r_1+\dots+r_k)}}}_{(q^r-q^{r-1})\text{élts.}} \quad (\text{I.4})$$

Et que donc

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in f(M') \setminus \{0\}} v(\alpha) &= \frac{1}{q^{nk-(r_1+\dots+r_k)}} \left((q-1)\lambda_{a_1} + \dots + (q^r - q^{r-1})\lambda_{a_r} \right) \\ &\leq \frac{1}{q^{nk-(n-1)(k-1)-r}} \underbrace{\left((q-1)\lambda_1 + \dots + (q^r - q^{r-1})\lambda_r \right)}_{\leq \frac{r}{n} \text{ car } \underline{x} \in \mathcal{D}} \\ &\leq \frac{r}{nq^{n+(k-1)-r}} \end{aligned}$$

Mais pour un sous- \mathbb{F}_q -e.v. N de $H_{\underline{x}'}[\pi]$ de dimension r on a

$$\sum_{\alpha \in N \setminus \{0\}} v(\alpha) \geq \frac{r}{nq^{n-r}}$$

car, si $\underbrace{\lambda_{b_1}}_{(q-1) \text{ élts.}} \geq \dots \geq \underbrace{\lambda_{b_r}}_{(q^r-q^{r-1}) \text{ élts.}}$ sont les valuations des éléments de N ,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in N \setminus \{0\}} v(\alpha) &= (q-1)\lambda_{b_1} + \dots + (q^r - q^{r-1})\lambda_{b_r} \\ &\geq (q-1)\lambda_{n-r+1} + \dots + (q^r - q^{r-1})\lambda_n \\ &= \frac{1}{q^{n-r}} \left[(q^{n-r+1} - q^{n-r})\lambda_{n-r+1} + \dots + (q^n - q^{n-1})\lambda_n \right] \\ &\geq \frac{r}{nq^{n-r}} \text{ car } \underline{x}' \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

De tout cela, on déduit nécessairement que $k = 1$. Si de plus, il existe un indice j tel que $a_j > j$, alors les deux inégalités ci-dessus sont strictes. On en déduit donc que $\forall j, a_j = j$. \square

Remarque I.3.6. Dans [12] nous expliquons plus généralement comment construire des domaines fondamentaux, comme celui de Gross-Hopkins, à partir de domaines fondamentaux pour l'action du groupe des rotations engendré par le cycle $(1 \dots n)$ dans le simplexe de sommets $1, \dots, n$. L'énoncé précédant se démontre alors par un simple raisonnement combinatoire sur l'appartement d'un immeuble de Bruhat-Tits.

I.3.1 Lien entre le domaine fondamental et les points C.M

Proposition I.3.7. *Soit $E|F$ une extension de degré n . Il existe une unique classe d'isogénie de groupes p -divisibles $H_{\underline{x}}$, $\underline{x} \in \mathfrak{X}^{\text{rig}}$, ayant multiplication complexe par un ordre dans \mathcal{O}_E . Les représentants de cette classe d'isogénie dans \mathcal{D} sont exactement ceux ayant multiplication complexe par l'ordre maximal \mathcal{O}_E . De plus, les $\underline{x} \in \mathcal{D}$, tels que $H_{\underline{x}}$ ait multiplication complexe par \mathcal{O}_E , forment une \mathcal{O}_D^\times -orbite.*

- Si $E|F$ est non-ramifiée, cette orbite est $\pi\mathcal{O}_E^{n-1} \subset \mathcal{D}$. Le polygone de Newton associé a une seule pente.
- Si $E|F$ est ramifié de degré $e > 1$, alors cette orbite est contenue dans

$$\bigcap_{k=1}^{e-1} \partial_{k \frac{1}{e}} \mathcal{D}$$

Le polygone de Newton a alors comme pentes

$$\forall k \in \{0, \dots, e-1\}, \lambda_{kf+1} = \lambda_{kf+2} = \dots = \lambda_{(k+1)f-1} = \frac{1}{e(q^{(k+1)f} - q^{kf})}$$

cf. la figure I.5

Démonstration. Facile. □

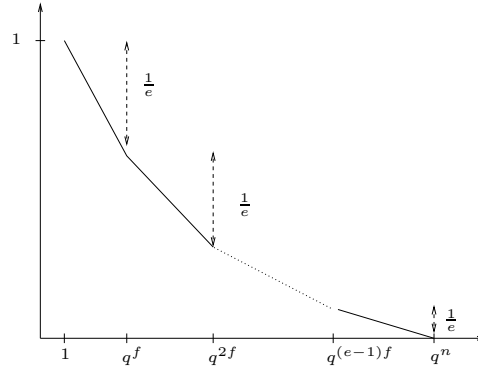


FIG. I.5: Le polygone de Newton d'un groupe C.M.

I.4 Généralisation d'un théorème de Gross-Hopkins

Dans cette section, nous généralisons le corollaire 23.15 de [17] en démontrant qu'en restriction à un ouvert plus gros que le domaine fondamental de Gross-Hopkins, l'application des périodes induit un isomorphisme sur son image. Il s'agit

en quelque sorte du “plus grand ouvert admissible” sur lequel l'application des périodes est un isomorphisme.

Soit

$$\mathcal{H} = \{ \underline{x} \in \mathfrak{X}^{\text{rig}} \mid \frac{\lambda_{1,\underline{x}}}{q^n} < \lambda_{n,\underline{x}} \}$$

où $\lambda_{1,\underline{x}} \geq \dots \geq \lambda_{n,\underline{x}}$ sont les pentes de $\text{Newt}(H_{\underline{x}}[\pi])$. Il s'agit du lieu des \underline{x} où les valuations des éléments de $H_{\underline{x}}[\pi^2] \setminus H_{\underline{x}}[\pi]$ sont strictement plus petites que celles de $H_{\underline{x}}[\pi]$.

Il admet la description suivante

$$\mathcal{H} = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathfrak{X}^{\text{rig}} \mid \forall 1 \leq i \leq n, \right. \\ \left. \forall 0 \leq j \leq n-1, \frac{1-v(x_i)}{q^n(q^i-1)} < \frac{v(x_j)}{q^n-q^j} \right\}$$

où l'on a posé $x_0 = \pi$ et $x_n = 1$. Cette description résultant de ce que

$$\lambda_{1,\underline{x}} = \sup \left\{ \frac{1-v(x_i)}{q^i-1} \mid 1 \leq i \leq n \right\} \text{ et } \lambda_{n,\underline{x}} = \inf \left\{ \frac{v(x_j)}{q^n-q^j} \mid 0 \leq j \leq n-1 \right\}$$

Théorème I.4.1. *Le morphisme $\check{\pi}_1 = [f_0 : \dots : f_{n-1}]$ induit un isomorphisme entre l'ouvert admissible \mathcal{H} et l'ouvert admissible de \mathbb{P}^{n-1} formé des $[w_0 : \dots : w_{n-1}] \in \mathbb{P}^{n-1}$ tels que*

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \forall 0 \leq j \leq n-1, \quad \frac{1-v(w'_i)}{q^n(q^i-1)} < \frac{v(w'_j)}{q^n-q^j}$$

où l'on a posé $\forall 1 \leq i \leq n-1,$

$$w'_i = \frac{w_i}{w_0}, \quad w'_0 = \pi \text{ et } w'_n = 1.$$

De plus, $\forall \underline{x} \in \mathcal{H}$, si $[w_0 : \dots : w_{n-1}] = \check{\pi}(\underline{x})$,

$$\text{Newt}(H_{\underline{x}}[\pi]) = \text{Convexe}((q^i, v(w'_i)))_{0 \leq i \leq n}$$

Démonstration. Commençons par un lemme:

Lemme I.4.2. *Soit K un corps valué complet non-archimédien et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme étale entre K -espaces analytiques de Berkovich. C'est un isomorphisme sur son image ssi $\forall L|K$ une extension de corps valués, le morphisme f induit une injection de $X(L)$ dans $Y(L)$.*

Démonstration. C'est une conséquence du fait qu'un morphisme étale entre espaces analytiques est un isomorphisme local ssi il induit un isomorphisme au niveau des

extensions de corps résiduels (les anneaux locaux des espaces de Berkovich sont Henséliens). \square

D'après le lemme précédent et la description des fibres de l'application des périodes, la proposition qui suit implique qu'en restriction à \mathcal{H} , le morphisme $\tilde{\pi}$ est un isomorphisme sur son image.

Proposition I.4.3. *Soit $L|F$ une extension valuée complète. Soient $\underline{x}, \underline{x}' \in \mathcal{H}(L)$ tels qu'il existe une isogénie $f : H_{\underline{x}} \rightarrow H_{\underline{x}'}$ déformant une puissance de π . Alors $\underline{x} = \underline{x}'$.*

Démonstration. Commençons par constater que $\forall \underline{x} \in \mathcal{H}(L)$, si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ sont les pentes de $\text{Newt}(H_{\underline{x}}[\pi])$, alors les valuations des points de $H_{\underline{x}}[\pi] \setminus \{0\}$, $H_{\underline{x}}[\pi^2] \setminus H_{\underline{x}}[\pi], \dots, H_{\underline{x}}[\pi^k] \setminus H_{\underline{x}}[\pi^{k-1}]$ sont "strictement ordonnées" et valent

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > \frac{\lambda_1}{q^n} \geq \dots \geq \frac{\lambda_n}{q^n} > \dots > \frac{\lambda_1}{q^{(k-1)n}} \geq \dots \geq \frac{\lambda_n}{q^{(k-1)n}}$$

Reprenons les notations de la seconde partie de la démonstration de la proposition I.3.5: on considère f, M, M', \dots on obtient alors, d'après la formule I.4, qu'il existe dans $H_{\underline{x}'}[\pi]$ un élément de valuation

$$\frac{\lambda_i}{q^{nk - (r_1 + \dots + r_k)}} \text{ pour un } i \in \{1, \dots, n\}$$

où rappelons que $1 \leq r_k \leq \dots \leq r_1 \leq n - 1$ et la hauteur de f est $r_1 + \dots + r_k$.

Il existe donc dans $H_{\underline{x}'}[\pi]$ un élément de valuation inférieure ou égale à

$$\frac{\lambda_1}{q^{nk - (r_1 + \dots + r_k)}}$$

Soit maintenant $\alpha \in H_{\underline{x}}[\pi^2]$ tel que $\pi\alpha \notin \ker f$, et donc $s(\alpha) \in H_{x's'}[\pi^2] \setminus H_{\underline{x}'}[\pi]$. Puisque $\text{ht}(f) \geq n$ on a $k \geq 2$. On vérifie que

$$v(f(\alpha)) \geq q^{r_1} \frac{\lambda_n}{q^n} + \sum_{j=2}^k (q^{r_1 + \dots + r_j} - q^{r_1 + \dots + r_{j-1}}) \frac{\lambda_n}{q^{n(j-1)}}$$

et donc puisque $\frac{\lambda_1}{q^n} < \lambda_n$

$$v(f(\alpha)) > \lambda_1 \left(\frac{q^{r_1}}{q^{2n}} + \sum_{j=2}^k (q^{r_1 + \dots + r_j} - q^{r_1 + \dots + r_{j-1}}) \frac{\lambda_n}{q^{nj}} \right)$$

Utilisant que $k \geq 2$ on vérifie que

$$\frac{q^{r_1}}{q^{2n}} + \sum_{j=2}^k (q^{r_1 + \dots + r_j} - q^{r_1 + \dots + r_{j-1}}) \frac{\lambda_n}{q^{nj}} \geq \frac{1}{q^{nk - (r_1 + \dots + r_k)}}$$

Il existe donc un élément de $H_{\underline{x}'}[\pi]$ dont la valuation est plus grande que celle d'un élément de $H_{\underline{x}}[\pi]$. Donc $\underline{x}' \notin \mathcal{H}$. \square

Vérifions maintenant l'égalité entre polygones de Newton: pour un $\underline{x} \in \mathcal{H}$, $\check{\pi}(\underline{x}) = [w_0 : \dots : w_{n-1}]$, on a

$$\text{Newt}(H_{\underline{x}}[\pi]) = \text{Convexe}((q^i, v(w'_i)))_{0 \leq i \leq n}$$

On utilise la formule (21.6) de [17], qui exprime l'application des périodes en termes de quasi-logarithmes. Soit $F_{\underline{x}}$ la loi de groupe formel universelle spécialisée en \underline{x} comme dans [17]. Soit $\log_{F_{\underline{x}}}$ son logarithme et $[\pi]_{F_{\underline{x}}}$ la série formelle multiplication par π sur cette loi de groupe formel. On a

$$\log_{F_{\underline{x}}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi^k} [\pi^k]_{F_{\underline{x}}}$$

De plus, étant donné que $\underline{x} \in \mathcal{H}$, le polygone de Newton de $[\pi]_{F_{\underline{x}}}$ est connu. Si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ sont les pentes de $[\pi]_{F_{\underline{x}}}$, ses pentes sont

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > \frac{\lambda_1}{q^n} \geq \dots \geq \frac{\lambda_n}{q^n} > \dots > \frac{\lambda_1}{q^{(k-1)n}} \geq \dots \geq \frac{\lambda_n}{q^{(k-1)n}}$$

Il commence en $(1, k)$ et se termine en $(q^n, 0)$. De la formule (21.6) de [17], on en déduit facilement le résultat.

On a donc démontré que $\check{\pi}$ induit un isomorphisme entre \mathcal{H} et un ouvert contenu dans celui annoncé dans l'énoncé. Reste à voir la surjectivité.

Soit donc $\underline{w} \in \mathbb{P}^{n-1}$ vérifiant les inégalités de l'énoncé. Il existe $\underline{x} \in \mathcal{D}$, le domaine fondamental de Gross-Hopkins, et $i, 0 \leq i \leq n-1$, tels que $\underline{w} = \Pi^i \cdot \check{\pi}_1(\underline{x})$ (cf. la démonstration du corollaire 23.21 de [17]). Soit $H_{\underline{x}} \rightarrow H_{\underline{x}'}$ une isogénie donnée par le quotient par un sous- $\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ -module C de rang i de $H_{\underline{x}}[\pi]$ tel que $\forall a \in C, \forall b \in H_{\underline{x}}[\pi] \setminus C, v(a) \geq v(b)$. On vérifie aisément que les pentes $\lambda'_1 \geq \dots \geq \lambda'_n$ de $\text{Newt}(H_{\underline{x}'}[\pi])$ vérifient $\frac{\lambda'_1}{q^n} \leq \lambda'_n$. Quitte à changer \underline{x}' par un transformé sous \mathcal{O}_D^\times (i.e., changer la déformation mais non le groupe p-divisible), on peut supposer que l'isogénie $H_{\underline{x}} \rightarrow H_{\underline{x}'}$ induit Π^i en fibre spéciale (i.e., comme endomorphisme de \mathbb{H}). Alors $\check{\pi}_1(\underline{x}') = \underline{w}$. Mais l'argument donné précédemment sur l'égalité entre polygones de Newton, lorsque $\frac{\lambda_1}{q^n} < \lambda_n$, reste valable lorsque $\frac{\lambda_1}{q^n} \leq \lambda_n$. Donc les pentes $\lambda'_1 \geq \dots \geq \lambda'_n$ sont égales à celles données par la formule de l'énoncé associées à \underline{w} . Donc $\frac{\lambda'_1}{q^n} < \lambda'_n$ et $\underline{x}' \in \mathcal{H}$. \square

Remarque I.4.4. L'ouvert \mathcal{H} est en fait un domaine fondamental "ouvert" pour les isogénies déformant une puissance de π , i.e., pour les opérateurs de Hecke non-ramifiés de degré 1 multiple de n , le domaine fondamental de Gross-Hopkins défini dans la section suivante étant, quant à lui, un domaine fondamental pour les isogénies quelconques, i.e., tous les opérateurs de Hecke non-ramifiés.

Plus généralement, dans l'article [12] nous étudions plus en détail l'application des périodes en dehors de cet ouvert admissible comme dans [26]. Nous y donnons une démonstration conceptuellement plus satisfaisante du théorème précédent basée sur de la combinatoire dans un appartement de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_n(F)$.

I.5 L'espace des paramètres de la décomposition cellulaire

Il s'agit de l'espace $D^\times \times \mathrm{GL}_n(F)$ -équivariant qui va indexer les cellules et qui est l'immeuble de Bruhat-Tits, noté \mathcal{I} , du groupe p -adique suivant sur F

$$(\mathrm{GL}_{n/F} \times D^\times) / \mathbb{G}_m$$

où \mathbb{G}_m agit diagonalement, via $z \mapsto z\mathrm{Id}$ dans $\mathrm{GL}_n(F)$ et $z \mapsto z^{-1}$ dans D^\times . Il admet la description concrète suivante:

$$\mathcal{I} = \{ (\Lambda, M) \} / \sim, \quad \text{où } (\Lambda, M) \sim (\pi\Lambda, \pi^{-1}M)$$

avec Λ un réseau dans F^n et M un réseau \mathcal{O}_D -stable dans D . On notera $[\Lambda, M]$, la classe de (Λ, M) . En d'autres termes,

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathrm{GL}_n \times D^\times) / \pi^\mathbb{Z}$$

avec

- $\mathcal{I}(\mathrm{GL}_n) = \{ \text{réseaux } \Lambda \text{ dans le module de Tate} \}$
- $\mathcal{I}(D^\times) = \{ \text{cristaux } M \text{ dans le module de Dieudonné rationnel } \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})[\frac{1}{p}] \}$
- L'action de π sur le module de Tate est la même que celle de π^{-1} sur le module de Dieudonné.

Définition I.5.1. Soient $a, a' \in \mathcal{I}$. On note

$a' \longrightarrow a$, s'il existe des représentants $a = [\Lambda, M]$ et $a' = [\Lambda', M]$, tels que

$$\Lambda' \subsetneq \Lambda \subsetneq \pi^{-1}\Lambda' \quad \text{et} \quad M' = \Pi^{-[\Lambda:\Lambda']}M$$

et on appelle $a' \longrightarrow a$ une arête orientée de \mathcal{I} .

Définition I.5.2. L'action de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ sur \mathcal{I} sera

$$\forall (g, d) \in \mathrm{GL}_n(F) \times D^\times, \quad (g, d) \cdot [\Lambda, M] = [g^{-1}\Lambda, d.M]$$

en particulier, l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ est une action à droite tandis que celle de D^\times est à gauche.

I.6 Les cellules rigides en niveau fini

I.6.1 Digression philosophique

Supposons que l'on veuille reconstruire $\mathrm{GL}_n(F)$ à partir des sommets de l'immeuble $\mathrm{GL}_n(F)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ et de la cellule à l'origine $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ (cette situation correspond à l'espace de Rapoport-Zink des déformations du groupe étale $(F/\mathcal{O}_F)^n$). Cela n'est pas possible! En effet, pour $g \in \mathrm{GL}_n(F)$, les groupes $g\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)g^{-1}$ et $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ sont isomorphes mais *non-canoniquement*, cela dépendant du choix de g , qui n'est pas canoniquement déterminé. Cependant, on peut reconstruire $\mathrm{GL}_n(F)$ à partir de l'immeuble de GL_n et des cellules $\mathrm{Iso}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda, \mathcal{O}_F^n)$, pour Λ un réseau de F^n , cellules qui sont des $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ -torseurs non canoniquement triviaux. Un élément $g \in \mathrm{GL}_n(F)$ induit un isomorphisme entre la cellule indexée par Λ et celle indexée par $g\Lambda$, d'où une action de $\mathrm{GL}_n(F)$ sur l'union disjointe de ces cellules. On a alors la décomposition cellulaire $\mathrm{GL}_n(F)$ -équivariante, indexée par les sommets de l'immeuble,

$$\coprod_{\Lambda} \mathrm{Iso}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda, \mathcal{O}_F^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(F)$$

Pour un sous-groupe compact ouvert K dans $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$, on peut reconstituer cellulairement une partie de l'espace $\mathrm{GL}_n(F)/K$. Plus précisément, soit $A \subset \mathrm{GL}_n(F)/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ un sous-ensemble fini tel que $\forall \Lambda \in A, K \subset \mathrm{GL}(\Lambda)$, i.e., K stabilise Λ . On peut, pour $\Lambda \in A$, définir une cellule en niveau K : $\mathrm{Iso}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda, \mathcal{O}_F^n)/K$, où K agit sur Λ . Alors,

$$\coprod_{\Lambda \in A} \mathrm{Iso}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda, \mathcal{O}_F^n)/K \xrightarrow{\sim} \{gK \in \mathrm{GL}_n(F)/K \mid g\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \in A\}$$

I.6.2 Structures de niveau

Définition I.6.1. Soit H le groupe p -divisible universel au-dessus de $\widehat{\mathcal{M}}$. Pour Λ , un réseau de F^n , et $K \subset \mathrm{GL}_n(F)$, un sous-groupe compact ouvert tel que K stabilise Λ , on pose

$$\mathcal{M}_{\Lambda, K} = \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}}(\pi^{-n}\underline{\Lambda}/\underline{\Lambda}, H[\pi^n]^{\mathrm{rig}})/K, \quad \text{pour } n \gg 0$$

comme faisceau étale quotient au-dessus de \mathcal{M} . Il est représenté par un espace rigide étale fini au-dessus de \mathcal{M} .

Soit U un espace rigide quasicompact. On notera (I, ρ, η) pour une section de $\mathcal{M}_{\Lambda, K}$ sur U . Cela signifie que l'on se donne un modèle entier \mathcal{U} de U

$$\mathcal{U}^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} U$$

puis une section

$$(I, \rho) \in \widehat{\mathcal{M}}(\mathcal{U})$$

qui définit un élément $s \in \mathcal{M}(U)$ et enfin une section η du produit fibré du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\Lambda, K} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & & \uparrow s \\ & & U \end{array}$$

que l'on notera parfois en

$$\eta : \Lambda \xrightarrow{\sim} T_p(I) [K]$$

une structure de niveau K sur la fibre générique de I .

Exemple I.6.2. L'espace noté \mathcal{M}_K dans [22], avec $K \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$, n'est rien d'autre que $\mathcal{M}_{\mathcal{O}^n, K}$. Bien sûr, $\mathcal{M}_{\Lambda, K} \simeq \mathcal{M}_{K'}$, pour un $K' \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$, mais **non-canoniquement**.

Lorsque Λ est fixé et K varie, on obtient ainsi une tour d'espaces rigides, dont les morphismes de transition sont étales finis, et qui est munie d'une action de $\mathrm{GL}(\Lambda) \times D^\times$.

I.6.3 Functorialité de Hecke des $\mathcal{M}_{\Lambda, K}$

I.6.3.1 Première functorialité. Il y a des isomorphismes canoniques

$$\forall g \in \mathrm{GL}_n(F), \forall \Lambda, \forall K \subset \mathrm{GL}(\Lambda), \quad g : \mathcal{M}_{\Lambda, K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{g^{-1}\Lambda, g^{-1}Kg}$$

définis de façon modulaire par

$$(I, \rho, \eta) \longmapsto (I, \rho, \eta \circ g)$$

I.6.3.2 Seconde functorialité

Cas général: Il s'agit d'isomorphismes

$$\forall \Lambda, \Lambda', \forall K \subset \mathrm{GL}(\Lambda) \cap \mathrm{GL}(\Lambda'), \quad \mathcal{M}_{\Lambda, K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\Lambda', K}$$

définis de la façon suivante. Soit U un espace rigide quasicompact et $(I, \rho, \eta) \in \mathcal{M}_{\Lambda, K}(U)$, où $U = \mathcal{U}^{\mathrm{rig}}$ et $(I, \rho) \in \widehat{\mathcal{M}}(U)$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\Lambda \subset \pi^N \Lambda' \subset \pi^{-n} \Lambda$$

La structure de niveau η induit

$$\pi^{-n}\Lambda/\Lambda \xrightarrow{\sim} I[\pi^n]^{\mathrm{rig}} \bmod K$$

(on entend par là une section du faisceau étale quotient

$$\mathrm{Isom}_{\mathcal{O}}(\pi^{-n}\underline{\Lambda}/\underline{\Lambda}, I[\pi^n]^{\mathrm{rig}}/K).$$

Le sous- \mathcal{O} -module $\pi^N \Lambda' / \Lambda \subset \pi^{-n} \Lambda / \Lambda$ est stable sous l'action de K . Il existe donc un unique sous-espace rigide en groupes étale fini sur U ,

$$J \subset I[\pi^n]^{\text{rig}}$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \pi^N \Lambda' / \Lambda & \xrightarrow{\sim} & J \quad \text{mod } K \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi^{-n} \Lambda / \Lambda & \xrightarrow{\sim} & I[\pi^n]^{\text{rig}} \quad \text{mod } K \end{array}$$

D'après la section 5.4 de [23] il existe un éclatement formel admissible $\tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$, donné par certains idéaux de Fittings, induisant donc un isomorphisme $\tilde{\mathcal{U}}^{\text{rig}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}^{\text{rig}}$, tel que si $\tilde{\mathcal{J}}$ désigne l'adhérence schématique de J dans $I[\pi^n] \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}}$, alors $\tilde{\mathcal{J}}$ est un sous-groupe fini localement libre de $I[\pi^n] \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}}$. Par adhérence schématique on entend la chose suivante: si $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{I[\pi^n]^{\text{rig}}}$ est l'idéal cohérent définissant J comme fermé dans $I[\pi^n]^{\text{rig}}$ et si

$$sp : I[\pi^n]^{\text{rig}} \rightarrow I[\pi^n] \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}}$$

est le morphisme de spécialisation associé au modèle formel $I[\pi^n] \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}}$, alors

$$\tilde{\mathcal{J}} = \text{Spf} \left(\mathcal{O}_{I[\pi^n] \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}}} / (sp^* \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{I[\pi^n] \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}}}) \right)$$

Alors, le morphisme $\mathcal{M}_{\Lambda, K} \rightarrow \mathcal{M}_{\Lambda', K}$ est défini par

$$(I, \rho, \eta) \mapsto (I \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}} / \tilde{\mathcal{J}}, q \circ \tilde{\rho} \circ \pi^{-N}, \eta')$$

où $\tilde{\rho}$ est le changement de base de ρ sur \mathcal{U} à $\tilde{\mathcal{U}}$,

$$q : I \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow I \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}} / \tilde{\mathcal{J}}$$

et η' fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \Lambda' & \xrightarrow{\eta'} & T_p(I/J) \quad \text{mod } K \\ \downarrow \pi^{-N} & & \downarrow \\ \Lambda & \xrightarrow{\eta} & T_p(I) \quad \text{mod } K \end{array}$$

Exemple I.6.3. Si K et $g^{-1}Kg$ sont contenus dans $\text{GL}_n(\mathcal{O})$, le morphisme classique (section 5.43 de [22], section 2.3.9.3, page 39 de [13]) définissant les correspondances de Hecke

$$\mathcal{M}_K \xrightarrow{g} \mathcal{M}_{g^{-1}Kg}$$

n'est rien d'autre que le composé des deux functorialités précédentes

$$\mathcal{M}_K = \mathcal{M}_{\Lambda_0, K} \xrightarrow{g} \mathcal{M}_{g^{-1}\Lambda_0, g^{-1}Kg} \xrightarrow{\text{2}^{\text{ème}} \text{ functorialité}} \mathcal{M}_{\Lambda_0, g^{-1}Kg} = \mathcal{M}_{g^{-1}Kg}$$

où on a posé $\Lambda_0 = \mathcal{O}^n$.

Cas des sous-groupes de congruence principaux: Dans le paragraphe précédent, faisons de plus l'hypothèse que:

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{Z}, \quad K \subset \text{Id} + \pi^n \text{End}(\Lambda) \text{ et } \Lambda \subset \pi^N \Lambda' \subset \pi^{-n} \Lambda$$

Alors, dans la définition du morphisme

$$\mathcal{M}_{\Lambda, K} \longrightarrow \mathcal{M}_{\Lambda', K}$$

il n'est pas nécessaire d'effectuer l'éclatement $\tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{U}$. En effet, $\mathcal{M}_{\text{Id} + \pi^n \text{End}(\Lambda)}$ possède un modèle entier défini en utilisant des structures de niveau de Drinfeld (cf. la section II.2 de [14]). On conclut alors, grâce au lemme-clef suivant:

Lemme I.6.4 (lemme II.2.4 de [14]). *Soit H un \mathcal{O} -module formel de dimension 1 et hauteur h sur un \mathcal{O} -schéma S muni d'une structure de niveau de Drinfeld*

$$\eta : (\pi^{-n} \mathcal{O} / \mathcal{O})^h \longrightarrow H[\pi^n](S)$$

Soit $M \subset (\pi^{-n} \mathcal{O} / \mathcal{O})^h$ un sous- \mathcal{O} -module. Il existe alors un unique sous-groupe fini localement libre $G \subset H[\pi^n]$, tel que $\forall m \in M, \eta(m) \in G(S)$ et les $(\eta(m))_{m \in M}$ forment un ensemble plein de sections de G , au sens de Katz-Mazur.

Remarque I.6.5. Le cas des sous-groupes de congruence principaux est suffisant pour définir le morphisme $\mathcal{M}_{\Lambda, K} \longrightarrow \mathcal{M}_{\Lambda', K}$ en général. En effet, $\forall K \subset \text{GL}(\Lambda) \cap \text{GL}(\Lambda'), \exists K_1 \triangleleft K$, vérifiant les hypothèses de ce paragraphe. On peut donc définir le morphisme $\mathcal{M}_{\Lambda, K_1} \longrightarrow \mathcal{M}_{\Lambda', K_1}$ comme expliqué ci-dessus, en utilisant les structures de niveau de Drinfeld, vérifier que ce morphisme est K -équivariant, puis définir $\mathcal{M}_{\Lambda, K} \longrightarrow \mathcal{M}_{\Lambda', K}$ comme

$$\mathcal{M}_{\Lambda, K_1} / K \longrightarrow \mathcal{M}_{\Lambda', K_1} / K$$

I.6.4 Les cellules

Définition I.6.6. Soit $[\Lambda, M] \in \mathcal{I}$ et $K \subset \text{GL}_n(F)$ un sous-groupe compact ouvert, tel que K stabilise Λ . On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K} &= \text{domaine fondamental de Gross-Hopkins dans la fibre générique} \\ &\quad \text{de l'espace des déformations } (H, \rho) \text{ de } \mathbb{H} \text{ par des quasi-isogénies} \\ &\quad \text{de hauteur } [M : \mathcal{O}_D] + \text{ une structure de niveau } K, \\ &\quad \eta : \Lambda \xrightarrow{\sim} T_p H [K] \end{aligned}$$

Plus précisément, soit $k = [M : \mathcal{O}_D]$ et $\mathcal{D}^{[k]}$ l'ouvert admissible quasicompact dans $\mathcal{M}^{[k]}$, où le polygone de Newton de la multiplication par π sur la loi de groupe formel universelle est au-dessus de celui de la figure I.3. Alors $\mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$ est défini

par le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K} & \hookrightarrow & \mathcal{M}_{\Lambda, K}^{[k]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}^{[k]} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^{[k]} \end{array}$$

Remarque I.6.7. Si $K \subset \mathrm{GL}(\Lambda)$ et $g \in \mathrm{GL}_n(F)$ sont tels que $g^{-1}\Lambda = \mathcal{O}_F^n$, il y a alors un isomorphisme

$$g \times \Pi^{[M; \mathcal{O}_D]} : \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{g^{-1}Kg} \subset \mathcal{M}_{g^{-1}Kg}^{[0]}$$

où $\mathcal{D}_{g^{-1}Kg}$ est le revêtement étale fini au-dessus de \mathcal{D} , défini en mettant des structures de niveau $g^{-1}Kg$. Cependant, cet isomorphisme **n'est pas canonique** puisqu'il dépend du choix de g .

Le premier type de functorialité définie dans la section I.6.3.1 induit une action naturelle de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ sur les cellules, de façon compatible à son action sur \mathcal{I} :

$$\begin{aligned} \forall (g, d) \in \mathrm{GL}_n(F) \times D^\times, \\ g \times d : \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{[g^{-1}\Lambda, d.M], g^{-1}Kg} = \mathcal{D}_{(g, d).[\Lambda, M], g^{-1}Kg} \end{aligned}$$

I.6.5 Bord des cellules

Définition I.6.8. Soient $[\Lambda, M] \in \mathcal{I}$ et K tel que $K \subset \mathrm{Id} + \pi \mathrm{End}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda)$. On définit, pour $1 \leq i \leq n-1$, les ouverts admissibles quasicompacts $\partial_i \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$ de $\mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$ par le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \partial_i \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K} & \hookrightarrow & \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial_i \mathcal{D}_{[\Lambda, M], \mathrm{GL}(\Lambda)} & \hookrightarrow & \mathcal{D}_{[\Lambda, M], \mathrm{GL}(\Lambda)} \end{array}$$

où $\mathcal{D}_{[\Lambda, M], \mathrm{GL}(\Lambda)}$ est la cellule sans structure de niveau, notée $\mathcal{D}^{[M; \mathcal{O}_D]}$ dans la définition I.6.6, et l'ouvert ∂_i est défini de façon modulaire en termes du polygone du Newton de la série formelle multiplication par π sur une loi de groupe formelle universelle comme dans la définition I.3.4.

Lemme I.6.9. Soient \mathfrak{Z} un schéma formel admissible sur $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ et H un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension 1 et hauteur n . Supposons H muni d'une structure de niveau de Drinfeld

$$\eta : \pi^{-1}\Lambda/\Lambda \longrightarrow H[\pi]$$

Soit i un entier tel que $1 \leq i \leq n - 1$. Supposons que $\forall x \in \mathfrak{Z}^{an}$, le polygone de Newton de la multiplication par π sur une loi de groupe formel associée à H_x possède un point de rupture en q^i . La donnée η induit un scindage de l'espace rigide

$$\mathfrak{Z}^{\text{rig}} = \coprod_{\substack{E \subset \pi^{-1}\Lambda/\Lambda \\ \dim_{\mathbb{F}_q} E = i}} (\mathfrak{Z}^{\text{rig}})_E$$

où $(\mathfrak{Z}^{\text{rig}})_E = \{x \in \mathfrak{Z}^{\text{rig}} \mid \eta_x(E) \subset H_x[\pi] \text{ est un sous-groupe canonique de rang } i\}$.

Démonstration. Soit \mathfrak{Z}^{an} l'espace de Berkovich fibre générique associé à \mathfrak{Z} . On a

$$(\mathfrak{Z}^{an})_E = \{x \in \mathfrak{Z}^{an} \mid \forall w \in E, \forall w' \in \pi^{-1}\Lambda/\Lambda \setminus E, v(\eta_x(x)) > v(\eta_x(w'))\}$$

qui définit bien un ouvert de \mathfrak{Z}^{an} , car, localement sur \mathfrak{Z} , si l'on fixe une loi de groupe formel $\text{Spf}(\mathcal{O}_3[[T]]) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}$, alors $\forall w \in \pi^{-1}\Lambda/\Lambda$, $\eta(w) \in \mathcal{O}_3$ et la valuation de $\eta(w)$ est donnée par la valuation de cet élément de \mathcal{O}_3 . \square

Remarque I.6.10. Le lemme précédent est une version rigide de "l'astuce de Boyer" (cf. [14]).

Proposition I.6.11. *Les bords des cellules se scindent de la façon suivante*

$$\partial_i \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K} = \coprod_{\substack{E \subset \pi^{-1}\Lambda/\Lambda \\ \text{rg } E = i}} \partial_{i, E} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$$

où E est un sous- \mathbb{F}_q -e.v. de $\pi^{-1}\Lambda/\Lambda$ de rang i et $\partial_{i, E} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$ est l'ouvert admissible de $\partial_i \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$ où $\eta(E) \subset H[\pi]_\eta$ est l'ensemble des q^i -points de plus grande valuation (un sous-groupe canonique généralisé).

Démonstration. Cela résulte de ce que sur $\partial_i \mathcal{D}$ le polygone de Newton des points de π -torsion possède un point de rupture en q^i et du lemme précédent. \square

Remarque I.6.12. Bien sûr, cette décomposition en niveau K est obtenue par image réciproque de celle en niveau $\text{Id} + \pi \text{End}(\Lambda)$.

Remarque I.6.13. On vérifie que tout cela ne dépend que de $[\Lambda, M]$, i.e., il y a des isomorphismes canoniques $\partial_{i, E} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K} \xrightarrow{\sim} \partial_{i, \pi E} \mathcal{D}_{[\pi\Lambda, \pi^{-1}M], K}$.

L'action de $\text{GL}_n(F) \times D^\times$ conserve le bord des cellules en permutant les composantes indexées par les sous-espaces E : $\forall g \in \text{GL}_n(F)$ $g : \partial_{i, E} \rightarrow \partial_{i, g^{-1}.E}$.

I.6.6 Donnée de recollement

Soit $p : \pi^{-1}\Lambda \rightarrow \pi^{-1}\Lambda/\Lambda$. Supposons de plus que $K \subset \text{Id} + \pi \text{End}(p^{-1}(E))$. Le quotient par le sous-groupe canonique généralisé $\eta(E)$ induit alors une immersion ouverte

$$\partial_{i, E} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K} \hookrightarrow \mathcal{D}_{[p^{-1}(E), \Pi^{-i}M], K}$$

où le Π^{-i} provient de ce que le quotient par le sous-groupe canonique est une déformation de Frob_q^i . Ce morphisme est induit par le second type de functorialité de la section I.6.3.2, restreint à $\partial_{i, E}$.

I.6.7 Réécriture en termes des arrêtes orientées de l'immeuble

Soit $a \longrightarrow a'$ une arrête orientée de \mathcal{I} avec $a = [\Lambda, M]$ et $a' = [\Lambda', M']$ tels que

$$\Lambda \subsetneq \Lambda' \subsetneq \pi^{-1}\Lambda \text{ et } M' = \Pi^{[\Lambda:\Lambda']}M$$

Définition I.6.14. Supposons que $K \subset \text{Id} + \pi\text{End}(\Lambda) \cap \text{Id} + \pi\text{End}(\Lambda')$. On pose

$$\mathcal{D}_{a \rightarrow a', K} = \partial_{i, \Lambda'/\Lambda} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$$

où $i = \dim_{\mathbb{F}_q} \Lambda'/\Lambda$

Il y a alors deux immersions ouvertes

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D}_{a \rightarrow a', K} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{D}_{a, K} & & \mathcal{D}_{a', K} \end{array}$$

où l'application de gauche est l'inclusion canonique et celle de droite est celle définie en I.6.6.

Remarque I.6.15. On peut montrer que la seconde application induit un isomorphisme

$$\mathcal{D}_{a \rightarrow a', K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{a' \rightarrow a, K}$$

(cf. la section sur les modèles entiers, où tout cela est démontré plus généralement sur les modèles entiers).

Bien sûr, toutes ces applications sont équivariantes sous l'action de $\text{GL}_n(F) \times D^\times$, au sens où il y a des isomorphismes se composant naturellement

$$\forall (g, d) \in \text{GL}_n(F) \times D^\times, \quad \mathcal{D}_{a \rightarrow a', K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{(g, d).a \rightarrow (g, d).a', g^{-1}Kg}$$

et compatibles aux deux immersions ouvertes ci-dessus.

I.7 Décomposition cellulaire des espaces rigides en niveau fini

Soit $A \subset \mathcal{I}$ un sous ensemble d'image finie dans $\mathcal{I}(\text{PGL}_n) = \mathcal{I}(\text{GL}_n)/\pi^\mathbb{Z}$ et d'image $\mathcal{I}(D^\times)/\pi^\mathbb{Z} (\simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sur la seconde composante. Soit $K \subset \text{GL}_n(F)$ un sous-groupe compact ouvert, tel que $\forall [\Lambda, M] \in A$, le groupe K stabilise Λ et $K \subset \text{Id} + \pi\text{End}(\Lambda)$ (l'image de A dans $\mathcal{I}(\text{PGL}_n)$ étant finie, il existe toujours un tel K).

Considérons le diagramme d'espaces rigides

$$X_{1, A, K} = \coprod_{\substack{a, a' \in A \\ a \rightarrow a'}} \mathcal{D}_{a \rightarrow a', K} \xrightarrow{\quad \quad} \coprod_{a \in A} \mathcal{D}_{a, K} = X_{0, A, K}$$

défini par les deux applications de face de I.6.7. Celui-ci est $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ équivariant pour des A et K variant (le diagramme associé à A et K est envoyé naturellement sur celui associé à $(g, d).A$ et $g^{-1}Kg$).

Rappelons que l'on note $\mathcal{M}_K := \mathcal{M}_{\mathcal{O}^n, K}$ l'espace de Rapoport-Zink usuel. L'application naturelle définie par le second type de functorialité $\mathcal{M}_{\Lambda, K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_K$ induit un morphisme $X_{0, A, K} \longrightarrow \mathcal{M}_K$.

Proposition I.7.1. *L'image de $X_{0, A, K}$ dans \mathcal{M}_K est un ouvert quasicompact $U_{A, K}$ et la suivante est exacte dans la catégorie des espaces rigides*

$$X_{1, A, K} \rightrightarrows X_{0, A, K} \longrightarrow U_{A, K}$$

Ces suites sont $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariantes lorsque A et K varient. De plus, lorsque A grandit et K est de plus en plus petit, les $U_{A, K}$ recouvrent toute la tour de Lubin-Tate, au sens où les deux ind-pro systèmes d'espaces rigides $(U_{A, K})_{A, K}$ et celui des ouverts de \mathcal{M}_K d'image quasicompacte dans $\mathcal{M}_K/\pi^\mathbb{Z}$, pour K variant, sont équivalents.

Démonstration. Les applications étant toutes des unions disjointes d'immersions ouvertes d'espaces quasi-compacts, il suffit de vérifier ces assertions au niveau des points, ce qui résulte du corollaire 23.26 de [17] et de la proposition I.3.5. \square

Exemple I.7.2. Si A est l'image réciproque d'un sous-ensemble fini B de $\mathcal{I}(\mathrm{PGL}_n)$, alors l'ensemble B définit un sous-ensemble de correspondances de Hecke sphériques de $\mathrm{GL}_n(F)$ et $U_{A, K}$ est l'image réciproque dans \mathcal{M}_K de l'itération par ces correspondances sphériques de l'ouvert $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}^{[0]}$, un ouvert de \mathcal{M} .

Remarque I.7.3. Bien sûr, on peut écrire les relations d'incidence supérieures en termes de facettes orientées $a_1 \rightarrow \cdots \rightarrow a_d$ de l'immeuble et de cellules $\mathcal{D}_{a_1 \rightarrow \cdots \rightarrow a_d, K}$.

Application Cohomologique

La décomposition cellulaire précédente fournit des résolutions équivariantes de la cohomologie étale à support compact de la tour de Lubin-Tate. Ces résolutions sont sommes directes d'induites à support compact de la cohomologie des tours $(\mathcal{D}_{\sigma, K})_K$, où σ varie parmi les simplexes orientés de \mathcal{I} modulo l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$.

Plus précisément, il y a une suite spectrale

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} \mathrm{c}\text{-Ind}_{\mathrm{Stab}(\sigma)}^{\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times} \varinjlim_K H^q(\mathcal{D}_{\sigma, K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda) \Rightarrow \varinjlim_K H_c^{p+q}(\mathcal{M}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda)$$

où Σ_p désigne un ensemble de représentants des simplexes orientés de dimension p , modulo l'action de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$, et $\mathrm{Stab}(\sigma)$ est un sous-groupe compact, modulo le centre de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$. Il y a bien sûr des résolutions associées du complexe de cohomologie équivariant.

I.8 Modèles entiers des cellules

I.8.1 Niveau fini

I.8.1.1 Préliminaires. Rappelons qu'un $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel admissible est un $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel quasi-séparé de type fini sans π -torsion.

Proposition I.8.1. *Soient \mathfrak{X} un $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel admissible normal (cf. appendice A.2) et G un groupe p -divisible sur \mathfrak{X} muni d'une action de \mathcal{O} . Soient Λ un \mathcal{O} -module libre de rang n , $X_K \longrightarrow \mathfrak{X}^{\text{rig}}$ l'espace classifiant des structures de niveau K*

$$\eta : \Lambda \xrightarrow{\sim} T_p(G^{\text{rig}})[K]$$

et \mathfrak{X}_K la normalisation de \mathfrak{X} dans X_K (cf. appendice A.3). Alors, \mathfrak{X}_K représente le foncteur F défini sur la catégorie des $\check{\mathcal{O}}$ -schémas formels admissibles normaux au-dessus de \mathfrak{X} , défini par $\forall \mathfrak{Z} \xrightarrow{f} \mathfrak{X}$

$$F(\mathfrak{Z}) = \{ \text{structures de niveau } K \text{ rel. à } \Lambda \text{ sur } (f^*G)^{\text{rig}} / \mathfrak{Z}^{\text{rig}} \}$$

Démonstration. C'est une conséquence de la propriété universelle du normalisé, cf. appendice A.3. \square

Remarque I.8.2. Si G est un groupe de Lubin-Tate et $K \subset \text{Id} + \pi^k \text{End}(\Lambda)$, alors sur \mathfrak{X}_K le groupe G est muni d'une structure de niveau de Drinfeld, de niveau k . C'est une conséquence du fait que l'espace classifiant des structures de Drinfeld de niveau k est fini au-dessus de \mathfrak{X} à même fibre générique que \mathfrak{X}_K (en fibre générique toutes les définitions des structures de niveau coïncident) et est donc en-dessous du normalisé.

Proposition I.8.3. *Soit \mathcal{P} un polygone de Newton, i.e., la donnée pour i entre 1 et $n-1$ de nombres rationnels α_i , $0 < \alpha_i < 1$, tels que le polygone commençant en $(0, 1)$, passant par les (q^i, α_i) et finissant en $(q^n, 0)$ soit convexe. Le foncteur défini sur la catégorie des $\check{\mathcal{O}}$ -schémas formels admissibles normaux, qui à \mathfrak{Z} associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (H, ρ) , où H est un \mathcal{O} -module formel et*

$$\rho : \mathbb{H} \times_{\mathbb{F}_q} \mathfrak{Z} \text{ mod } p \longrightarrow H \text{ mod } p$$

une quasi-isogénie de degré 0, tels que

$$\forall z \in \mathfrak{Z}^{\text{rig}}, \quad \text{Newt}(H[\pi]_z) \geq \mathcal{P}$$

est représentable.

Démonstration. Soit $\mathfrak{X} \simeq \text{Spf}(\check{\mathcal{O}}[[x_1, \dots, x_{n-1}]])$ l'espace de Lubin-Tate muni des coordonnées comme précédemment. Pour $\underline{x} \in \mathfrak{X}^{\text{rig}}$

$$\text{Newt}(H[\pi]_{\underline{x}}) \geq \mathcal{P} \iff \forall i, v(x_i) \geq \alpha_i$$

Si $\alpha_i = \frac{a_i}{b_i}$, où $a_i, b_i \in \mathbb{N}$, soit

$$\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf} \left(\check{\mathcal{O}} \langle x_1, \dots, x_{n-1}, T_1, \dots, T_{n-1} \rangle / (x_i^{b_i} - \pi^{a_i} T_i)_i \right)$$

Alors $\mathfrak{Y}^{\mathrm{normalisé}}$ convient. En effet, si \mathfrak{Z} est normal et (H, ρ) est défini sur \mathfrak{Z} , $\exists! f : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$ tel que

$$(H, \rho) = f^*(H^{\mathrm{univ}}, \rho^{\mathrm{univ}})$$

Si de plus $\forall z \in \mathfrak{Z}^{\mathrm{rig}}, \mathrm{Newt}(H[\pi]_z) \geq \mathcal{P}$, alors

$$\begin{aligned} \forall i \forall z \in \mathfrak{Z}^{\mathrm{rig}} \quad \frac{|f^* x_i^{b_i}(z)|}{\pi^{a_i}} &\leq 1 \\ \implies \frac{f^* x_i^{b_i}}{\pi^{a_i}} &\in \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \end{aligned}$$

puisque \mathfrak{Z} est normal (cf. appendice A.2). Et donc $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$ se factorise en

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{Y}^{\mathrm{normalisé}} \\ & \nearrow \exists! & \downarrow \\ \mathfrak{Z} & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathfrak{X} \end{array}$$

où la flèche en pointillés résulte de ce que \mathfrak{Z} est normal. \square

I.8.1.2 Modèles entiers des cellules $\mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$

Proposition I.8.4. *Soit (Λ, M) dans l'immeuble de $\mathrm{GL}_n \times D^\times$. Soit $K \subset \mathrm{GL}(\Lambda)$ un sous-groupe compact ouvert. Le foncteur, qui à un $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel admissible normal \mathfrak{Z} , associe les classes d'isomorphisme de triplets (H, ρ, η) , où H est un \mathcal{O} -module formel sur \mathfrak{Z} , ρ une rigidification de degré $[M : \mathcal{O}_D]$ et η une structure de niveau K relativement à Λ sur $T_p(H^{\mathrm{rig}})$ tels que*

$$\forall z \in \mathfrak{Z}^{\mathrm{rig}}, \mathrm{Newt}(H[\pi]_z) \geq \text{le polygone de Gross-Hopkins}$$

est représentable. De plus, il ne dépend canoniquement que de la classe $[\Lambda, M]$ dans \mathcal{I} .

Démonstration. C'est une conséquence des deux propositions précédentes, puisque quitte à translater par une puissance de Π on peut supposer que la rigidification est de degré 0.

Quant à la dernière assertion, il suffit de constater que l'application naturelle $(H, \rho, \eta) \mapsto (H/H[\pi], \rho \circ h, h_* \circ \eta)$, où $h : H \rightarrow H/H[\pi]$, induit un isomorphisme canonique entre le foncteur associé à (Λ, M) et celui associé à $(\pi^{-1}\Lambda, \pi M)$. \square

Définition I.8.5. On note $\mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$ le $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel admissible normal défini dans la proposition précédente.

Il y a des isomorphismes naturels

$$\forall (g, d) \in \mathrm{GL}_n(F) \times D^\times, \quad g \times d : \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{[g^{-1}\Lambda, d.M], g^{-1}Kg}$$

via

$$(H, \rho, \eta) \longmapsto (H, \rho \circ d^{-1}, \eta \circ g)$$

Remarque I.8.6. On peut calculer explicitement $\mathbb{D}_{[\Lambda, M], \mathrm{GL}(\Lambda)}$. Il s'agit de

$$\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}}\langle x_1, \dots, x_{n-1}, T_1, \dots, T_{n-1} \rangle / (x_i^n - \pi^{n-i}T_i))^{\mathrm{normalisé}}$$

L'algèbre le définissant est engendrée par l'algèbre

$$\check{\mathcal{O}}\langle x_1, \dots, x_{n-1}, T_1, \dots, T_{n-1} \rangle / (x_i^n - \pi^{n-i}T_i),$$

à laquelle on a rajouté les

$$\frac{x_i^{\lceil \frac{n}{n-i} \rceil}}{\pi}, \frac{x_i^{\lceil \frac{2n}{n-i} \rceil}}{\pi^2}, \dots, \frac{x_i^{\frac{n}{n-i}}}{\pi^{\frac{n-i}{n-i}}}$$

Il est de la forme \overline{T}_λ (avec les notations de [10]), où \overline{T} est la variété torique formelle (le complété π -adique d'une variété torique sur $\check{\mathcal{O}}$)

$$\overline{T} = \mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}}\langle x_i, T_i, Z \rangle / (x_i^n - Z^{n-i}T_i))^{\mathrm{normalisé}}$$

avec $\lambda = Z$, $\overline{T}_\lambda = V(\lambda - \pi)$.

I.8.1.3 Bord des cellules

Proposition I.8.7. *Pour i un entier vérifiant $1 \leq i \leq n-1$, on note*

$$\partial_i \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} \hookrightarrow \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$$

le sous-foncteur de $\mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$ défini par l'ensemble des (H, ρ, η) tels que pour tout $z \in \mathfrak{Z}^{\mathrm{rig}}$, le polygone $\mathrm{Newt}(H[\pi]_z)$ passe par le point $(q^i, 1 - \frac{i}{n})$. Ce sous-foncteur est un ouvert de $\mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$.

Démonstration. Avec les coordonnées explicites choisies sur les espaces de Lubin-Tate dans la démonstration de la proposition I.8.3, celui-ci est défini par l'inégalité $v(x_i) \geq 1 - \frac{i}{n}$ sur l'espace rigide et est donc l'ouvert $T_i \neq 0$ avec les notations de la démonstration de la proposition I.8.3. \square

Remarque I.8.8. Bien sûr cet ouvert est obtenu par image réciproque de son homologue en niveau $K = \mathrm{GL}(\Lambda)$.

I.8.1.4 Décomposition du bord

Lemme I.8.9. *Soit \mathfrak{X} un schéma formel admissible normal tel que*

$$\mathfrak{X}^{\text{rig}} = U_1 \coprod U_2$$

Il existe alors des modèles entiers $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ de U_1 et U_2 tels que

$$\mathfrak{X} = \mathcal{U}_1 \coprod \mathcal{U}_2$$

Démonstration. Le schéma formel \mathfrak{X} étant admissible

$$\Gamma(\mathfrak{X}^{\text{rig}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}) = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})\left[\frac{1}{\pi}\right]$$

et donc la fonction rigide valant 0 sur U_1 et 1 sur U_2 définit un élément e de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})\left[\frac{1}{\pi}\right]$ vérifiant $e^2 = e$. Mais \mathfrak{X} étant normal, $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est intégralement fermé dans $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})\left[\frac{1}{\pi}\right]$ (fait A.2.1 de l'appendice A). Donc $e \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$. \square

Corollaire I.8.10. *Si $K \subset \text{Id} + \pi \text{End}(\Lambda)$, il y a une décomposition*

$$\partial_i \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} = \coprod_{E \subset \pi^{-1}\Lambda/\Lambda} \partial_{i, E} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$$

où $\partial_{i, E} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$ représente les (H, ρ, η) dans $\partial_i \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$ tels qu'en tout point de la fibre générique, $\eta(E)$ soit le sous-groupe des q^i -points de plus grande valuation dans $H[\pi]$.

Remarque I.8.11. Plus généralement, soit $\underline{i} = (0 < i_1 < \dots < i_r < n)$ et

$$\partial_{\underline{i}} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} = \bigcap_{a=1}^r \partial_{i_a} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}. \text{ Alors,}$$

$$\partial_{\underline{i}} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} = \coprod_{E^\bullet} \partial_{\underline{i}, E^\bullet} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$$

où E^\bullet parcourt les drapeaux de \mathbb{F}_q -e.v. dans $\pi^{-1}\Lambda/\Lambda$ de "type" \underline{i} (i.e., $E^1 \subset \dots \subset E^r$ avec $\dim_{\mathbb{F}_q} E^a = i_a$) qui correspondent, via η , à des drapeaux de sous-groupes canoniques dans $H[\pi]$.

I.8.1.5 Applications de recollement

Proposition I.8.12. *Soient $[\Lambda, M] \in \mathcal{I}$ et $E \subset \pi^{-1}\Lambda/\Lambda$ de dimension i . Si $p : \pi^{-1}\Lambda \twoheadrightarrow \pi^{-1}\Lambda/\Lambda$ et si*

$$K \subset (\text{Id} + \pi \text{End}(\Lambda)) \cap (\text{Id} + \pi \text{End}(p^{-1}(E)))$$

il y a un isomorphisme

$$\partial_{i, E} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} \xrightarrow{\sim} \partial_{n-i, (\pi^{-1}\Lambda/\Lambda)/E} \mathbb{D}_{[p^{-1}(E), \Pi^i M], K}$$

induit par le quotient par $\eta(E)$.

Démonstration. D'après la remarque I.8.2, sur $\mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$ le \mathcal{O} -module formel universel H possède une structure de niveau de Drinfeld de niveau 1 étendant la structure de niveau η sur la fibre générique. Il résulte alors du lemme I.6.4 qu'il existe un unique sous-groupe plat fini $\eta(E) \subset H[\pi]$ induisant ponctuellement sur $\partial_{i, E}$, en chaque point de la fibre générique, le sous-groupe des q^i -points de plus grande valuation dans $H[\pi]$.

D'après les calculs effectués dans la première partie de la démonstration de la proposition I.3.5, on vérifie que $H/\eta(E)$ est dans ∂_{n-i} et qu'en chaque point de la fibre générique l'image par l'isogénie $h : H \rightarrow H/\eta(E)$ envoie un facteur direct de $\eta(E)$ dans $H[\pi]$ sur les q^{n-i} -points de plus grande valuation. On en déduit aussitôt que $(H/\eta(E), h \circ \rho, h_* \circ \eta)$ définit un élément de $\partial_{n-i, (\pi^{-1}\Lambda/\Lambda)/E} \mathbb{D}_{[p^{-1}(E), \Pi^i M], K}$. Cela définit le morphisme

$$\partial_{i, E} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} \longrightarrow \partial_{n-i, (\pi^{-1}\Lambda/\Lambda)/E} \mathbb{D}_{[p^{-1}(E), \Pi^i M], K}$$

Mais, en remplaçant E par $(\pi^{-1}\Lambda/\Lambda)/E$, on obtient un morphisme dans l'autre sens. La composée des deux est le quotient par $H[\pi]$, qui est donc l'identité. \square

I.8.1.6 Réinterprétation en termes des arêtes orientées de \mathcal{I}

Définition I.8.13. Soit $a \rightarrow a'$ une arête de \mathcal{I} , où $a = [\Lambda, M]$, $a' = [\Lambda', M']$ et

$$\Lambda \subsetneq \Lambda' \subsetneq \pi^{-1}\Lambda, \quad M' = \Pi^{[\Lambda:\Lambda']} M$$

Soit $K \subset \text{Id} + \pi \text{End}(\Lambda) \cap \text{Id} + \pi \text{End}(\Lambda')$. On note

$$\mathbb{D}_{a \rightarrow a', K} = \partial_{i, \Lambda'/\Lambda} \mathbb{D}_{a, K}$$

D'après la proposition I.8.12, il y a un isomorphisme naturel

$$\mathbb{D}_{a \rightarrow a', K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{a' \rightarrow a, K}$$

d'où deux immersions ouvertes

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{D}_{a, K} \\ & \nearrow & \\ \mathbb{D}_{a \rightarrow a', K} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathbb{D}_{a', K} \end{array}$$

Ces applications de face sont équivariantes pour l'action de $\text{GL}_n(F) \times D^\times$.

Remarque I.8.14. Plus généralement, soit

$$a_0 \rightarrow a_2 \rightarrow \cdots \rightarrow a_r$$

un simplexe orienté de \mathcal{I} . Mettons-le sous la forme $a_i = [\Lambda_i, M_i]$, où

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \cdots \subset \Lambda_r \subset \pi^{-1}\Lambda$$

et $M_i = \Pi^{[\Lambda_0:\Lambda_i]}M_0$. Cela définit un type \underline{i} , avec $i_a = \dim_{\mathbb{F}_q} \Lambda_i/\Lambda_0$, et un drapeau E^\bullet de type \underline{i} dans $\pi^{-1}\Lambda_0/\Lambda_0$.

Posons

$$\mathbb{D}_{a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_r, K} = \partial_{\underline{i}, E^\bullet} \mathbb{D}_{[\Lambda_0, M_0], K}$$

Alors, pour tout i compris entre 1 et r , il y a des isomorphismes

$$\mathbb{D}_{a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_r, K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{a_i \rightarrow \cdots \rightarrow a_r \rightarrow a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_{i-1}, K}$$

qui se composent de façon naturelle. Il y a également des applications de face naturelles: pour tout simplexe orienté σ et tout sous-simplexe $\sigma' \subset \sigma$:

$$\mathbb{D}_{\sigma, K} \hookrightarrow \mathbb{D}_{\sigma', K}$$

Ces applications sont des immersions ouvertes.

I.8.2 Niveau infini

Définition I.8.15. Soit $a \in \mathcal{I}$. On pose

$$\mathbb{D}_{a, \infty} = \varprojlim_K \mathbb{D}_{a, K}$$

(K suffisamment petit) dans la catégorie des schémas formels p -adiques.

Étant donné que les morphismes de transition $\mathbb{D}_{a, K_2} \rightarrow \mathbb{D}_{a, K_1}$, pour $K_2 \subset K_1$, sont affines, une telle limite existe. Si $\mathbb{D}_{a, K} = \mathrm{Spf}(A_K)$, alors

$$\mathbb{D}_{a, \infty} = \mathrm{Spf} \left(\left(\varprojlim_K A_K \right)^\wedge \right)$$

Remarque I.8.16. Si $\mathcal{A}_K = A_K[\frac{1}{\pi}]$ est l'algèbre de Banach affinoïde p -adique munie de sa norme infini $|f|_\infty = \sup_{x \in \mathrm{Max}(\mathcal{A}_K)} |f(x)|$, soit $\mathcal{A} = \bigcup_K \mathcal{A}_K$ munie de la norme infini

$$|f|_\infty = \sup_{x: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} |f(x)|$$

(les morphismes de transition $sp(\mathcal{A}_K) \rightarrow sp(\mathcal{A}_{K'})$ pour $K' \subset K$ étant finis, l'inclusion $\mathcal{A}_K \subset \mathcal{A}_{K'}$ est isométrique). Soit $\widehat{\mathcal{A}}$ le complété de \mathcal{A} , une algèbre de Banach p -adique. Alors, d'après le fait A.2.3 de l'appendice A,

$$\mathbb{D}_{a, \infty} = \mathrm{Spf} \left(\text{boule unité de } \widehat{\mathcal{A}} \right)$$

Définition I.8.17. Pour σ un simplexe orienté de \mathcal{I} , $\sigma = (a \rightarrow \cdots)$, on définit $\mathbb{D}_{\sigma, \infty}$ comme étant l'ouvert correspondant de $\mathbb{D}_{a, \infty}$.

On a donc $\mathbb{D}_{\sigma, \infty} = \varprojlim_K \mathbb{D}_{\sigma, K}$. Ceux-ci sont munis d'une action

$$\forall (g, d) \in \mathrm{GL}_n(F) \times D^\times, \quad \mathbb{D}_{\sigma, \infty} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{(g, d).\sigma, \infty}$$

et d'applications de face

$$\mathbb{D}_{\sigma, \infty} \hookrightarrow \mathbb{D}_{\sigma', \infty}$$

pour $\sigma' \subset \sigma$ des simplexes orientés.

I.8.3 Donnée de descente

La donnée de descente de Rapoport-Zink permet de définir des données pour tout simplexe orienté σ_0 , pour tout K (éventuellement $K = \infty$)

$$\mathbb{D}_{\sigma_0, K} \longrightarrow \mathbb{D}_{\Pi^{-1}. \sigma_0, K}^{(\sigma)}$$

où σ désigne le Frobenius arithmétique de $\widehat{F^{nr}}|F$.

I.9 Le schéma formel recollé en niveau fini

Soit $A \subset \mathcal{I}$ un sous-ensemble comme dans la partie I.7. Posons

$$\mathfrak{X}_{0, A} = \prod_{a \in A} \mathbb{D}_{a, K}$$

et

$$\mathfrak{X}_{1, A} = \prod_{\substack{a, a' \in A \\ a \rightarrow a'}} \mathbb{D}_{a \rightarrow a', K}$$

La section I.8.1.6 permet de définir un diagramme

$$\mathfrak{X}_{1, A, K} \rightrightarrows \mathfrak{X}_{0, A, K}$$

Proposition I.9.1. *Le diagramme ci-dessus définit une donnée de recollement effective pour la topologie de Zariski et définit donc un schéma formel $\mathfrak{X}_{A, K}$ localement de type fini sur $\hat{\mathcal{O}}$ tel que $\mathfrak{X}_{A, K}/\pi^{\mathbb{Z}}$ soit de type fini. Ce schéma formel est un modèle entier de l'ouvert rigide $U_{A, K}$ de \mathcal{M}_K défini dans la proposition I.7.1. Comme dans le cas rigide tout est équivariant sous $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ pour des A et K variants.*

Démonstration. C'est une conséquence de ce que les applications de bord sont naturelles au sens où le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_{a \rightarrow a' \rightarrow a'', K} & \longrightarrow & \mathbb{D}_{a \rightarrow a'', K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}_{a' \rightarrow a'', K} & \longrightarrow & \mathbb{D}_{a'', K} \end{array}$$

(ce qui n'est rien d'autre que l'égalité " $(H/\eta(E''))/(\eta(E')/\eta(E'')) = H/\eta(E')$ "). \square

I.10 Le schéma formel en niveau infini

Proposition I.10.1. *Le diagramme $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariant*

$$\coprod_{a \rightarrow a'} \mathbb{D}_{a \rightarrow a', \infty} \longrightarrow \coprod_a \mathbb{D}_{a, \infty}$$

définit un schéma formel p -adique recollé \mathfrak{X}_∞ muni d'une action de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$.
De plus

$$\mathfrak{X}_\infty = \varinjlim_A \varprojlim_K \mathfrak{X}_{A, K}$$

Ce schéma formel est muni d'une donnée de descente de $\check{\mathcal{O}}$ à \mathcal{O} , qui est effective sur les quotients $\mathfrak{X}_\infty/\pi^{a\mathbb{Z}}$, pour $a \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Elle ne pose pas de problème. \square

Remarque I.10.2. Soit $\ell \neq p$ et $\Lambda \in \{\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_\ell\}$. Soit $R\Gamma_c(-, \Lambda)$ un foncteur défini sur la catégorie des $\check{\mathcal{O}}$ -schémas formels p -adiques quasi-séparés sans p -torsion et à valeurs dans $\mathbb{D}^+(\Lambda)$. Supposons que:

- En restriction à la catégorie des $\check{\mathcal{O}}$ -schémas formels de type fini, ce foncteur coïncide avec le foncteur $\mathfrak{X} \mapsto R\Gamma_c(\mathfrak{X}^{an} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda)$, où \mathfrak{X}^{an} désigne la fibre générique au sens des espaces de Berkovich et la cohomologie est la cohomologie étale de torsion ou bien ℓ -adique.
- Si $\mathfrak{X} = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{X}_i$, où $\mathfrak{X}_i \rightarrow \mathfrak{X}_{i+1}$ est fini, alors

$$\varinjlim_{i \in \mathbb{N}} R\Gamma_c(\mathfrak{X}_i, \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathfrak{X}, \Lambda)$$

Alors

$$R\Gamma_c(\mathfrak{X}_\infty, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_K R\Gamma_c(\mathcal{M}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda)$$

Dans le chapitre IV de ce livre nous construisons un tel foncteur (et ses versions équivariantes). La condition de compatibilité aux limites projectives sera une conséquence du théorème d'approximation d'Elkik. Cela nous permettra de comparer la cohomologie des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld.

I.11 Décomposition cellulaire écrasée en niveau fini

Dans la section I.7 on a défini pour un niveau K une décomposition cellulaire d'un ouvert admissible de \mathcal{M}_K d'image quasi-compacte dans $\mathcal{M}_K/\pi^{\mathbb{Z}}$. On explique ici que, quitte à modifier les cellules, on a une décomposition cellulaire de tout \mathcal{M}_K paramétrée par un quotient de l'immeuble et des cellules modifiées.

Définition I.11.1 (Cellules écrasées). Soit σ un simplexe orienté de \mathcal{I} comme précédemment et $K \subset \mathrm{GL}_n(F)$ un sous-groupe compact ouvert. Soit $K' \triangleleft K$ compact ouvert tel que si $a = [\Lambda, M]$ est un sommet de σ alors $K' \subset \mathrm{Id} + \pi \mathrm{End}(\Lambda)$. Posons

$$\mathcal{D}_{\sigma, K} = \mathcal{D}_{\sigma, K'} / \mathrm{Stab}_K(\sigma)$$

où $\mathrm{Stab}_K(\sigma)$ désigne l'intersection des stabilisateurs des sommets de σ .

Ce quotient est bien défini car $\mathrm{Stab}_K(\sigma)/K'$ est un groupe fini. On a alors une décomposition cellulaire:

$$\coprod_{\{a \rightarrow a'\}/K} \mathcal{D}_{a \rightarrow a', K} \xrightarrow{\cong} \coprod_{a \in \mathcal{I}/K} \mathcal{D}_{a, K} \longrightarrow \mathcal{M}_K$$

Remarque I.11.2. Pour tout K , il existe $n - 1$ sous-ensembles K -stables

$$(U_{i, K})_{1 \leq i \leq n-1} \quad \text{dans} \quad \mathcal{I}/\pi^{\mathbb{Z}}$$

tels que

- $\mathcal{I}/\pi^{\mathbb{Z}} \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} U_{i, K}$ est relativement compact dans $\mathcal{I}/\pi^{\mathbb{Z}}$
- Si, pour $1 \leq i \leq n - 1$, P_i désigne le sous-groupe parabolique maximal dans GL_n stabilisateur de $F^i \oplus (0)^{n-i}$, alors

$$\pi_0(U_{i, K}/K) \simeq P_i(F) \backslash \mathrm{GL}_n(F)/K \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

On en déduit qu'il existe des ouverts admissibles $(V_{i, K})_{1 \leq i \leq n-1}$ dans $\mathcal{M}/\pi^{\mathbb{Z}}$ tels que $(\bigcup_i V_{i, K})^c$ est relativement compact (i.e., contenu dans une boule de rayon < 1) et dont l'image réciproque en niveau K se scinde en une union disjointe indexée par $P_i(F) \backslash \mathrm{GL}_n(F)/K$, i.e., est "induite parabolique". On peut donner une interprétation de ce phénomène en termes de sous-groupes canoniques, cf. [12].

I.12 Une autre décomposition cellulaire

Comme l'a suggéré Alain Genestier à l'auteur, il est possible de décomposer cellulièrement la tour de Lubin-Tate en niveau infini de manière à ce que cette décomposition corresponde exactement à celle de l'espace de Drinfeld via l'isomorphisme entre les deux tours. Une telle décomposition est indexée non-plus par les sommets de l'immeuble mais pas les simplexes, comme c'est le cas pour le schéma formel de Deligne-Drinfeld. Néanmoins, la cellule de base doit être définie en niveau Iwahori.

Plus précisément, il y a un modèle régulier semi-stable de l'espace de Lubin-Tate en niveau Iwahori donné par

$$\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}}[[y_1, \dots, y_n]]/(y_1 \dots y_n - \pi))$$

de fibre générique la couronne généralisée

$$\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathring{\mathbb{B}}^n \mid \prod_i y_i = \pi\}$$

et alors la cellule de base est l'ouvert admissible quasicompact

$$\{(y_1, \dots, y_n) \mid v(y_1) \geq \frac{v(y_2)}{q} \geq \dots \geq \frac{v(y_n)}{q^{n-1}} \geq \frac{v(y_1)}{q^n}\}$$

qui d'après [12] correspond à un simplexe de l'immeuble du côté Drinfeld.

Néanmoins, cette décomposition cellulaire n'est pas adaptée à la construction de l'isomorphisme entre les deux tours car l'application des périodes sur cette cellule n'est pas un isomorphisme sur son image, alors que c'est le cas du domaine fondamental de Gross-Hopkins.

Annexe A

Normalisé d'un schéma formel dans une extension de sa fibre générique

Dans cet appendice, K désigne un corps valué complet pour une valuation discrète. Tous les espaces rigides considérés sont quasi-séparés et définis sur K . Par point de X , on entend ici les points classiques c'est-à-dire ceux associés aux spectres maximaux des algèbres affinoïdes (mais tous les résultats énoncés restent valables en considérant plus généralement les points au sens de Berkovich).

A.1 Généralités sur les espaces rigides

Nous commençons par collecter quelques résultats difficilement disponibles dans la littérature sur les espaces rigides en donnant quelques indications sur les démonstrations dans certains cas. Nous n'aurons pas besoin de tous ces énoncés dans la suite, néanmoins ils répondent à des questions qui sont venues naturellement à l'esprit de l'auteur lors de la rédaction des énoncés concernant la normalisation des schémas formels.

Fait A.1.1. *Soit X un espace rigide. Sont équivalents*

- $\forall x \in X$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit
- Il existe un recouvrement admissible affinoïde $(U_i)_i$ de X tel que $\forall i$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U_i)$ soit réduit
- Pour tout ouvert admissible U de X , l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit

Si l'une des trois conditions précédentes est vérifiée, X est dit réduit. En général, le faisceau, qui à U ouvert admissible quasicompact associe l'idéal des éléments nilpotents dans $\mathcal{O}_X(U)$, est cohérent et définit un sous-espace rigide Zariski fermé réduit X_{red} dans X .

Fait A.1.2. *Soit X un espace rigide réduit. Sont équivalents*

- $\forall x \in X$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre

- Il existe un recouvrement admissible affinoïde $(U_i)_i$ de X tel que $\forall i, \forall x \in U_i$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U_i)_{\mathfrak{m}_x}$ est intègre unibranche.
- Pour tout ouvert admissible connexe U de X , l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre et si, de plus, U est affinoïde $\forall \mathfrak{P} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_X(U))$, l'anneau $\mathcal{O}_X(U)_{\mathfrak{P}}$ est unibranche.

Si ces conditions sont vérifiées, X sera dit localement intègre.

Démonstration. On utilise librement les propriétés de base concernant les anneaux locaux des espaces rigides, telles que dans le chapitre 2.1 de [1]. Soient $x \in X$, U un ouvert admissible affinoïde contenant x , $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X(U)$ et \mathfrak{m} l'idéal de \mathcal{A} associé à x . Il y a un isomorphisme entre anneaux locaux noethériens

$$\widehat{\mathcal{A}}_{\mathfrak{m}} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$$

L'anneau \mathcal{A} est réduct excellent ([19] ou [25]). On en déduit (EGA IV 7.8.3 (vii)) que $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}$ est intègre unibranche ssi $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathfrak{m}}$ est intègre. Puisque $\mathcal{O}_{X,x} \subset \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, la seconde assertion de l'énoncé entraîne la première. La troisième entraînant clairement la seconde, il suffit de voir que la première implique la troisième. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{O}_{X,x}$ intègre implique $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}$ intègre unibranche (dans la troisième assertion \mathfrak{m} n'est pas supposé maximal, mais on peut s'y ramener puisque \mathcal{A} étant excellent l'ensemble des points de $\text{Spec}(\mathcal{A})$ où il est unibranche est constructible (EGA IV 9.7.10) et \mathcal{A} est un anneau de Jacobson). Si l'on savait que $\mathcal{O}_{X,x}$ est excellent cela serait facile car, $\mathcal{O}_{X,x}$ étant hensélien, il est unibranche et donc son complété serait intègre. Malheureusement, cela n'est pas connu. Le lemme qui suit appliqué à $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ permet néanmoins de conclure. \square

Lemme A.1.3. *Soit $(A, \mathfrak{m}) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ un morphisme local injectif d'anneaux locaux. Supposons (B, \mathfrak{n}) hensélien intègre. Alors (A, \mathfrak{m}) est unibranche.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la proposition 18.6.12 de EGA IV. \square

Exemple A.1.4. Si $X = \text{Spm}(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{A} = K\langle x, y \rangle / (y^2 - x^2(1-x))$, l'algèbre \mathcal{A} est intègre mais l'ouvert $|x| \leq |p|$, bien que connexe, défini par l'algèbre $\mathcal{A}\langle \frac{x}{p} \rangle$ est tel que $\mathcal{A}\langle \frac{x}{p} \rangle$ n'est pas intègre puisque si $|x| \leq |p|$, alors

$$\sqrt{1-x} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-1)^k x^k \in \mathcal{A}\langle \frac{x}{p} \rangle$$

et donc

$$y^2 - x^2(1-x) = (y - x\sqrt{1-x})(y + x\sqrt{1-x}).$$

Cela peut également se voir en disant que la cubique nodale n'est pas unibranche en sa singularité.

Dans l'énoncé suivant, un anneau nothérien est dit normal s'il est un produit (nécessairement fini) d'anneaux intègres intégralement fermés dans leur corps des

fractions, ce qui est encore équivalent à dire que tous ses localisés en ses idéaux premiers sont intègres intégralement clos dans leurs corps des fractions.

Fait A.1.5. *Soit X un espace rigide réduit. Sont équivalents*

- *Il existe un recouvrement affinoïde admissible $(U_i)_i$ de X tel que $\forall i$, $\mathcal{O}_X(U_i)$ est normal*
- *Pour tout ouvert admissible connexe U de X , $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre intégralement clos*
- *$\forall x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre intégralement clos dans son corps des fractions.*

Si ces conditions sont vérifiées l'espace X est dit normal.

Fait A.1.6. *Soit X un espace rigide réduit. Le normalisé \tilde{X} de X est bien défini et le morphisme $\tilde{X} \rightarrow X$ est fini.*

Par normalisé on entend ici un objet représentant le foncteur $\text{Hom}(-, X)$ restreint à la catégorie des espaces rigides normaux.

Si $f : \tilde{X} \rightarrow X$, le faisceau $f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ est le normalisé de \mathcal{O}_X dans le faisceau des fonctions méromorphes \mathcal{M}_X . Ce faisceau des fonctions méromorphes est celui qui à U ouvert affinoïde associe le corps total des fractions de $\mathcal{O}_X(U)$. Plus précisément, utilisant que $\forall U$ affinoïde, $\mathcal{O}_X(U)$ est excellent donc Japonais et que donc $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(U)$ est fini sur $\mathcal{O}_X(U)$, on en déduit que $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(U)$ est une algèbre de Tate. Le normalisé de \mathcal{O}_X dans \mathcal{M}_X est un faisceau cohérent qui définit donc un espace rigide affinoïde au-dessus de X , qui est \tilde{X} .

Remarque A.1.7. Ainsi, X réduit est localement intègre ssi pour tout ouvert admissible connexe de X son image réciproque dans \tilde{X} est connexe.

Remarque A.1.8. Pour un espace rigide X on peut définir les composantes irréductibles de X comme étant les images des composantes connexes du normalisé de X_{red} . Elles sont donc Zariski fermées puisque le morphisme de normalisation est fini. Si, pour un ouvert admissible quasicompact U , on note $\text{Irr}(U)$ l'ensemble de ses composantes irréductibles, Irr est un faisceau muni d'un épimorphisme $\text{Irr} \rightarrow \pi_0$ associé au morphisme $\underline{\mathbb{Z}} \rightarrow f_*\underline{\mathbb{Z}}$, où $f : \tilde{X} \rightarrow X$.

A.2 Schémas formels normaux

Rappelons qu'un \mathcal{O}_K -schéma formel admissible est un \mathcal{O}_K -schéma formel de type fini sans π -torsion (où π est une uniformisante de K). On les supposera toujours quasi-séparés.

Fait A.2.1. *Soit \mathfrak{X} un \mathcal{O}_K -schéma formel admissible. Sont équivalents*

- *Il existe un recouvrement ouvert affine $(\mathcal{U}_i)_i$ de \mathfrak{X} tel que $\forall i$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U}_i)$ est normal*

- $\forall \mathcal{U}$ ouvert affine connexe de X , $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$ est intègre intégralement clos dans son corps des fractions
- $\forall x \in \mathcal{X}$, $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ est intègre intégralement clos dans son corps des fractions.

Démonstration. On utilise le fait suivant: $\forall \mathcal{U}$ ouvert affine dans \mathfrak{X} , l'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U})$ est excellent ([24] pour le cas d'égalité caractéristique et [25] pour le cas d'inégalité) et donc $\forall f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U})$, l'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U})[\frac{1}{f}]$ est excellent ce qui implique que s'il est normal alors son complété $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(D(f))$ est normal. A partir de là tout le reste est facile. \square

Remarque A.2.2. Il n'existe pas en général de bonne notion de schéma formel réduit ou bien normal. On a en effet besoin d'utiliser des propriétés stables par complétion afin que si l'anneau A possède cette propriété, pour tout f dans A , l'anneau $A\langle \frac{1}{f} \rangle$ la possède aussi.

Fait A.2.3. Soit \mathfrak{X} un \mathcal{O}_K -schéma formel admissible réduit tel que $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$ soit normal. Soit $sp : (\mathfrak{X}^{\text{rig}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}) \rightarrow (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$, comme morphisme d'espaces annelés. Via la norme infini le faisceau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ est un faisceau en K -ev. normés: $\forall f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}(U)$, $|f|_{\infty} = \sup_{x \in U} |f(x)|$. On note $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}^0$ le sous-faisceau en \mathcal{O}_K -algèbres des $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ telles que $|f|_{\infty} \leq 1$. Alors le normalisé de \mathfrak{X} est bien défini, égal à

$$\text{Spf}(sp_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}^0)$$

qui est un \mathcal{O}_K -schéma formel admissible normal fini au-dessus de \mathfrak{X} .

Démonstration. Tout repose sur le théorème de Grauert Remmert qui assure que pour A une \mathcal{O}_K -algèbre admissible, $\mathcal{A} = A[\frac{1}{\pi}]$ l'algèbre de Tate associée, la boule unité de \mathcal{A} pour la semi-norme infini est une algèbre admissible finie sur A . Nous renvoyons pour cela à la discussion au début de la section 1 de [4]. \square

Fait A.2.4. Soit \mathcal{U} un ouvert affine de \mathfrak{X} et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U})[\frac{1}{p}]^0$ telles que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U})[\frac{1}{p}]^0 = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U})[f_1, \dots, f_n]$. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $\forall i$, $\pi^r f_i \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. Alors, le normalisé de \mathcal{U} s'identifie à l'éclatement formel admissible de l'idéal ouvert $(\pi^r, \pi^r f_1, \dots, \pi^r f_n)$.

A.3 Normalisé dans une extension de la fibre générique

Fait A.3.1. Soit \mathfrak{X} un \mathcal{O}_K -schéma formel admissible réduit. Soit $\varphi : Y \rightarrow \mathfrak{X}^{\text{rig}}$ un morphisme fini d'espaces rigides tel que Y soit normal. Alors, $sp_* \varphi_* \mathcal{O}_Y^0$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent, le normalisé $\tilde{\mathfrak{X}}$ de \mathfrak{X} dans Y existe, est fini au-dessus de \mathfrak{X} et est égal à

$$\text{Spf}(sp_* \varphi_* \mathcal{O}_Y^0)$$

Il vérifie la propriété universelle suivante: étant donné un schéma formel normal \mathfrak{Z} muni d'un morphisme $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$ et d'un relèvement

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathfrak{Z}^{\text{rig}} & \longrightarrow & \mathfrak{X}^{\text{rig}} \end{array}$$

il existe un unique relèvement

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{\mathfrak{X}} \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathfrak{Z} & \longrightarrow & \mathfrak{X} \end{array}$$

tel qu'après passage à la fibre générique les deux diagrammes précédents soient compatibles.

Annexe B

Modules de Dieudonné et cristaux des \mathcal{O} -modules π -divisibles

Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension de degré fini. On notera $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$.

B.1 Un lemme sur les F -cristaux \mathcal{O} -équivalents

Soit S un schéma sur lequel p est localement nilpotent et $\Sigma = \text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. On considère le gros site cristallin $\text{CRIS}(S/\Sigma)$ de [2] ou bien le gros site cristallin nilpotent $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$ ([2] chapitre 1).

Lemme B.1.1. *Soit \mathcal{E} un F -cristal (non-dégénéré) en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -modules localement libres de rang fini sur $\text{CRIS}(S/\Sigma)$ ou $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$. Supposons \mathcal{E} muni d'une action de \mathcal{O} . Alors, \mathcal{E} est un $\mathcal{O}_{S/\Sigma} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$ -module localement libre sur $\text{CRIS}(S/\Sigma)$.*

Démonstration. Soit $(U \hookrightarrow T) \in \text{CRIS}(S/\Sigma)$ (resp. $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$) et $x \in U$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_{T,x}$ est libre en tant que $\mathcal{O}_{T,x} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ -module
- (ii) $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(x)$ est libre en tant que $k(x) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ -module
- (iii) $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} \overline{k(x)}$ est libre en tant que $\overline{k(x)} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ -module

L'équivalence entre (ii) et (iii) résulte de ce que $\overline{k(x)} \otimes \mathcal{O}_F$ est une $k(x) \otimes \mathcal{O}_F$ -algèbre fidèlement plate.

L'implication (i) \Rightarrow (ii) est claire, quant à (ii) \Rightarrow (i) elle résulte du lemme de Nakayama. En effet, si $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(x)$ est un $k(x) \otimes \mathcal{O}_F$ -module libre, soit

$$e_1, \dots, e_r \in \mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_{T,x}$$

un relèvement d'une $k(x) \otimes \mathcal{O}_F$ -base. Soit $(\epsilon_j)_j$ une base de \mathcal{O}_F comme \mathbb{Z}_p -module. Alors, d'après le lemme de Nakayama, $(\epsilon_i e_j)_{i,j}$ engendre $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_{T,x}$ comme

$\mathcal{O}_{T,x}$ -module. Mais

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_{T,x}}(\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes \mathcal{O}_{T,x}) &= \mathrm{rg}_{k(x)}(\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(x)) \\ &= [F : \mathbb{Q}_p] \mathrm{rg}_{k(x) \otimes_{\mathcal{O}_F}}(\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(x)) \end{aligned}$$

La famille $(\epsilon_i e_j)_{i,j}$ est donc une $\mathcal{O}_{T,x}$ -base.

Montrons donc l'assertion (iii). Il y a des morphismes compatibles dans $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ (resp. $\mathrm{NCRIS}(S/\Sigma)$) pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\overline{k(x)}) & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}(W_n(\overline{k(x)})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}(W_n(\mathcal{O}_T)) \end{array}$$

La propriété de cristal implique donc que $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} \overline{k(x)}$ est la réduction modulo p de

$$E = \varprojlim_n \mathcal{E}_{(\mathrm{Spec}(\overline{k(x)}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(W_n(\overline{k(x)}))}$$

C'est un $W(\overline{k(x)})$ -module libre qui est en fait un $W(\overline{k(x)}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ -module muni d'une isogénie F -linéaire (ici $F = \text{Frobenius}$)

$$\varphi : E_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} E_{\mathbb{Q}}$$

qui commute à l'action de \mathcal{O}_F . Or

$$E = \bigoplus_{\tau: F^0 \hookrightarrow W(\overline{k(x)})_{\mathbb{Q}}} E_{\tau}$$

où E_{τ} est un $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F^0, \tau}} W(\overline{k(x)})$ -module libre. Le module E est donc libre sur $W(\overline{k(x)}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ ssi

$$\forall \tau, \tau', \quad \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F^0, \tau}} W(\overline{k(x)})} E_{\tau} = \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F^0, \tau'}} W(\overline{k(x)})} E_{\tau'}$$

Mais

$$\forall \tau, \quad \varphi : E_{\tau} \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} E_{F\tau} \otimes \mathbb{Q}$$

□

Corollaire B.1.2. *Soit H un groupe p -divisible sur un schéma S sur lequel p est localement nilpotent. Supposons-le muni d'une action de \mathcal{O} . Alors, l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de H est un $\mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$ -module localement libre.*

Démonstration. C'est une conséquence de ce que cette algèbre de Lie est l'évaluation d'un des cristaux définis dans [21]. □

B.2 Structure du cristal de Messing d'un \mathcal{O} -module π -divisible

Définition B.2.1. Un \mathcal{O} -module π -divisible sur un \mathcal{O} -schéma est un groupe p -divisible muni d'une action de \mathcal{O} qui induit l'action naturelle sur son algèbre de Lie.

Remarque B.2.2. Soit H un groupe p -divisible muni d'une action de \mathcal{O} . Alors, $\forall n, H[\pi^n]$ est un groupe plat fini. En effet, $\pi : H \rightarrow H$ est une isogénie puisque $\pi^{e-1} \cdot \pi = \text{unité} \times p$. On peut ainsi donner une définition analogue à celle des groupes p -divisibles pour les groupes p -divisibles munis d'une action de \mathcal{O} en remplaçant p par π dans les définitions.

Soit S un \mathcal{O} -schéma sur lequel p est localement nilpotent. Soit H un \mathcal{O} -module π -divisible sur S . Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega_{HD} \longrightarrow \text{Lie } E(H) \longrightarrow \omega_H^* \longrightarrow 0$$

où $E(H)$ désigne l'extension vectorielle universelle de H de [21]. Soit I l'idéal d'augmentation de $\mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_S$.

Proposition B.2.3. *Localement sur S , il existe une $\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F$ -base de $\text{Lie } E(H)$ $(e_1, \dots, e_{r_1+r_2})$ telle que*

$$\omega_{HD} = \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F \cdot e_{r_1} \oplus I \cdot e_{r_1+1} \oplus \dots \oplus I \cdot e_{r_1+r_2}$$

Démonstration. Il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega_{HD}/I \cdot \text{Lie } E(H) \longrightarrow \text{Lie } E(H)/I \cdot \text{Lie } E(H) \longrightarrow \omega_H^* \longrightarrow 0$$

où, d'après le corollaire B.1.2, $\text{Lie } E(H)/I \cdot \text{Lie } E(H)$ est un \mathcal{O}_S -module localement libre. Localement sur S , soit $(e_1, \dots, e_{r_1+r_2})$ un relèvement d'une base de

$$\text{Lie } E(H)/I \cdot \text{Lie } E(H) \quad \text{dans} \quad \text{Lie } E(H)$$

tel que $(e_{r_1+1}, \dots, e_{r_1+r_2})$ s'envoie sur une base de ω_H^* via $\text{Lie } E(H) \rightarrow \omega_H^*$ (une telle base existe puisque $\text{Lie } E(H)/I \cdot \text{Lie } E(H) \rightarrow \omega_H^*$ est localement scindé). L'idéal I étant contenu dans le radical de Jacobson de $\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F$ et $\text{Lie } E(H)$ étant libre sur $\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F$, $(e_1, \dots, e_{r_1+r_2})$ est une $\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F$ -base de $\text{Lie } E(H)$, dont on vérifie aussitôt qu'elle convient. \square

B.3 \mathcal{O} -extension vectorielle universelle d'un \mathcal{O} -module π -divisible

Définition B.3.1. Soit S un schéma et \mathcal{F} un faisceau en groupes abéliens sur S_{fppf} . Soit $f : \text{Spec}(\mathcal{O}_S[\epsilon]) \rightarrow S$. On appelle algèbre de Lie de \mathcal{F} le faisceau en \mathcal{O}_S -modules sur S_{fppf}

$$\text{Lie } \mathcal{F} = \ker f_* f^* \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon=0} \mathcal{F}$$

Définition B.3.2. Soit H un \mathcal{O} -module π -divisible sur un schéma S . On appelle \mathcal{O} -extension vectorielle de H une extension

$$0 \longrightarrow \underline{V} \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

de faisceaux en \mathcal{O}_F -modules sur S_{fppf} telle que V soit un \mathcal{O}_S -module cohérent, \underline{V} le faisceau fppf associé et l'action induite de \mathcal{O} sur $\text{Lie } E$ soit l'action naturelle.

On remarquera que de telles extensions sont "rigides" puisque $\forall W$ cohérent, $\text{Hom}(H, \underline{W}) = 0$ (p est localement nilpotent sur S) (par fainéantise on oubliera désormais de souligner les faisceaux cohérents et on notera V pour \underline{V}). La proposition suivante a donc un sens.

Proposition B.3.3. *Tout \mathcal{O} -module π -divisible possède une \mathcal{O} -extension vectorielle universelle*

$$0 \longrightarrow V_{\mathcal{O}}(H) \longrightarrow E_{\mathcal{O}}(H) \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

De plus $V_{\mathcal{O}}(H)$ et $\text{Lie } E_{\mathcal{O}}(H)$ sont des \mathcal{O}_S -modules localement libres et il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow V_{\mathcal{O}}(H) \longrightarrow \text{Lie } E_{\mathcal{O}}(H) \longrightarrow \text{Lie } H \longrightarrow 0$$

Démonstration. Soit

$$0 \longrightarrow \omega_{H^D} \longrightarrow E(H) \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

l'extension vectorielle universelle de H (correspondant au cas $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}_p$). Soit $I = \ker(\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_S)$. Considérons le poussé en avant de l'extension précédente par le morphisme $\omega_{H^D} \rightarrow \omega_{H^D}/I$. $\text{Lie } E(H)$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_{H^D} & \longrightarrow & E(H) & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \omega_{H^D}/I & \longrightarrow & \tilde{E} & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où

$$\tilde{E} = \omega_{H^D}/I \cdot \text{Lie } E(H) \coprod_{\omega_{H^D}} E(H) = E(H)/I \cdot \text{Lie } E(H)$$

Alors, cette extension est une \mathcal{O} -extension vectorielle universelle de H . Avant de le montrer, commençons par montrer quelques propriétés de cette extension.

D'après la proposition B.2.3, $\omega_{H^D}/I \cdot \text{Lie } E(H)$ est localement libre. De plus, si \tilde{E}_n désigne l'image réciproque de $H[\pi^n]$ dans \tilde{E} , $\tilde{E} = \varinjlim_n \tilde{E}_n$ et il y a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \omega_{H^D}/I \cdot \text{Lie } E(H) \longrightarrow \tilde{E}_n \longrightarrow H[\pi^n] \longrightarrow 0$$

Donc, \tilde{E}_n est un torseur fppf sous l'espace affine $\omega_{H^D}/I.\text{Lie } E(H)$ au-dessus de $H[\pi^n]$ et est donc représentable par un $H[\pi^n]$ -schéma lisse. Il y a donc des suites exactes pour tout n

$$0 \longrightarrow \omega_{H^D}/I.\text{Lie } E(H) \longrightarrow \text{Lie } \tilde{E}_n \longrightarrow \text{Lie } H[\pi^n] \longrightarrow 0$$

et étant donné que $\text{Lie } \tilde{E} = \varinjlim_n \tilde{E}_n$, que pour $n \gg 0$, $\text{Lie } H[\pi^n] = \text{Lie } H$, pour

$n \gg 0$, $\text{Lie } \tilde{E}_n = \text{Lie } \tilde{E}$ et il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega_{H^D}/I.\text{Lie } E(H) \longrightarrow \text{Lie } \tilde{E} \longrightarrow \text{Lie } H \longrightarrow 0$$

et même un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_{H^D} & \longrightarrow & \text{Lie } E(H) & \longrightarrow & \text{Lie } H \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \omega_{H^D}/I.\text{Lie } E(H) & \longrightarrow & \text{Lie } \tilde{E} & \longrightarrow & \text{Lie } H \longrightarrow 0 \end{array}$$

duquel on déduit que

$$\text{Lie } \tilde{E} = \text{Lie } E(H)/I.\text{Lie } E(H)$$

Montrons maintenant l'universalité de l'extension. Soit

$$0 \longrightarrow \underline{V} \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

une \mathcal{O} -extension vectorielle. Oubliant l'action de \mathcal{O} , celle-ci est induite par un unique morphisme \mathcal{O}_S -linéaire $\omega_{H^D} \rightarrow V$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_{H^D} & \longrightarrow & E(H) & \longrightarrow & H \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \underline{V} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & H \longrightarrow 0 \end{array}$$

l'unicité d'un tel morphisme (qui résulte de $\text{Hom}(H, \underline{V}) = 0$) implique que tous les morphismes dans le diagramme précédent sont \mathcal{O} -linéaires. Il y a alors un diagramme de $\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}$ -modules sur S_{fppf}

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_{H^D} & \longrightarrow & \text{Lie } E(H) & \longrightarrow & \text{Lie } H \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \underline{V} & \longrightarrow & \text{Lie } E & \longrightarrow & \text{Lie } H \longrightarrow 0 \end{array}$$

duquel on déduit que $\omega_{H^D} \rightarrow \underline{V}$ se factorise par $\omega_{H^D} \rightarrow \omega_{H^D}/I.\text{Lie } E(H)$. \square

Remarque B.3.4. Il résulte de la démonstration précédente que si l'on pose $\text{ht}_{\mathcal{O}} H = \text{ht } H/[F : \mathbb{Q}_p]$ alors

$$\text{rg}_{\mathcal{O}_S} V_{\mathcal{O}}(H) = \text{ht}_{\mathcal{O}} H - \dim H$$

Remarque B.3.5. On vérifie comme dans le lemme 1.18 de [21] que $E_{\mathcal{O}}(H)$ est formellement lisse.

Remarque B.3.6. Comme dans la proposition 1.19 du chapitre IV de [21], on vérifie que le complété formel (au sens de la section II.1.0 de [21]) $\widehat{E}_{\mathcal{O}}(H)$ de $E_{\mathcal{O}}(H)$ est un \mathcal{O} -module formel (i.e., un groupe de Lie formel muni d'une action de \mathcal{O} telle que l'action induite sur l'algèbre de Lie soit l'action naturelle) extension du \mathcal{O} -module formel \widehat{H} par le groupe formel vectoriel $\widehat{V}_{\mathcal{O}}(H)$ (localement isomorphe à une somme finie de $\widehat{\mathbb{G}}_a$).

B.4 Cristal de Messing généralisé et théorie de la déformation

Théorème B.4.1. Soit $\Sigma = \text{Spec}(\mathcal{O}_F)$ muni de l'idéal à puissances divisées (p) et \mathcal{E} le cristal de Messing de H sur $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$ en tant que $\mathcal{O}_{S/\Sigma} \otimes \mathcal{O}_F$ -module. Soit $\mathcal{I} = \ker(\mathcal{O}_{S/\Sigma} \otimes \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_{S/\Sigma})$.

Alors, $\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E}$ est un cristal en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -modules localement libres de rang fini tel que $\forall (U \hookrightarrow T) \in \text{NCRIS}(S/\Sigma)$, $\forall \widetilde{H}$ un relèvement de $H \times_S U$ sur T , comme \mathcal{O} -module π -divisible

$$(\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E})_{(U \hookrightarrow T)}$$

s'identifie à l'algèbre de lie de $E_{\mathcal{O}}(\widetilde{H})$, la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle de \widetilde{H} .

De plus, pour un tel relèvement \widetilde{H} la partie vectorielle de $E_{\mathcal{O}}(\widetilde{H})$, $V_{\mathcal{O}}(\widetilde{H}) = \omega_{\widetilde{H}D}/I$. Lie $E_{\mathcal{O}}(\widetilde{H})$ définit une filtration localement facteur direct dans $(\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E})_{(U \hookrightarrow T)}$ se réduisant modulo l'idéal de U dans T sur la partie vectorielle de $E_{\mathcal{O}}(H)$.

Cette correspondance définit une équivalence de catégories entre la catégorie des \mathcal{O} -modules π -divisibles sur T et celle des couples (H_0, Fil) , où H_0 est un \mathcal{O} -module π -divisible sur U et Fil une filtration localement facteur direct dans l'évaluation du cristal précédent sur $U \hookrightarrow T$ se réduisant sur la partie vectorielle de Lie $E_{\mathcal{O}}(H_0)$.

Démonstration. Seule la vérification du fait que la correspondance évoquée est une équivalence de catégories reste à vérifier.

Elle se déduit du théorème de Messing (th. 1.6 chap. V de [21]) en remarquant que les filtrations localement facteur direct \mathcal{O} -stables Fil dans $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)}$ et telles que l'action de \mathcal{O} sur $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)}/\text{Fil}$ soit l'action naturelle sont en bijection, via l'application

$$\text{Fil} \longmapsto \text{Fil}/\mathcal{I}_{(U \hookrightarrow T)}\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)}$$

avec les filtrations localement facteur direct dans $(\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E})_{(U \hookrightarrow T)}$. \square

B.5 Exponentielle π -adique

B.5.1 \mathcal{O} -puissances divisées ([17] section 10, [11] section 7)

Soit T un \mathcal{O} -schéma sur lequel π est localement nilpotent et $J \subset \mathcal{O}_T$ un idéal cohérent.

Définition B.5.1. Une structure de \mathcal{O} -puissances divisées sur J consiste en la donnée d'une application $\gamma : J \rightarrow J$ vérifiant

- (i) $\forall a \in \mathcal{O}_S, \forall x \in J, \gamma(ax) = a^q \gamma(x)$
- (ii) $\forall x \in J, \pi \gamma(x) = x^q$
- (iii) $\forall x, y \in J, \gamma(x+y) = \gamma(x) + \gamma(y) + \sum_{0 < i < q} \alpha_i \gamma_i(x) \gamma_{q_i}(y)$, où $\alpha_i = \binom{q}{i} / \pi \in \mathcal{O}$

Remarque B.5.2. Lorsque $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$, d'après la proposition A.1 de l'appendice de [3], on retrouve la définition des puissances divisées usuelles avec $\gamma = \gamma_p$. Par exemple, lorsque la base ne possède pas de p -torsion, $x \mapsto \frac{x^p}{p}$ permet de retrouver les $\frac{x^n}{n!}$ par composition et multiplication par des éléments de \mathbb{Z}_p . Plus précisément, $\gamma_{p^n} = \alpha_n \gamma^{\circ n}$, où $\alpha_n \in \mathbb{Z}_p^\times$ et si $n = \sum_i a_i p^i$, où $0 \leq a_i \leq p-1$, $\gamma_n = \beta_n \prod_i \gamma_{p^i} \circ \gamma_{a_i}$, où $\beta_n \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Remarque B.5.3. L'élément π étant localement nilpotent l'existence d'une \mathcal{O} -P.D.-structure sur un idéal implique que celui-ci est un nil-idéal.

Exemple B.5.4. Si $J^2 = \pi J = 0$ une structure de \mathcal{O} -P.D. sur J est la même chose qu'un morphisme additif $Frob_q$ -linéaire $\gamma : J \rightarrow J$.

Définition B.5.5. Si γ est une \mathcal{O} -P.D.-structure sur J , on pose comme dans [11]

$$\forall n \geq 1, \delta_n(x) = \underbrace{(\gamma \circ \dots \circ \gamma)}_{n\text{-fois}}(x) \cdot \pi^{1+q+\dots+q^{n-1}-n}$$

et $\delta_0(x) = x$.

Ainsi, si la base est sans π -torsion $\delta_n(x) = \frac{x^{q^n}}{\pi^n}$. On note $J^{[n]}$ l'idéal engendré par les $\gamma^{\circ a_1}(x_1) \dots \gamma^{\circ a_k}(x_k)$, où $\sum_i q_i^{a_i} \geq n$, et on dit que γ est nilpotente si $J^{[n]} = 0$ pour $n \gg 0$. Lorsque $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$, on vérifie facilement que l'on retrouve la définition usuelle pour les idéaux $J^{[n]}$.

Lemme B.5.6. Soit $T' \rightarrow T$ un morphisme plat et $J \subset \mathcal{O}_T$ muni de \mathcal{O} -P.D. Alors celles-ci s'étendent de façon compatible à $J\mathcal{O}_{T'}$.

Démonstration. Procéder par exemple comme dans le lemme 1.8 p. 80 de [21]. \square

Définition B.5.7. Pour $\Sigma = \text{Spec}(\mathcal{O})$ et S un \mathcal{O} -schéma sur lequel π est localement nilpotent, la définition des \mathcal{O} -P.D. et le lemme précédent permettent de définir des sites cristallins $\text{CRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$ et $\text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$.

B.5.2 Logarithme

Lemme B.5.8. *Supposons J muni de \mathcal{O} -P.D. Il y a alors un isomorphisme de \mathcal{O} -modules*

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{O}}(J) &\xrightarrow{\sim} J^{\mathbb{N}} \\ [x_i]_i &\longmapsto \underbrace{(\gamma_i(x_0) + \gamma_{i-1}(x_1) + \cdots + \gamma_0(x_i))}_i \\ &\qquad\qquad\qquad \text{,, } \frac{W_{\mathcal{O},i}(\underline{x})}{\pi^i} \text{''} \end{aligned}$$

Si de plus $\delta_n(J) = 0$ pour $n \gg 0$, il y a une application

$$\widehat{W}_{\mathcal{O}}(J) \xrightarrow{\log} J^{(\mathbb{N})} = \text{Lie } \widehat{W}_{\mathcal{O}} \otimes J$$

Si de plus les \mathcal{O} -P.D. sont nilpotentes, alors l'application précédente est un isomorphisme.

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit de vérifier que l'enveloppe à \mathcal{O} -P.D. de $\mathcal{O}[X_i]_{i \geq 0}$ par rapport à $(X_i)_{i \geq 0}$ est sans π -torsion et on se ramène alors à montrer que $\widehat{W}_{\mathcal{O}}(J) \rightarrow J^{\mathbb{N}}$ est un morphisme, lorsque π est inversible, ce qui est clair. Le reste est facile. \square

Remarque B.5.9. Du côté de $J^{\mathbb{N}}$, les opérateurs F, V et $[a]$ sont donnés par

$$\begin{aligned} [a].(y_i)_i &= (ay_i)_i \\ {}^V(y_i)_i &= (0, y_0, y_1, \dots, y_i, \dots) \\ {}^F(y_i)_i &= (\pi y_1, \pi y_2, \dots, \pi y_i, \dots) \end{aligned}$$

Proposition B.5.10. *Soit G un \mathcal{O} -module formel sur un \mathcal{O} -schéma et J un idéal muni de \mathcal{O} -puissances divisées γ telles que localement $\delta_n(J) = 0$ pour $n \gg 0$ (par exemple, π est localement nilpotent). Il existe alors une unique application logarithme fonctorielle en (G, J, γ)*

$$\log_G : G(J) \longrightarrow \text{Lie } G \otimes J$$

compatible avec celle définie pour $\widehat{W}_{\mathcal{O}}$. Si les \mathcal{O} -P.D. sont nilpotentes, cette application est un isomorphisme.

Démonstration. Soit

$$M = \text{Hom}(\widehat{W}_{\mathcal{O}}, G)$$

le module de Cartier de G , un $\mathbb{E}_{\mathcal{O}}$ -module. Alors,

$$G(J) \simeq \widehat{W}_{\mathcal{O}}(J) \otimes_{\mathbb{E}_{\mathcal{O}}} M$$

où $\mathbb{E}_{\mathcal{O}}$ agit sur $\widehat{W}_{\mathcal{O}}$ de telle manière que

$$x \otimes Fm = {}^V x \otimes m, \quad x \otimes Vm = {}^F x \otimes m, \quad x \otimes [a]m = [a]x \otimes m$$

Posons

$$\log_G : \widehat{W}_{\mathcal{O}}(J) \otimes_{\mathbb{E}_{\mathcal{O}}} M \longrightarrow J^{(\mathbb{N})} \otimes_{\mathbb{E}_{\mathcal{O}}} M$$

où $J^{(\mathbb{N})}$ est un $\mathbb{E}_{\mathcal{O}}$ -module via les formules de la remarque B.5.9. Alors,

$$J^{(\mathbb{N})} = J \oplus I_J$$

où

$$J = J \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus \cdots$$

$$I_J = 0 \oplus J^{(\mathbb{N})} = {}^V J^{(\mathbb{N})}$$

De plus, remarquons que

$${}^F J = 0$$

On en déduit aussitôt que

$$J^{(\mathbb{N})} \otimes_{\mathbb{E}_{\mathcal{O}}} M = J \otimes_R M / VM$$

□

Remarque B.5.11. L'annulation ${}^F J = 0$ utilisée dans la démonstration précédente est à la base des liens reliant puissances divisées et théorie de Cartier, cf. par exemple le lemme 38 de [27].

Remarque B.5.12. La notation \log_G n'est pas correcte, on devrait plutôt noter $\log_{G,\gamma}$.

Corollaire B.5.13. Soit G un \mathcal{O} -module formel sur Σ , un \mathcal{O} -schéma, et $S = \Sigma \bmod \pi$. Soit $\mathcal{J}_{S/\Sigma}$ l'idéal à puissances divisées sur $\text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$. Il y a alors un isomorphisme

$$G(\mathcal{J}_{S/\Sigma}) \xrightarrow{\sim} \text{Lie } G \otimes_{\mathcal{O}_{\Sigma}} \mathcal{J}_{S/\Sigma}$$

Proposition B.5.14. Soit (G, J, γ) comme précédemment. Supposons que $J^2 = \pi J = 0$. Soit $\alpha : \text{Lie } G / \pi \text{Lie } G \longrightarrow \text{Lie } G / \pi \text{Lie } G$ l'application Frob_q -linéaire, qui à une dérivation invariante d associe d^q . L'application $\gamma : J \rightarrow J$ est Frob_q -linéaire et il y a un diagramme commutatif naturel en (G, J, γ)

$$\begin{array}{ccc} & \text{Lie } G \otimes J \equiv \text{Lie } G / \pi \text{Lie } G \otimes J & \\ \begin{array}{c} \nearrow \text{can} \\ \searrow \log_G \end{array} & & \downarrow \simeq \text{Id} + \alpha \otimes \gamma \\ G(J) & & \text{Lie } G \otimes J \equiv \text{Lie } G / \pi \text{Lie } G \otimes J \\ & \sim & \end{array}$$

où can est l'isomorphisme définissant $\text{Lie } G$.

Démonstration. Si M est le module de Cartier de G et $\pi = 0$ sur la base, l'application α est $F : M/VM \rightarrow M/VM$ qui est bien définie, puisque $FV = VF$. Pour vérifier l'assertion, il suffit de la faire pour $\widehat{W}_{\mathcal{O}}$. En effet, après choix d'une V -base du module de Cartier de G , il existe une surjection $\oplus \widehat{W}_{\mathcal{O}}(J) \rightarrow G(J)$ et par naturalité du log en le groupe formel (éventuellement de dimension infinie), on conclut.

Dans le cas de $\widehat{W}_{\mathcal{O}}$,

$$\begin{aligned} \text{can} : \widehat{W}_{\mathcal{O}}(J) &\xrightarrow{\sim} \text{Lie} \widehat{W}_{\mathcal{O}} \otimes J = J^{(\mathbb{N})} \\ \sum_{i \geq 0} V^i[x_i] &\longmapsto (x_i)_{i \geq 0} \end{aligned}$$

et $\alpha((x_i)_{i \geq 0}) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Étant donné que $\pi J = 0$, $\forall i \geq 2$, $\delta_i(J) = 0$, donc

$$\log \left(\sum_{i \geq 0} V^i[x_i] \right) = (x_0, x_1 + \gamma(x_0), \dots, x_i + \gamma(x_{i-1}), \dots)$$

d'où le résultat. \square

Remarque B.5.15. Lorsque $J^2 = 0$, l'isomorphisme can correspond au cas du logarithme lorsque l'on munit l'idéal des \mathcal{O} -P.D. triviales $\gamma = 0$.

B.5.3 Exponentielle

Nous n'utiliserons pas la proposition qui suit plus tard car nous aurons besoin d'exponentier des morphismes pas seulement sur la partie formelle de nos groupes mais sur tout le groupe. Néanmoins, cette proposition est complémentaire de celle que nous utiliserons (noter par exemple que les \mathcal{O} -P.D. ne sont pas nilpotentes dans la proposition qui suit, ce qui est compensé par le fait que nos groupes sont formels).

Proposition B.5.16. *Soient G et H deux \mathcal{O} -modules formels sur T et $J \subset \mathcal{O}_T$ un idéal cohérent muni de \mathcal{O} -P.D. γ . Il existe alors une application*

$$\exp : \text{Hom}(G, \widehat{J \cdot \text{Lie} H}) \longrightarrow \ker(\text{Hom}(G, H) \rightarrow \text{Hom}(G \text{ mod } J, H \text{ mod } J))$$

où si $\widehat{\text{Lie} H}$ désigne le groupe de Lie formel associé à $\text{Lie} H$, alors $\widehat{J \cdot \text{Lie} H}$ est le sous-foncteur de $\widehat{\text{Lie} H}$ défini par $(\widehat{J \cdot \text{Lie} H})(Z) = \Gamma(Z, \text{Lie} H \otimes J(\mathcal{O}_Z)_{\text{nilp}})$. Cette application est naturelle en (G, H, J, γ) .

Si $J^2 = (0)$ et $\gamma = 0$, alors l'application précédente coïncide avec l'application identité donnée par $\text{Lie} H \otimes J \simeq \ker(H \rightarrow H \text{ mod } J)$.

$$\ker(\text{Hom}(G, H) \rightarrow \text{Hom}(G \text{ mod } J, H \text{ mod } J)) = \text{Hom}(G, J \text{Lie} H) \quad (\text{B.1})$$

Si $J^2 = \pi J = (0)$, soit $\alpha : \text{Lie } H / \pi \text{ Lie } H \rightarrow \text{Lie } H / \pi \text{ Lie } H$ l'application, qui à une dérivation invariante d associe d^q , et $\Pi = \alpha \otimes \gamma$ l'endomorphisme $Frob_q$ -linéaire de $J\text{Lie } H$. Alors, naturellement en (G, H, J, γ) , via l'isomorphisme canonique (B.1)

$$\exp f = \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \Pi^n \right) \circ f$$

où la somme infinie est finie lorsqu'elle est évaluée sur une algèbre nilpotente, puisque $\text{Im } f \subset \widehat{J}\text{Lie } H$.

Remarque B.5.17. Si $G = \widehat{\mathcal{M}}$, où \mathcal{M} est un module localement libre de rang fini, il y a un morphisme $\text{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{M}, J\text{Lie } H) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{J}\text{Lie } H)$, d'où une application exponentielle de source $\text{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{M}, J\text{Lie } H)$.

Remarque B.5.18. La formule donnée pour $\exp f$, lorsque $J^2 = \pi J = 0$, coïncide bien avec celle de [21] ((2.6.6.3) page 142) lorsque $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$. En effet, si $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ sont des puissances divisées, alors $\gamma_{p^n} \equiv (-1)^n \gamma_p^n \pmod{p}$.

Démonstration. Si Q est un \mathcal{O}_T -module notons $C(Q)$ le $\mathbb{E}_{\mathcal{O}}$ -module à gauche défini par

$$C(Q) = Q^{\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{i \geq 0} V^i x_i \mid x_i \in Q \right\}$$

sur lequel

$$\begin{aligned} V \sum_{i \geq 0} V^i x_i &= \sum_i V^{i+1} x_i \\ F \sum_{i \geq 0} V^i x_i &= \pi \sum_{i \geq 1} V^{i-1} x_i \\ [a] \sum_{i \geq 0} V^i x_i &= \sum_{i \geq 0} V^i (a^{q^i} x_i) \end{aligned}$$

Lorsque Q est localement libre de rang fini $C(Q)$ est le module de Cartier de \widehat{Q} . De l'isomorphisme $W_{\mathcal{O}}(J) \simeq J^{\mathbb{N}}$ du lemme B.5.8, on déduit une décomposition $W_{\mathcal{O}}(J) = J \oplus {}^V W_{\mathcal{O}}(J)$ et donc $J \hookrightarrow \mathbb{E}_{\mathcal{O}}$. Soit M le module de Cartier de H . L'application de réduction modulo VM induit un isomorphisme

$$\psi : JM \xrightarrow{\sim} J.(M/VM) = J \otimes M/VM$$

Il suffit en effet de vérifier que $JM \cap VM = (0)$, mais si $(e_{\alpha})_{\alpha}$ est une V -base de M et $(\lambda_{\alpha})_{\alpha}$ une famille d'éléments de J , alors $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} e_{\alpha} \in VM \Leftrightarrow \forall \alpha, \mathcal{W}_{\mathcal{O},0}(\lambda_{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow \forall \alpha, \lambda_{\alpha} = 0$.

De plus, l'inverse de cet isomorphisme induit un morphisme de $\mathbb{E}_{\mathcal{O}}$ -modules

$$\begin{aligned} \Xi : C(J \otimes M/VM) &\longrightarrow M \\ \sum_i V^i x_i &\longmapsto \sum_i V^i \psi^{-1}(x_i) \end{aligned}$$

En effet, cela résulte aussitôt de ce que ${}^F J = (0)$. L'application exponentielle s'écrit alors comme la composée

$$\mathrm{Hom}(G, \widehat{J.\mathrm{Lie}H}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}_{\mathcal{O}}}(M_G, C(J.M/VM)) \xrightarrow{\Xi_*} \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}_{\mathcal{O}}}(M_G, M)}_{=\mathrm{Hom}(G,H)}$$

où M_G est le module de Cartier de G et où il faut vérifier que si

$$f : G \longrightarrow \widehat{J.\mathrm{Lie}H} \hookrightarrow \widehat{\mathrm{Lie}H},$$

alors le morphisme $M_G \longrightarrow C(\mathrm{Lie}(H))$ se factorise par $C(J.\mathrm{Lie}H)$, mais cela résulte de la description des modules de Cartier en termes de courbes p -typiques.

Quant aux deux dernières assertions concernant les cas $J^2 = 0$ et $\gamma = 0$, resp. $J^2 = \pi J = 0$, soient $x \in J$ et $\bar{m} \in M/VM$. Voyons x comme élément de $J \subset W(J)$ grâce à γ . Alors $x = \sum_i V^i [a_i]$, où $a_0 = x$, $a_i = 0$ si $i > 0$, lorsque $\gamma = 0$, et $a_i = (-1)^i \gamma^i(x)$ si $\pi J = 0$. Dès lors

$$xm = \sum_{i \geq 0} (-1)^i V^i [a_i] F^i . m \in J.M$$

Or, lorsque $\pi = 0$, $F^i : M/VM \longrightarrow M/VM$ s'identifie à α^i . On en déduit facilement le résultat. \square

Remarque B.5.19. Le lien entre le logarithme de la section précédente et l'exponentielle de la proposition précédente est que l'exponentiation des morphismes est obtenue par exponentiation des courbes p -typiques via $\log_H : H(YJ[[Y]]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}H \otimes YJ[[Y]] = C(\mathrm{Lie}H \otimes J)$.

Voici la proposition que nous utiliserons.

Proposition B.5.20. *Soit T un \mathcal{O} -schéma, $J \subset \mathcal{O}_T$ un idéal cohérent muni de \mathcal{O} -P.D. nilpotentes. Soit G un schéma en \mathcal{O} -modules plat sur T . Soit H un faisceau en \mathcal{O} -modules sur T_{fppf} tel que \widehat{H} soit un \mathcal{O} -module formel. Il y a alors une application d'exponentiation*

$$\exp : \mathrm{Hom}(G, J.\mathrm{Lie}H) \longrightarrow \ker(\mathrm{Hom}(G, H) \rightarrow \mathrm{Hom}(G \bmod J, H \bmod J))$$

telle que si $J^2 = 0$ et $\gamma = 0$, via l'identification canonique de

$$\ker(\mathrm{Hom}(G, H) \rightarrow \mathrm{Hom}(G \bmod J, H \bmod J)) \text{ avec } \mathrm{Hom}(G, J.\mathrm{Lie}H), \exp = \mathrm{Id}.$$

Si $J^2 = \pi J = 0$ et si $\Pi = \alpha \otimes \gamma$ est l'endomorphisme nilpotent Frob_q -linéaire de $J \cdot \text{Lie } H = \text{Lie } H / \pi \text{Lie } H \otimes J$ alors

$$\exp f = \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \Pi^n \right) \circ f$$

Démonstration. Le schéma G étant plat sur T , il suffit de définir $(\exp f)_U : G(U) \rightarrow H(U)$ pour tout schéma U affine et plat sur T (i.e., définir $\exp f$ comme morphisme de faisceaux sur le petit site plat de T). Soit donc $U \rightarrow T$ plat. Alors, d'après le lemme B.5.6, les \mathcal{O} -P.D. γ s'étendent à $J\mathcal{O}_U$, d'où un isomorphisme (proposition B.5.10)

$$\log_G : \widehat{H}(J\mathcal{O}_U) \xrightarrow{\sim} \text{Lie } H \otimes_{\mathcal{O}_T} J\mathcal{O}_U = J \text{Lie } H \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_U$$

Posons

$$(\exp f)_U : G(U) \rightarrow \Gamma(U, J \text{Lie } H) \xrightarrow{\log^{-1}} \widehat{H}(\Gamma(U, J\mathcal{O}_U)) \subset H(U)$$

On vérifie aussitôt que cette définition est fonctorielle en U . Les assertions concernant les cas $J^2 = 0$ ou $J^2 = \pi J = 0$ se déduisent de la proposition B.5.14. \square

B.6 Extension du cristal de Messing généralisé aux \mathcal{O} -puissances divisées

Il y a un morphisme de sites

$$\Pi_{\mathcal{O}} : \text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma) \rightarrow \text{NCRIS}(S/\Sigma)$$

puisque les puissances divisées classiques induisent des \mathcal{O} -puissances divisées.

Théorème B.6.1. *Soit H un \mathcal{O} -module π -divisible sur S . Soit \mathcal{E} le cristal algèbre de Lie de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle sur $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$ défini dans la proposition B.3.3. Ce cristal s'étend naturellement à $\text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$, au sens où il existe un cristal en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -modules localement libres \mathcal{F} sur $\text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$ tel que $\mathcal{E} = \Pi_{\mathcal{O}*} \mathcal{F}$ (et donc nécessairement $\mathcal{F} = \Pi_{\mathcal{O}}^* \mathcal{E}$). De plus, si $(U \hookrightarrow T) \in \text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$ et \widetilde{H} est un relèvement de $H \times_S U$ à T , alors $\mathcal{F}_{(U \hookrightarrow T)}$ s'identifie à $\text{Lie } E_{\mathcal{O}}(\widetilde{H})$. De plus $G \mapsto \mathcal{F}$ est fonctoriel en G .*

Remarque B.6.2. En fait, on étend directement le cristal \mathcal{O} -extension vectorielle universelle à $\text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$.

Démonstration. La démonstration utilise l'application exponentielle construite dans la proposition B.5.20 et suit celle de [21]. Faisons tout de même remarquer au lecteur qu'elle n'est pas indépendante de [21] puisque la proposition-clef

B.2.3, qui permet d'affirmer que $E_{\mathcal{O}}(H)$ existe et est extension de H par $V_{\mathcal{O}}(H)$ localement libre, utilise [21] (c'est surtout le fait que $V_{\mathcal{O}}(H)$ soit localement libre qui est crucial).

Comme dans [21], tout repose sur le théorème suivant analogue du théorème 2.2 page 129 de [21]

Théorème B.6.3. *Soit $(S \hookrightarrow T) \in \text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$ et H_1, H_2 deux \mathcal{O} -modules π -divisibles sur T de réduction $H_{1/S}, H_{2/S}$. Soit $f : H_{1/S} \rightarrow H_{2/S}$. Il existe alors un unique morphisme*

$$g : E_{\mathcal{O}}(H_1) \rightarrow E_{\mathcal{O}}(H_2)$$

tel que $\forall u : V_{\mathcal{O}}(H_1) \rightarrow V_{\mathcal{O}}(H_2)$ relevant $V_{\mathcal{O}}(f) : V_{\mathcal{O}}(H_{1/S}) \rightarrow V_{\mathcal{O}}(H_{2/S})$ dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{O}}(H_1) & \xhookrightarrow{i} & E_{\mathcal{O}}(H_1) \\ \downarrow u & & \downarrow g \\ V_{\mathcal{O}}(H_2) & \xhookrightarrow{i} & E_{\mathcal{O}}(H_2) \end{array}$$

$$g \circ i - i \circ u \in \exp(\text{Hom}(V_{\mathcal{O}}(H_1), J.\text{Lie } E_{\mathcal{O}}(H_2)))$$

où J est l'idéal de S dans T et \exp est l'application définie dans la proposition B.5.20.

La démonstration de ce théorème repose sur l'analogue du lemme 2.6.3 page 135 de [21]:

Lemme B.6.4. *Soit H un \mathcal{O} -module π -divisible sur T et $N \gg 0$ tel que $\pi^N \mathcal{O}_T = 0$ et $\omega_{H[\pi^N]^D}$ soit localement libre. Soit $I = \ker(\mathcal{O}_T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_T)$ et*

$$\alpha : H[\pi^N] \rightarrow \omega_{H[\pi^N]^D}/I.\text{Lie } E(H) = V_{\mathcal{O}}(H)$$

l'application universelle telle que

$$\alpha_* \left(0 \rightarrow H[\pi^N] \rightarrow H \xrightarrow{\pi^N} H \rightarrow 0 \right) = (0 \rightarrow V_{\mathcal{O}}(H) \rightarrow E_{\mathcal{O}}(H) \rightarrow H \rightarrow 0)$$

Soit \mathcal{F} un faisceau en \mathcal{O} -modules sur T_{fppf} tel que $\widehat{\mathcal{F}}$ soit un \mathcal{O} -module formel. Soit un diagramme \mathcal{O} -équivariant

$$\begin{array}{ccc} H[\pi^N] & & \\ \downarrow \alpha & \searrow v & \\ V_{\mathcal{O}}(H) & \xrightarrow{w} & \mathcal{F} \end{array}$$

qui commute après réduction sur S et tel que si

$$v_* \left(0 \rightarrow H[\pi^N] \rightarrow H \xrightarrow{\pi^N} H \rightarrow 0 \right) = (\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow H \rightarrow 0)$$

alors l'action de \mathcal{O} sur $\text{Lie } \mathcal{G}$ est l'action naturelle donnée par $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_S$. Il existe alors un unique morphisme \mathcal{O} -équivariant $w' : V_{\mathcal{O}}(H) \rightarrow \mathcal{F}$ tel qu'en remplaçant w par w' , le diagramme précédent commute, $w' \equiv w$ sur S et $w' - w$ soit une exponentielle.

Démonstration. La démonstration est identique à celle de [21]: on dévisse au cas $J^2 = \pi J = 0$, puis on utilise la formule explicite donnée dans la proposition B.5.20 pour \exp dans ce cas là. Ce qu'il faut vérifier, c'est que les dévissages n'affectent pas l'hypothèse de l'action de \mathcal{O} sur l'objet noté $\text{Lie } \mathcal{G}$ dans l'énoncé. Mais cela ne pose pas de problème puisque la seule modification faite au morphisme v est $v \mapsto v - w \circ \alpha$, or $w \circ \alpha$ est tel que si ξ est l'extension $0 \rightarrow H[\pi^N] \rightarrow H \xrightarrow{\pi^N} H \rightarrow 0$, alors $(w \circ \alpha)_* \xi = w_*(\alpha_* \xi)$, mais \mathcal{O} agit naturellement via $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_S$ sur $\text{Lie } (\alpha_* \xi)$ et on en déduit le résultat d'après le lemme B.6.5 qui suit.

La fin de l'argument page 143 de [21] se modifie en utilisant que sur S , $\alpha : H[\pi^N]_{/S} \rightarrow V_{\mathcal{O}}(H/S)$ est universel pour les \mathcal{O} -morphisms β de $H[\pi^N]_{/S}$ vers un \mathcal{O}_S -module cohérent \mathcal{M} tel que si ξ est l'extension précédente, alors \mathcal{O} agit naturellement sur $\text{Lie } \beta_* \xi$. Il faut également utiliser de nouveau le lemme B.6.5 appliqué à $(\sum (-1)^n \Pi^n)^{-1}$.

Lemme B.6.5. *Les classes des extensions $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow 0$ de \mathcal{O} -modules sur S_{fppf} telles que \mathcal{O} agisse naturellement sur $\text{Lie } E_2$ via $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_S$ forment un sous \mathcal{O} -module de $\text{Ext}_{\mathcal{O}}(E_1, E_2)$. Ces classes sont stables par image directe via un morphisme \mathcal{O} -linéaire $u : E_1 \rightarrow E'_1$ tel que \mathcal{O} agisse naturellement sur $\text{Lie } E'_1$ et induisant $u_* : \text{Ext}_{\mathcal{O}}(E_1, E_2) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}}(E'_1, E_2)$.*

Démonstration. Elle est facile et laissée au lecteur. □

Expliquons maintenant quels sont les arguments à adapter dans la démonstration du théorème. La principale chose à vérifier est que l'on peut appliquer le lemme B.6.4 dans la démonstration de l'équivalent du lemme 2.7.4 de [21]. Plus précisément, avec les notations de ce lemme dans [21], il faut vérifier que si $v' : G \rightarrow E_{\mathcal{O}}(H)$ est l'unique relèvement de v'_0 alors, si

$$\xi = \left(0 \rightarrow G[\pi^N] \rightarrow G \xrightarrow{\pi^N} G \rightarrow 0 \right)$$

\mathcal{O} agit naturellement sur $\text{Lie } (v'_{G[\pi^N]})_* \xi$. Mais $(v'_{G[\pi^N]})_* \xi$ est une extension scindée. Son algèbre de Lie est donc une extension scindée de $\text{Lie } E_{\mathcal{O}}(H)$ par $\text{Lie } G$, d'où l'assertion.

Le reste de la démonstration en bas de la page 145 jusqu'à la page 146 s'adapte immédiatement en remplaçant les Hom et Ext par des $\text{Hom}_{\mathcal{O}}$ et $\text{Ext}_{\mathcal{O}}$. □

B.7 Théorie de la déformation des \mathcal{O} -modules π -divisibles

Théorème B.7.1. *Soit $(S \hookrightarrow T) \in \text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$. Soit \mathcal{C} la catégorie des \mathcal{O} -modules π -divisibles sur T . Soit \mathcal{D} la catégorie des \mathcal{O} -modules π -divisibles sur S munis d'une filtration localement facteur direct de leur cristal généralisé évalué sur $S \hookrightarrow T$ (cf. théorème précédent) déformant la partie vectorielle de leur \mathcal{O} -extension vectorielle universelle. Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ le foncteur qui à H sur T associe $(H \times_T S, V_{\mathcal{O}}(H) \hookrightarrow \mathcal{F}_{(S \hookrightarrow T)})$. Alors, F induit une équivalence de catégories.*

Démonstration. La démonstration est absolument identique à celle du théorème 1.6 page 151 du chapitre V de [21]. \square

B.8 Théorie de Dieudonné “classique” des \mathcal{O} -modules π -divisibles

Soit k un corps parfait extension du corps résiduel de \mathcal{O} et H un \mathcal{O} -module π -divisible sur k . Soit σ le Frobenius de $W(k)$. Soit $\mathbb{D}(H)$ le module de Dieudonné de H , un $W(k)$ -module libre de rang $\text{ht } H$ muni de $\varphi : \mathbb{D}(H) \rightarrow \mathbb{D}(H)$, une application σ -linéaire induisant un isomorphisme après inversion de p .

L'action de \mathcal{O} sur $\mathbb{D}(H)$ munit celui-ci d'une structure de $W(k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$ -module. Donc,

$$\mathbb{D}(H) = \bigoplus_{\tau: F^0 \hookrightarrow W(K)_{\mathbb{Q}}} \mathbb{D}(H)_{\tau}$$

où $\mathbb{D}(H)_{\tau}$ est un $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F^0, \tau}} W(k)$ -module libre. De plus,

$$\varphi : \mathbb{D}(H)_{\tau} \rightarrow \mathbb{D}(H)_{\sigma\tau}$$

Rappelons que k est une extension du corps résiduel de \mathcal{O} . Cela définit canoniquement un $\tau_0 : F^0 \hookrightarrow W(k)_{\mathbb{Q}}$, qui définit lui-même un isomorphisme

$$\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F^0, \tau_0}} W(k) \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}}(k)$$

Soit $\sigma_{\mathcal{O}}$ le Frobenius de $W_{\mathcal{O}}(k)$.

Définition B.8.1. On note $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H) = \mathbb{D}(H)_{\tau_0}$, un $W_{\mathcal{O}}(k)$ -module libre de rang $\text{ht}_{\mathcal{O}} H = \frac{\text{ht } H}{[F:\mathbb{Q}_p]}$. Il est muni d'un opérateur $\sigma_{\mathcal{O}}$ -linéaire $\varphi = \frac{\pi}{p^{[F^0:\mathbb{Q}_p]}} \varphi^{[F^0:\mathbb{Q}_p]}$.

Proposition B.8.2. *Le foncteur $H \mapsto (\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H), \varphi_{\mathcal{O}})$ induit une équivalence entre la catégorie des \mathcal{O} -modules π -divisibles sur k et celle des couples (M, φ) où M est un $W_{\mathcal{O}}(k)$ -module libre de rang fini et $\varphi : M \rightarrow M$ est une application $\sigma_{\mathcal{O}}$ -linéaire telle que $\pi M \subset \varphi(M)$.*

Démonstration. Il suffit de voir que $(D, \varphi) \mapsto (D_{\tau_0}, \frac{\pi}{p^{[F^0:\mathbb{Q}_p]}}\varphi^{[F^0:\mathbb{Q}_p]})$ induit une équivalence entre les couples, sur $W(k)$, (D, φ) tels que $pD \subset \varphi(D) \subset D$ et si $V = p\varphi^{-1}$, alors \mathcal{O} agit naturellement sur D/VD et les (M, φ) comme dans l'énoncé. Mais, si $D = \bigoplus_{\tau} D_{\tau}$,

$$V : D_{\tau} \longrightarrow D_{\sigma^{-1}\tau} \quad \text{et} \quad D/VD = \bigoplus_{\tau} D_{\tau}/VD_{\sigma\tau}$$

et donc,

$$\forall \tau \neq \tau_0, \quad V : D_{\sigma\tau} \xrightarrow{\sim} D_{\tau}$$

est un isomorphisme tandis que

$$D/VD = D_{\tau_0}/VD_{\sigma\tau_0}$$

On en déduit que $VD_{\sigma\tau_0} = V^{[F^0:\mathbb{Q}_p]}D_{\tau_0}$ et en posant $V_{\mathcal{O}} = V^{[F^0:\mathbb{Q}_p]}$, on en déduit facilement que $(D, V) \mapsto (D_{\tau_0}, V_{\mathcal{O}})$ est une équivalence avec les couples tels que $\pi D \subset V_{\mathcal{O}}D$. On a alors $\varphi_{\mathcal{O}}V_{\mathcal{O}} = \pi$. \square

Proposition B.8.3. *Supposons $p \neq 2$. Soit \mathcal{E} le cristal de H algèbre de Lie de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle sur $\text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(\text{Spec}(k)/\text{Spec}(\mathcal{O}))$. Le morphisme de Frobenius $F : H \longrightarrow H^{(q)}$ commute à l'action de \mathcal{O} et définit donc $F : \text{Fr}_q^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. Alors, $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$ s'identifie à*

$$\Gamma(\text{Spec}(k) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}), \mathcal{E})$$

et φ au morphisme induit par F .

Démonstration. Soit \mathcal{E}' le cristal de H , algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle sur $\text{NCRIS}(\text{Spec}(k)/\text{Spec}(W(k)))$. Alors,

$$\mathbb{D}(H) \simeq \Gamma(\text{Spec}(k) \hookrightarrow \text{Spec}(W(k)), \mathcal{E}')$$

et par la propriété de cristal

$$\mathbb{D}(H) \otimes_{W(k)} \mathcal{O} \simeq \Gamma(\text{Spec}(\mathcal{O}/p\mathcal{O}) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}), \mathcal{E}')$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(H)_{\tau_0} &= (\mathbb{D}(H) \otimes_{W(k)} \mathcal{O})_{\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}} \\ &\simeq \Gamma(\text{Spec}(\mathcal{O}/p\mathcal{O}) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}), \Pi_{\mathcal{O}*}\mathcal{E}) \\ &= \Gamma(\text{Spec}(\mathcal{O}/p\mathcal{O}) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}), \mathcal{E}) \\ &= \Gamma(\text{Spec}(k) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}), \mathcal{E}) \end{aligned} \quad \square$$

Bibliographie

- [1] V. Berkovich. Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78:5–161, 1993.
- [2] P. Berthelot, L. Breen, and W. Messing. *Théorie de Dieudonné cristalline*. II, volume 930. Springer-Verlag, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, 1982.
- [3] P. Berthelot and A. Ogus. F-isocrystals and de Rham cohomology. i. *Invent. Math.*, 72(2):159–199, 1983.
- [4] S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud. Formal and rigid geometry. IV. the reduced fibre theorem. *Invent. Math.*, 119(2):361–398.
- [5] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples et applications. *Prépublication*.
- [6] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques. *À paraître à Invent. Math.*
- [7] A.J. de Jong. Crystalline dieudonné module theory via formal and rigid geometry. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 82:5–96, 1995.
- [8] V.G. Drinfeld. Elliptic modules. *Mat. Sb. (N.S.)*, 136(94):594–627, 1974.
- [9] V.G. Drinfeld. Coverings of p -adic symmetric domains. *Functional Analysis and its Applications*, 10(2):29–40, 1976.
- [10] G. Faltings. Almost étale extensions. In *Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques, II.*, volume 279 of *Astérisque*, pages 185–270, 2002.
- [11] G. Faltings. Group schemes with strict \mathcal{O} -action. *Mosc. Math. J.*, 2(2):249–279, 2002.
- [12] L. Fargues. Application de Hodge-Tate duale d'un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification. *À paraître à Duke Math.*
- [13] L. Fargues. Cohomologie des espaces de modules de groupes p -divisibles et correspondances de langlands locales. In *Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et Correspondances de Langlands locales*, *Astérisque* 291, 2004.
- [14] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [15] Michael Harris. The local Langlands correspondence: notes of (half) a course at the IHP Spring 2000. *Astérisque*, (298):17–145, 2005. Automorphic forms. I.
- [16] M. Hazewinkel. *Formal groups and applications*, volume 78 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [17] M.J. Hopkins and B.H. Gross. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*,

- volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [18] N. Katz and B. Mazur. *Arithmetic moduli of elliptic curves*, volume 108 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1985.
 - [19] R. Kiehl. Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie. *J. Reine Angew. Math.*, 234:89–98, 1969.
 - [20] J. Lubin. Canonical subgroups of formal groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 251:103–127, (1979).
 - [21] W. Messing. The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes. *Lecture Notes in Mathematics*, 264, 1972.
 - [22] M. Rapoport, Th. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*. Number 141 in *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
 - [23] M. Raynaud and L. Gruson. Critères de platitude et de projectivité. Techniques de platisation d'un module. *Invent. Math.*, 13:1–89, 1971.
 - [24] P. Valabrega. On the excellent property for power series rings over polynomial rings. *J. Math. Kyoto Univ.*, 15(2):387–395, 1975.
 - [25] P. Valabrega. A few theorems on completion of excellent rings. *Nagoya Math. J.*, 61:127–133, 1976.
 - [26] Jiu-Kang Yu. On the moduli of quasi-canonical liftings. *Compositio Math.*, 96(3):293–321, 1995.
 - [27] Thomas Zink. The display of a formal p -divisible group. In *Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques (I)*, *Astérisque* 278, pages 127–248, 2002.

Chapitre II

L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau des points

Introduction

Le but de ce chapitre est de démontrer l'existence de l'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau des points c'est-à-dire de décrire la bijection correspondante. Nous nous inspirons bien sûr de [4] (cependant l'auteur ne garantit pas que la bijection décrite coïncide avec celle de [4] qu'il n'a pu complètement comprendre).

Cet isomorphisme n'est pas algébrique: un $\overline{\mathbb{Q}_p}$ -point peut s'envoyer sur un \mathbb{C}_p -point ne provenant pas d'un $\overline{\mathbb{Q}_p}$ -point. C'est pourquoi nous devons travailler avec des points à valeurs dans de "gros corps" du type \mathbb{C}_p . Par points nous entendons donc ceux intervenant par exemple dans la théorie des espaces analytiques de Berkovich: ce sont ceux à valeurs dans un corps valué complet pour une valuation de rang 1 extension de \mathbb{Q}_p .

La simplification par rapport à la construction de l'isomorphisme dans le cas général provient de ce que l'on n'a pas à introduire d'éclatements admissibles ou de modèles entiers particuliers des espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld: si $K|\mathbb{Q}_p$ est valué complet pour une valuation de rang 1, les points à valeurs dans K de la tour de Lubin-Tate et de Drinfeld sont définis indépendamment du modèle entier. En particulier, cet article est indépendant de la construction du schéma formel du premier chapitre de ce livre.

L'utilisation de corps valués pour des valuations non-discrètes à corps résiduel non forcément parfait introduit des problèmes de théorie de Hodge p -adique non disponibles dans la littérature. Les résultats associés peuvent se déduire de l'approche utilisée dans [3]. Nous ne les démontrons pas dans cet article mais nous

y consacrons un appendice dans lequel nous y exposons les résultats auxquels on peut parvenir en utilisant les méthodes de [3].

L'un des autres problèmes auquel on est confronté est le fait que l'on travaille avec des \mathcal{O} -modules formels, le cas usuel correspondant à $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$. Pour y remédier on applique la théorie des \mathcal{O} -extensions vectorielles universelles développée dans l'appendice B du premier chapitre. Très peu est nécessaire: seules les sections 1 à 4 de cet appendice sont utilisées, nous n'utiliserons pas le fait que le cristal algèbre de Lie de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle s'étend aux \mathcal{O} -puissances π -divisées, qui est la partie délicate de l'appendice B du premier chapitre. L'utilisation de cette théorie relative à \mathcal{O} rend la rédaction des problèmes reliés purement formelle. Seul le cas de l'utilisation des théorèmes de comparaison cristallins n'est pas rédigé dans ce cadre relatif: l'auteur n'a pas eu le courage de développer la théorie des anneaux de Fontaine obtenus en remplaçant les vecteurs de Witt par les vecteurs de Witt ramifiés...

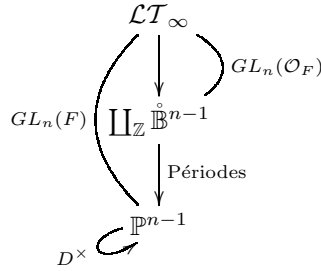
Dans cet article nous donnons deux descriptions différentes de l'isomorphisme. La première dans le chapitre 9 est la plus simple. La seconde dans le chapitre 12 est plus alambiquée mais s'adapte mieux au cas relatif (on renvoie à l'introduction du chapitre II.12 pour plus de détails).

Avant de décrire succinctement la bijection, rappelons quelques faits sur les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld associés à $F|\mathbb{Q}_p$. Plaçons-nous au niveau des points de ces espaces. Soit D l'algèbre à division d'invariant $\frac{1}{n}$ sur F . La tour de Lubin-Tate $(\mathcal{LT}_K)_{K \subset GL_n(\mathcal{O}_F)}$ est une tour indexée par les sous-groupes ouverts K de $GL_n(\mathcal{O}_F)$, munie d'une action "horizontale" de D^\times (sur chaque élément de la tour) et verticale (par correspondances de Hecke) de $GL_n(F)$. Soit $\mathcal{LT}_\infty = \varprojlim_K \mathcal{LT}_K$ (cela a bien un sens au niveau des points), qui est muni d'une action de $GL_n(F) \times D^\times$. Elle forme un pro-revêtement de groupe $GL_n(\mathcal{O}_F)$

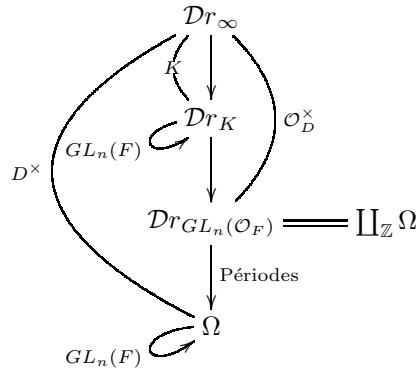
$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{LT}_\infty & \\
 & \downarrow & \\
 K & \downarrow & \\
 & \mathcal{LT}_K & \\
 D^\times & \downarrow & \\
 & \mathcal{LT}_{GL_n(\mathcal{O}_F)} & = \coprod_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}^{n-1}
 \end{array}
 \quad GL_n(\mathcal{O}_F)$$

où $\mathcal{LT}_{GL_n(\mathcal{O}_F)}$ est l'espace de Lubin-Tate sans niveau (une union disjointe de boules p -adiques ouvertes de dimension $n - 1$, car on travaille en fait avec des espaces de Rapoport-Zink et non les espaces de Lubin-Tate classiques), qui classe les déformations de groupes formels de dimension 1 et \mathcal{LT}_K est obtenu en trivialisant partiellement le module de Tate de la déformation universelle au-dessus de $\mathcal{LT}_{GL_n(\mathcal{O}_F)}$ (on force la monodromie sur le module de Tate à vivre dans K).

On a donc $\mathcal{LT}_\infty/GL_n(\mathcal{O}_F) = \coprod_{\mathbb{Z}} \mathring{\mathbb{B}}^{n-1}$. Il y a de plus une application des périodes de Hodge-De-Rham $\mathcal{LT}_K \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$, donnée par la filtration de Hodge du module filtré définissant la déformation et dont les fibres sont les orbites de Hecke. Et donc $\mathcal{LT}_\infty/GL_n(F) = \mathbb{P}^{n-1}$.

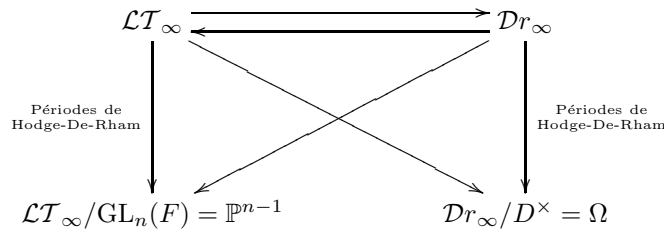


Il y a une description du même type pour la tour de Drinfeld. L'espace de Drinfeld en niveau infini \mathcal{Dr}_∞ est muni d'une action de $GL_n(F) \times D^\times$, l'action de $GL_n(F)$ est "horizontale" sur chaque élément de la tour. Il y a un diagramme pour $K \subset \mathcal{O}_D^\times$ un sous-groupe ouvert



L'application des périodes de Hodge-De-Rham n'est rien d'autre que la projection de $\coprod_{\mathbb{Z}} \Omega$ sur Ω , c'est-à-dire le quotient par $D^\times/\mathcal{O}_D^\times = \Pi^\mathbb{Z}$.

Les deux applications inverses l'une de l'autre entre \mathcal{LT}_∞ et \mathcal{Dr}_∞ sont construites en deux étapes.



On commence par construire une application de périodes de Hodge-Tate d'un des espaces en niveau infini vers l'espace des périodes de Hodge-De-Rham de l'autre espace (les flèches diagonales dans la figure précédente). Les périodes de Hodge-Tate sont données par la rigidification du module de Tate (le fait qu'on ait fixé une base de ce module au sommet de la tour) et la suite de Hodge-Tate, contrairement aux périodes de Hodge-De-Rham données elles par la rigidification de la cohomologie cristalline (l'isocrystal du groupe p -divisible) et la filtration de Hodge. Puis on relève la flèche en niveau infini en utilisant la théorie de Messing qui permet de construire des éléments dans le module de Tate en les construisant modulo p .

Nous n'expliquerons pas davantage ce dernier point dans l'introduction, mais afin d'en donner un avant-goût citons le point-clef suivant: soit $K|\mathbb{Q}_p$ une extension valuée complète et H un groupe p -divisible sur \mathcal{O}_K . Notons $\bar{\eta} = \text{Spec}(\bar{K})$. Alors le module de Tate de H admet deux définitions: l'une en fibre générique, la définition usuelle

$$T_p(H) = \varprojlim_n H[p^n](\bar{K}) = \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, H_{\bar{\eta}})$$

l'autre modulo p

$$T_p(H) = \{ f \in \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, H \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) \mid f_*(1) \in \text{Fil Lie}(E(H)) \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}} \}$$

où $\text{Lie } E(H)$ désigne l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de H munie de sa filtration de Hodge et $f_* : \mathcal{O}_{\bar{K}} \rightarrow \text{Lie } E(H) \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}}$ est le morphisme induit sur les cristaux de Messing évalués sur l'épaississement à puissances divisées $\mathcal{O}_{\bar{K}} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$. La démonstration est un jeu basé sur ces deux aspects: fibre générique et modulo p . Les deux groupes p -divisibles sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ que l'on déforme pour définir les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld sont reliés modulo p , l'un est isogène à un produit d'un nombre fini de copies de l'autre, et l'on peut ainsi "transférer" des éléments du module de Tate sur une des tours vers l'autre.

Une autre interprétation de cet isomorphisme est donnée dans la section II.10. On peut associer à un point de l'une des deux tours en niveau infini une matrice de périodes dans $M_n(B_{cris}^+)$. En effet, pour la tour de Lubin-Tate le théorème de comparaison entre cohomologie cristalline et cohomologie étale p -adique pour les groupes p -divisibles fournit une matrice de périodes X_{cris} à coefficients dans B_{cris}^+ , une fois que l'on a fixé une base du module de Tate (la rigidification en niveau infini) et une base du module de Dieudonné (la rigidification définissant la déformation)

$$(B_{cris}^+)^n \xrightarrow{\sim} V_p \otimes B_{cris}^+ \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^{\mathcal{L}T} \otimes B_{cris}^+ \xleftarrow{\sim} (B_{cris}^+)^n$$

Pour la tour de Drinfeld il y a un isomorphisme de $D \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}^+$ -modules en niveau infini

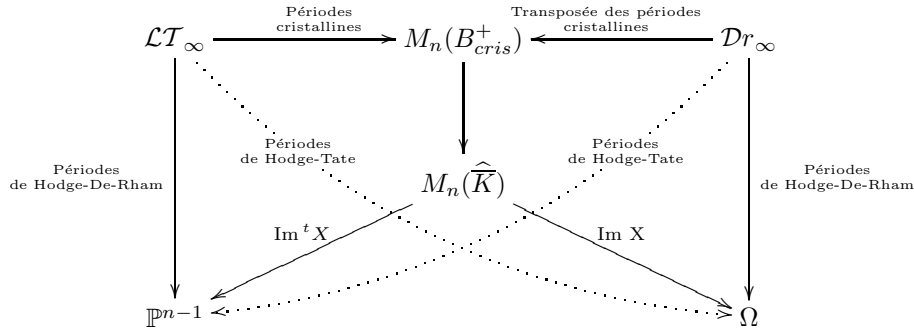
$$D \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}^+ \xrightarrow{\sim} V_p \otimes B_{cris}^+ \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^{\mathcal{D}r} \otimes B_{cris}^+ \xleftarrow{\sim} D \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}^+$$

utilisant la D -équivariance de l'isomorphisme des périodes cristalline, on en déduit une matrice $Y_{cris} \in M_n(B_{cris}^+)$ comme précédemment.

L'isomorphisme entre les deux tours consiste alors à prendre la transposée de ces matrices de périodes

$$Y_{cris} = {}^t X_{cris}$$

Si X_{cris} désigne la matrice de périodes sur \mathcal{LT}_∞ , sa réduction modulo l'idéal d'augmentation $B_{cris}^+ \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{K}}$, X est telle que les colonnes de X engendrent les périodes de Hodge-De-Rham et ses lignes les périodes de Hodge-Tate!



(les deux flèches $M_n(\widehat{K}) \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ et $M_n(\widehat{K}) \rightarrow \Omega$ ne sont définies que sur le sous-ensemble des matrices de rang $n - 1$). Dans le diagramme précédent l'image des deux flèches “Périodes cristallines” sont les matrices $X_{cris} \in M_n(B_{cris}^+)$ vérifiant une équation fonctionnelle “à la Fontaine” du type

$$X_{cris}^\varphi \Psi = pX_{cris}$$

où $\Psi \in \mathrm{GL}_n(W(\overline{\mathbb{F}}_p)[\frac{1}{p}])$ est la matrice d'un Frobenius sur un certain isocrystal, X_{cris}^φ est obtenue en appliquant le Frobenius cristallin aux termes de la matrice et la réduite via $B_{cris}^+ \rightarrow \widehat{K}$, $X \in M_n(\widehat{K})$, vérifie

$$\mathrm{rang}(X) = n - 1$$

Prérequis: Le chapitre 3 fournit les rappels nécessaires concernant les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld. Le seul prérequis non rappelé est la théorie de la déformation de Grothendieck-Messing ([9]).

Avertissements: Dans tout l'article on supposera $p \neq 2$. Il est conseillé au lecteur de supposer en première lecture que $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$.

II.1 Suite de Hodge-Tate des groupes p -divisibles dans le cas infiniment ramifié

Soit $K|\mathbb{Q}_p$ un corps valué complet pour une valuation à valeurs dans \mathbb{R} étendant celle de \mathbb{Q}_p .

Le théorème suivant se déduit des résultats de l'appendice C. Le lecteur peu familier avec la théorie de Hodge p -adique peut en sauter la démonstration.

Théorème II.1.1. *Soit G un groupe p -divisible sur \mathcal{O}_K . Il y a une décomposition de Hodge-Tate: une suite de $\text{Gal}(\overline{K}|K)$ -modules continus*

$$0 \longrightarrow \omega_G^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}(1) \longrightarrow T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

dont la cohomologie comme suite de $\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ -modules est annulée par $p^{\frac{1}{p-1}}$.

Démonstration. On utilise le théorème C.2.2 de l'appendice C. Soit E le cristal de Messing de G évalué sur l'épaississement $A_{cris} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}}$. Il est muni d'une filtration $\text{Fil } E$ telle que

$$E/\text{Fil } E = \omega_G^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \quad \text{et} \quad \text{Fil } E/\text{Fil}^1 A_{cris}.E = \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

Il y a de plus des inclusions strictement compatibles aux filtrations

$$tE \subset T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} \subset E$$

où $\deg(t) = 1$, $\text{Fil}^{-1} E = E$, $\text{Fil}^0 E = \text{Fil } E$ et $\forall i \geq 1$, $\text{Fil}^i E = \text{Fil}^i A_{cris}.E + \text{Fil}^{i+1} A_{cris}.E$.

La suite de Hodge-Tate est alors déduite des inclusions précédentes en utilisant la compatibilité aux filtrations, il s'agit de

$$t.E/\text{Fil}^0 E \longrightarrow T_p(G) \otimes A_{cris}/\text{Fil}^1 A_{cris} \longrightarrow \text{Fil}^0 E/\text{Fil}^1 A_{cris}.E$$

Rappelons maintenant qu'il existe $\xi \in \text{Fil}^1 A_{cris}$ tel que $\text{Gr}^1 A_{cris} = \mathcal{O}_{\widehat{K}} \cdot \bar{\xi}$ et

$$t \bmod \text{Fil}^2 A_{cris} = a \cdot \bar{\xi} \in \text{Gr}^1 A_{cris}, \quad \text{où} \quad v_p(a) = \frac{1}{p-1}$$

Soit donc $\alpha \in A_{cris}$ tel que $v_p(\theta(\alpha)) = \frac{1}{p-1}$ et $t \equiv \alpha \xi \bmod \text{Fil}^2 A_{cris}$.

Montrons que le conoyau de l'application de droite dans la suite de Hodge-Tate est annulé par $p^{\frac{1}{p-1}}$. Soit $x \in \text{Fil}^0 E$. D'après les inclusions précédentes on a $tx \in \text{Fil}^1 E \cap (T_p(G) \otimes A_{cris})$. Or, puisque les inclusions sont strictement compatibles aux filtrations, $\text{Fil}^1 E \cap (T_p(G) \otimes A_{cris}) = T_p(G) \otimes \text{Fil}^1 A_{cris}$. Donc

$$\alpha t.x \in t.T_p(G) \otimes A_{cris} + T_p(G) \otimes \text{Fil}^2 A_{cris}$$

Cela implique qu'il existe $y \in T_p(G) \otimes A_{cris}$ tel que

$$t(\alpha.x - y) \in T_p(G) \otimes \text{Fil}^2 A_{cris}$$

Mais $t : \text{Gr}^0 A_{cris} \longrightarrow \text{Gr}^1 A_{cris}$ est injective. Donc $\alpha.x - y \in T_p(G) \otimes \text{Fil}^1 A_{cris}$. Par réduction, on en déduit que $\theta(\alpha).x \equiv y \bmod \text{Fil}^1 A_{cris}.E$, ce qui est le résultat cherché.

L'annulation des autres groupes de cohomologie de la suite de Hodge-Tate par $p^{\frac{1}{p-1}}$ se fait de façon absolument identique. \square

Bien sûr la suite est définie sans recours à la théorie de Hodge p -adique, celle-ci ne sert que pour démontrer que la cohomologie de la suite est annulée par tout élément de valuation supérieure ou égale à $\frac{1}{p-1}$. Rappelons en effet que

$$\alpha_G : T_p(G) \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

est défini de la façon suivante: pour $x \in T_p(G) = \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G/\mathcal{O}_{\widehat{K}})$ celui-ci donne par dualité de Cartier un morphisme

$$x^D : G/\mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow \mu_{p^\infty}$$

sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\widehat{K}})$, donc sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{K}})$. Il induit un morphisme

$$(x^D)^* : \mathcal{O}_{\widehat{K}} \frac{dT}{T} \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

et alors

$$\alpha_G(x) = (x^D)^* \frac{dT}{T}$$

L'application $\omega_G^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}(1) \longrightarrow T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{K}}$ est définie par dualisation de α_{G^D} , c'est ${}^t\alpha_{G^D}(1)$ après identification de $T_p(G^D)$ avec $T_p(G)^*(1)$.

Remarque II.1.2. Soit $\mathcal{O}_{K_0} \subset \mathcal{O}_K$ un anneau de Cohen. Lorsque $K|K_0$ est de degré fini, il existe des “quasi-sections” $\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ -linéaires de chaque côté de la suite exacte telles que les composées donnent la multiplication par un élément de valuation $\frac{1}{p-1} + v_p(\mathcal{D}_{K/K_0})$, où \mathcal{D} désigne la différentielle, cf. [6]. Cela peut s'obtenir avec les méthodes précédentes en calculant l'annulateur de t dans un gradué de $A_{\text{cris}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathcal{O}_K$. Dans notre cas infiniment ramifié, cette suite exacte n'est en général pas scindée après inversion de p , il n'y a pas de décomposition de Hodge-Tate; l'obstruction provient de la Connexion de Gauss Manin et du fait que $\Omega_{K/K_0}^1 \neq 0$, alors que ce module est nul dans l'article [6]. Un tel théorème ne peut s'obtenir par les méthodes de [6], qui sont purement “de Rham”: il faut utiliser les propriétés cristallines de certains objets associés aux groupe p -divisibles.

Remarque II.1.3. Si pour une extension K' de K contenue dans \overline{K} l'action de $\text{Gal}(\overline{K}|K)$ sur $T_p(G)$ se factorise via $\text{Gal}(K'|K)$, il y a alors une décomposition de Hodge-Tate sur K' , c'est-à-dire une suite

$$0 \longrightarrow \omega_G^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}'}(1) \longrightarrow T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{K}'} \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}'} \longrightarrow 0$$

dont la cohomologie est annulée par tout élément de valuation $\geq \frac{1}{p-1}$. Cela résulte de ce que la suite peut être définie sans recours à la théorie de Fontaine comme ci-dessus et que $\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_{\widehat{K}'}$.

Soit $\text{Lie } E(G)$ l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de G . Elle possède une filtration donnée par la partie vectorielle

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D} \longrightarrow \text{Lie } E(G) \longrightarrow \omega_G^* \longrightarrow 0$$

Alors, l'application de Hodge-Tate α_G se décrit également de la façon suivante:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{Filtré}}(\text{Lie } E(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \text{Lie } E(G)) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K, \omega_{G^D}) \\ & & \downarrow \\ & & \omega_{G^D} \end{array}$$

où l'application verticale est $f \mapsto f(1)$, puisque $\text{Lie } E(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \text{Fil } \text{Lie } E(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \mathcal{O}_K$.

II.1.1 Décomposition de Hodge-Tate d'un \mathcal{O} -module π -divisible

On reprend les notations de l'appendice B du premier chapitre. On y note F une extension de degré fini de \mathbb{Q}_p et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$ son anneau des entiers.

Soit K comme dans les sections précédentes et supposons que $K|F$. Soit G un \mathcal{O} -module π -divisible sur \mathcal{O}_K , c'est-à-dire un groupe p -divisible muni d'une action de \mathcal{O} induisant l'action naturelle sur son algèbre de Lie. Soit la suite exacte de Hodge-Tate définie dans la section précédente

$$0 \longrightarrow \omega_G^* \otimes \widehat{K}(1) \longrightarrow V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{K} \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \widehat{K} \longrightarrow 0$$

Il s'agit d'une suite de $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K$ -modules.

On pose

$$\widetilde{\omega}_{G^D} = \omega_{G^D}/I \cdot \text{Lie } E(G), \text{ où } I = \ker(\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K)$$

qui est la partie vectorielle de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle de G . Rappelons en effet que si

$$0 \longrightarrow V(G) \longrightarrow E(G) \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

est l'extension vectorielle universelle de G , alors la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle est le poussé en avant par l'application $V(G) \rightarrow V(G)/I \cdot \text{Lie } E(G)$ de cette extension.

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_G^* \otimes \widehat{K}(1) & \longrightarrow & V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{K} & \longrightarrow & \omega_{G^D} \otimes \widehat{K} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & V_p(G) \otimes_F \widehat{K} & \longrightarrow & \widetilde{\omega}_{G^D} \otimes \widehat{K} \end{array}$$

Proposition II.1.4. *La suite*

$$0 \longrightarrow \omega_G^* \otimes \widehat{K}(1) \longrightarrow V_p(G) \otimes_F \widehat{K} \longrightarrow \widetilde{\omega}_{G^D} \otimes \widehat{K} \longrightarrow 0$$

extraite du diagramme précédent est exacte.

Démonstration. La surjectivité de l'application de droite est claire. De plus la composée des deux applications est nulle. D'après la remarque B.9 de l'appendice B du premier chapitre

$$\dim \omega_G^* \otimes \widehat{K}(1) + \dim \widetilde{\omega}_{G^D} \otimes \widehat{K} = \dim V_p(G) \otimes_F \widehat{K}$$

Il suffit donc de montrer que l'application de gauche est injective c'est-à-dire

$$\omega_G^* \otimes \widehat{K} \cap I.V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{K} = 0$$

Mais $I[\frac{1}{p}]$ est un produit de corps, il existe donc $e \in I[\frac{1}{p}]$ tel que $e.I[\frac{1}{p}] = I[\frac{1}{p}]$.

Mais $I[\frac{1}{p}].\omega_G^* \otimes \widehat{K} = 0$, d'où le résultat. \square

Remarque II.1.5. Comme dans la section précédente l'application $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, G) \longrightarrow \widetilde{\omega}_{G^D}$ se définit de la façon suivante en termes de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle $E_{\mathcal{O}}(G)$: si $x : F/\mathcal{O}_F \longrightarrow G_{\mathcal{O}_K}$, alors il induit un morphisme $x_* : \mathcal{O}_K \longrightarrow \text{Lie}(E_{\mathcal{O}}(G))$, puisque $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$, le faisceau structural du site cristallin, s'identifie au cristal algèbre de Lie de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle de F/\mathcal{O}_F .

Remarque II.1.6. La démonstration précédente permet de borner la valuation de l'annulateur de la cohomologie de version entière de la suite précédente

$$0 \longrightarrow \omega_G^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}(1) \longrightarrow T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow \widetilde{\omega}_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

en fonction seulement du degré de ramification de $F|\mathbb{Q}_p$.

II.2 Propriétés particulières de l'application de Hodge-Tate pour les groupes p -divisibles formels de dimension 1

On reprend les notations de la section précédente.

II.2.1 Les périodes de Hodge-Tate vivent dans l'espace de Drinfeld

Nous utiliserons la proposition suivante afin de définir l'isomorphisme au niveau des points.

Proposition II.2.1. *Soit G un groupe p -divisible sur \mathcal{O}_K . Considérons la suite de Hodge-Tate de G^D*

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D}^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}(1) \longrightarrow T_p(G)^*(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow \omega_G \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

et plus particulièrement l'application $\alpha_{G^D} : T_p(G)^*(1) \longrightarrow \omega_G \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$. Si G est un groupe p -divisible formel c'est-à-dire si sa fibre spéciale G_k ne possède pas de partie étale alors l'application α_{G^D} est injective.

Démonstration. Si $x : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow G^D/\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ et $x^D : G/\mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow \mu_{p^\infty}$ alors, $x = 0 \Leftrightarrow x^D = 0$. De plus, G étant formel $x^D = 0$ ssi l'application tangente associée est nulle, d'où le résultat. \square

Corollaire II.2.2. *Soit G un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension 1 sur \mathcal{O}_K . Notons $\Omega \subset \mathbb{P}(V_p(G)^*(1))$ l'espace de Drinfeld au sens de Berkovich obtenu en enlevant les hyperplans F -rationnels. Alors, avec les notations précédentes*

$$(V_p(G)^*(1) \otimes_F \widehat{K} \rightarrow \omega_G \otimes \widehat{K}) \in \Omega(\widehat{K})$$

II.2.2 Raffinement, d'après Faltings

Remarque II.2.3. Soit G un groupe p -divisible sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ et

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D} \longrightarrow E(G) \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

son extension vectorielle universelle sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$. Alors, si

$$\begin{aligned} E(G)(\mathcal{O}_{\widehat{K}}) &= \varprojlim_n E(G)(\mathcal{O}_{\widehat{K}}/p^n \mathcal{O}_{\widehat{K}}) \\ G(\mathcal{O}_{\widehat{K}}) &= \varprojlim_n G(\mathcal{O}_{\widehat{K}}/p^n \mathcal{O}_{\widehat{K}}) \end{aligned}$$

il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow E(G)(\mathcal{O}_{\widehat{K}}) \longrightarrow G(\mathcal{O}_{\widehat{K}}) \longrightarrow 0$$

Cela résulte aisément de la lissité des morphismes $E(G) \longrightarrow G$ réduits mod $\mathcal{O}_{\widehat{K}, \geq \lambda}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$ et de la surjectivité sur \bar{k} .

Lemme II.2.4. *Soit G un groupe p -divisible sur \mathcal{O}_K . Notons*

$$\alpha_G : T_p(G) \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

l'application de Hodge-Tate. Soit $x = (x_n)_{n \geq 1} \in T_p(G)$, où $x_n \in G[p^n](\mathcal{O}_{\widehat{K}})$. Soit k un entier positif. Alors, $\alpha_G(x) \in p^k \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$ ssi x_k se relève en un point de p^k -torsion dans l'extension vectorielle universelle de G , i.e., un point de $E(G)[p^n](\mathcal{O}_{\widehat{K}})$.

Démonstration. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{K}} & \longrightarrow & (\mathcal{O}_{\widehat{K}} \oplus \mathbb{Q}_p)/\mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \times \alpha_G(x) & & \downarrow E(x) & & \downarrow x & & \\
0 & \longrightarrow & \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} & \longrightarrow & E(G)(\mathcal{O}_{\widehat{K}}) & \longrightarrow & G(\mathcal{O}_{\widehat{K}}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

L'élément $x_k \in G[p^k](\mathcal{O}_{\widehat{K}})$ se relève en un élément $\widetilde{x}_k = E(x)([(0, p^{-k})]) \in E(G)(\mathcal{O}_{\widehat{K}})$ et de plus

$$p^k \widetilde{x}_k = \alpha_G(x)$$

Les relèvements de x_k à $E(G)(\mathcal{O}_{\widehat{K}})$ formant un $\omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$ -torseur, le résultat s'en déduit. \square

Remarque II.2.5. On a utilisé le fait que l'extension vectorielle universelle de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_a \longrightarrow (\mathbb{G}_a \oplus \mathbb{Q}_p)/\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

Le diagramme précédent redonne la définition de Coleman de l'application de Hodge-Tate: $\alpha_G((x_n)_{n \geq 1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p^n \widetilde{x}_n$, où $\widetilde{x}_n \in E(G)(\mathcal{O}_{\widehat{K}})$ est un relèvement quelconque de x_n .

La proposition qui suit s'applique en particulier aux groupes p -divisibles formels de dimension 1 et est une légère amélioration d'un résultat de Faltings.

Proposition II.2.6 (Faltings). *Soit G un groupe p -divisible formel sur \mathcal{O}_K . Considérons la suite de Hodge-Tate de G^D*

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D}^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}(1) \longrightarrow T_p(G)^*(1) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\alpha_{G^D} \otimes Id} \omega_G \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

Supposons qu'il existe un groupe p -divisible isocline H sur k de hauteur h tel que $\mathbb{Z}_{p^h} \hookrightarrow \text{End}(H_{\widehat{k}})$ et une isogénie $\rho : H \otimes_k \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \longrightarrow G \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ telle que $p^n \rho^{-1}$ soit une isogénie. Alors, si on note pour M un "réseau" et $m \in M$ $\delta(m) = \sup\{k \mid p^{-k}m \in M\}$, on a

$$\forall x \in T_p(G)^*(1), \quad \delta(x) \leq \delta(\alpha_{G^D}(x)) \leq \delta(x) + n + 1$$

Démonstration. On peut supposer k algébriquement clos. Soit H_0 un relèvement C.M. par \mathbb{Z}_{p^h} de H à $W(k)$.

Soit $x \in T_p(G^D) \setminus pT_p(G^D)$. Supposons que $\alpha_{G^D}(x) \in p^{n+1}\omega_G \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$. Le lemme précédent implique que $x_{n+1} \in G^D[p^{n+1}](\mathcal{O}_{\widehat{K}})$ se relève en un élément

$$\widetilde{x}_{n+1} \in E(G^D)[p^{n+1}](\mathcal{O}_{\widehat{K}})$$

Il résulte de la nature cristalline de l'extension vectorielle universelle que ρ^D et $(p^n \rho^{-1})^D = p^n (\rho^D)^{-1}$ se relèvent en des morphismes

$$E(H_0^D)_{/\mathcal{O}_\kappa} \begin{array}{c} \xrightarrow{E(p^n (\rho^D)^{-1})} \\ \xleftarrow{E(\rho^D)} \end{array} E(G^D)$$

tels que $E(\rho^D)E(p^n (\rho^D)^{-1}) = p^n$ et $E(p^n (\rho^D)^{-1})E(\rho^D) = p^n$.

Considérons l'élément $y = E(\rho^D)(\widetilde{x_{n+1}}) \in E(H_0^D)[p^{n+1}](\widehat{\mathcal{O}_{\overline{K}}})$. Alors $y \neq 0$, car sinon on aurait

$$p^n \widetilde{x_{n+1}} = E(p^n (\rho^D)^{-1})(y) = 0$$

mais, via $E(G^D) \rightarrow G^D$, $p^n \widetilde{x_{n+1}} \mapsto x_1 \in G[p]^D$, ce qui est en contradiction avec $x_1 \neq 1$, puisque $x \notin pT_p(G^D)$.

Donc, $\exists z \in E(H_0^D)[p](\widehat{\mathcal{O}_{\overline{K}}})$ tel que $z \neq 0$. Soit $w \in H_0[p]^D(\widehat{\mathcal{O}_{\overline{K}}})$ son image. On a $w \neq 0$ car

$$\ker(E(H_0^D)[p](\widehat{\mathcal{O}_{\overline{K}}}) \rightarrow H_0[p]^D(\widehat{\mathcal{O}_{\overline{K}}})) = (\omega_{H_0} \otimes \widehat{\mathcal{O}_{\overline{K}}})[p] = 0$$

Soit $\iota : \mathbb{Z}_{p^h} \rightarrow \text{End}(H_0^D)$ l'action C.M. obtenue par dualisation de Cartier de l'action C.M. sur H_0 . Le module de Tate $T_p(H_0^D)$ est \mathbb{Z}_{p^h} -libre de rang 1. Donc, $\iota(\mathbb{Z}_{p^h}).w = H_0[p]^D(\widehat{\mathcal{O}_{\overline{K}}})$, qui est dans l'image de $E(H_0^D)[p] \rightarrow H_0^D[p]$, puisque le morphisme $E(H_0^D) \rightarrow H_0^D$ est \mathbb{Z}_{p^h} -équivariant. Par application du lemme II.2.4 on en déduit que

$$\alpha_{H_0^D}(T_p(H_0^D)) \subset p\omega_{H_0} \otimes \widehat{\mathcal{O}_{\overline{K}}}$$

ce qui est en contradiction avec le fait que le conoyau du morphisme de Hodge-Tate pour H_0^D est annulé par un élément de valuation $\frac{1}{p-1}$. \square

Interprétation: Dans les cas des groupes p -divisibles formels de dimension 1 la proposition précédente dit plus précisément que si le point (G, ρ) est "à distance $\leq n$ " du centre de l'espace de Lubin-Tate, alors ses périodes de Hodge-Tate dans l'espace de Drinfeld sont "dans une boule de rayon $n+1$ " dans l'immeuble associé à l'espace de Drinfeld.

II.2.3 Formule exacte

Dans l'article [5] nous donnons une formule exacte plus précise que la proposition précédente dans le cas des groupes formels de dimension 1 pour le point associé dans l'espace de Drinfeld (cf. corollaire II.2.2). Soit $|\mathcal{Z}|$ la réalisation géométrique de l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe PGL_n . Il y a une application $s : \Omega(\widehat{\overline{K}}) \rightarrow |\mathcal{Z}|$. Cette formule exprime l'image par s du point de Hodge-Tate en fonction de la filtration de ramification sur le module de Tate du groupe p -divisible. À partir des résultats de [5] on peut également améliorer nettement la proposition précédente, cf. la proposition III.2.1.

II.3 Notations concernant les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld

Nous reprenons les notations du premier chapitre. Rappelons que F est le corps de base et que l'on note $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$. On note $L = W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}}$ et σ son Frobenius.

Soit \mathbb{H} un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension 1 et hauteur n sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, qui est défini sur \mathbb{F}_q . On a donc $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{(q)}$. On note alors $\Pi = \text{Frob}_q \in \text{End}(\mathbb{H})$. Alors,

$$\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{F_n}[\Pi] \xrightarrow{\sim} \text{End}(\mathbb{H})$$

où l'on pose

$$\mathcal{O}_{F_n} = W_{\mathcal{O}}(\mathbb{F}_{q^n})$$

Posons $\mathbb{G} = \mathbb{H}^n$ qui est un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension n et \mathcal{O} -hauteur n^2 . Munissons-le d'une structure de \mathcal{O}_D -module formel spécial au sens de Drinfeld en posant

$$\iota : \mathcal{O}_D \longrightarrow \text{End}(\mathbb{G}) = M_n(\mathcal{O}_D)$$

tel que

$$\forall x \in \mathcal{O}_{F_n} \quad \iota(x) = \text{diag}(x, x^\sigma, \dots, x^{\sigma^{n-1}})$$

et

$$\iota(\Pi) = \text{diag}(\Pi, \dots, \Pi)$$

et donc

$$\forall x \in \mathcal{O}_D, \quad \iota(x) = \text{diag}(x, \Pi x \Pi^{-1}, \dots, \Pi^{n-1} x \Pi^{-(n-1)})$$

Tous les indices de \mathbb{G} sont critiques et, comme élément de $\text{PGL}_n(F) \backslash \widehat{\Omega}(\overline{\mathbb{F}}_q)$, cela définit un point dans l'intersection de n composantes irréductibles de la fibre spéciale. Il y a de plus une isogénie de \mathcal{O} -modules π -divisibles munis d'une action de \mathcal{O}_D

$$\text{Id} \oplus \Pi \oplus \dots \oplus \Pi^{n-1} : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{G} \tag{II.1}$$

de degré $q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, où \mathcal{O}_D agit diagonalement sur \mathbb{H}^n (qui n'est pas spécial). Il y a donc un isomorphisme d'isocristaux munis d'une action de D

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}$$

où les modules de Dieudonné sont les modules de Dieudonné covariants relatifs à \mathcal{O} (il s'agit de l'évaluation du cristal algèbre de Lie de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle sur $\mathcal{O}_L \rightarrow k$, cf. l'appendice B).

Convention: Désormais, on notera \mathbb{D} le module de Dieudonné covariant relatif à \mathcal{O} d'un \mathcal{O} -module π -divisible noté $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}$ dans l'appendice B du premier chapitre et, par cristal de Messing, on entendra le cristal de Messing \mathcal{O} -extension vectorielle universelle défini dans l'appendice B.

II.3.1 Modules de Dieudonné

Il y a une identification

$$\mathbb{D}(\mathbb{H}) = \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}} \mathcal{O}_L$$

muni de $\iota : \mathcal{O}_D \longrightarrow \text{End}(\mathbb{H})$ tels que si V désigne le Verschiebung

$$\begin{aligned} \forall d \otimes \lambda \in \mathbb{D}(\mathbb{H}), \quad V(d \otimes \lambda) &= d\Pi \otimes \lambda^{\sigma^{-1}} \\ \forall d' \in \mathcal{O}_D, \quad \iota(d')(d \otimes \lambda) &= d'd \otimes \lambda \end{aligned}$$

Alors,

$$\mathbb{D}(\mathbb{G}) = \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_L$$

muni de son action de ι de \mathcal{O}_D et

$$\begin{aligned} \forall d \otimes \lambda \in \mathbb{D}(\mathbb{G}), \quad V(d \otimes \lambda) &= d\Pi \otimes \lambda^{\sigma^{-1}} \\ \forall d' \in \mathcal{O}_D, \quad \iota(d')(d \otimes \lambda) &= d'd \otimes \lambda \end{aligned}$$

Dès lors on a un isomorphisme de \mathcal{O}_L -modules

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_L &\xrightarrow{\sim} \prod_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}, \sigma^k} \mathcal{O}_L \\ d \otimes \lambda &\longmapsto (d \otimes \lambda)_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Et dans ces coordonnées l'identification $\mathbb{D}(\mathbb{H})^n = \mathbb{D}(\mathbb{G})$ est donnée par

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}} \mathcal{O}_L)^n &\longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}, \sigma^k} \mathcal{O}_L \\ (x_k \otimes \lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1} &\longmapsto (\Pi^{-k} x_k \Pi^k \otimes \lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

et l'isogénie (II.1) par

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}} \mathcal{O}_L)^n &\longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}, \sigma^k} \mathcal{O}_L \\ (x_k \otimes \lambda_k)_k &\longmapsto (x_k \Pi^k \otimes \lambda_k)_k \end{aligned}$$

II.3.2 Notations concernant les espaces de Lubin-Tate

Rappelons que l'on note $\check{F} = \widehat{F^{nr}}$ le complété de l'extension maximale non-ramifiée de F dans une clôture algébrique de celui-ci. On fixe un isomorphisme entre $\overline{\mathbb{F}}_q$ et le corps résiduel de \check{F} . Celui-ci induit un isomorphisme $L \simeq \check{F}$. Néanmoins on ne confondra pas toujours ces deux corps, l'un, L , étant un corps "abstrait", l'autre, \check{F} , un corps plongé (un corps reflex).

Définition II.3.1. Soit K un corps valué complet (pour une valuation de rang 1, c'est-à-dire à valeurs dans \mathbb{R}) extension de \check{F} . On appelle point à valeurs dans K de la tour de Lubin-Tate un triplet (H, ρ, η) à isomorphisme-près, où

- H est un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension 1 sur \mathcal{O}_K
- ρ est une quasi-isogénie $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \rightarrow H \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$
- $\eta : \mathcal{O}^n \xrightarrow{\sim} T_p(H)$ est un isomorphisme de $\text{Gal}(\overline{K}|K)$ -modules, le membre de gauche étant muni de l'action triviale de Galois.

On note $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}\mathcal{T}}(K)$ cet ensemble qui est muni d'une action de $D^{\times} \times \text{GL}_n(\mathcal{O}_F)$, où D^{\times} agit à gauche par $d.\rho = \rho \circ d^{-1}$ et $\text{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ à droite par $\eta.g = \eta \circ g$, et d'une donnée de descente α vers F .

On renvoie à la section 1.4 du premier chapitre pour la définition de la donnée de descente α . On verra bientôt que cet ensemble est en fait muni d'une action de $\text{GL}_n(F)$.

Remarque II.3.2. Dans la définition précédente, la définition de η peut être remplacée par: η est un isomorphisme

$$\eta : \mathcal{O}^n \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}, H)$$

où F/\mathcal{O} désigne le groupe p -divisible étale $\varinjlim_k \pi^{-k}\mathcal{O}/\mathcal{O}$.

Définition II.3.3. On note $\mathcal{M}^{\mathcal{L}\mathcal{T}}(K)/\sim$ l'ensemble des couples (H, ρ) comme précédemment à isogénie déformant un élément de F^{\times} près, i.e., $(H, \rho) \sim (H', \rho') \Leftrightarrow \exists f : H \rightarrow H'$ une isogénie et un $x \in F^{\times}$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} H \bmod \pi & \xrightarrow{f \bmod \pi} & H' \bmod \pi \\ \rho \uparrow & & \rho' \uparrow \\ \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K & \xrightarrow{x} & \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \end{array}$$

Cet ensemble est muni d'une action de D^{\times} .

Une définition équivalente consiste à remplacer “à isogénie déformant un élément de F^{\times} près” par “à isogénie déformant une puissance de π près”.

Une troisième définition équivalente consiste à dire que (H, ρ) est équivalent à (H', ρ') ssi il existe une quasi-isogénie $f : H \rightarrow H'$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ telle que $f\rho = \rho'$, i.e., ssi la quasi-isogénie $\rho'\rho^{-1}$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$ se relève en une quasi-isogénie sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$.

II.3.3 Notations concernant les espaces de Drinfeld

Définition II.3.4. Soit K un corps valué complet extension de \check{F} . On appelle point à valeur dans K de la tour de Drinfeld un triplet (G, ρ, η) à isomorphisme-près, où

- G est un \mathcal{O}_D -module π -divisible formel spécial sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$

- ρ est une quasi-isogénie \mathcal{O}_D -équivariante

$$\mathbb{G} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \longrightarrow G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$$

- $\eta : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} T_p(G)$ est un isomorphisme de \mathcal{O}_D -modules galoisiens.

On note $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$ cet ensemble muni de son action de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^{\times}$, où $\mathrm{GL}_n(F) = \mathrm{End}_{D\text{-}\acute{e}\mathrm{q}.}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}^{\times}$ agit à gauche via $g \cdot \rho = \rho \circ g^{-1}$ et \mathcal{O}_D^{\times} agit à droite via $\eta \cdot d = \eta \circ d^{-1}$, où $d^{-1} : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_D$ est $d' \mapsto d'd^{-1}$. L'action de $\Pi \in D^{\times}$ est définie par $\Pi.(G, \rho, \eta) = (G/G[\Pi], \varphi \circ \rho, \eta \cdot \Pi)$ où $\varphi : G \rightarrow G/G[\Pi]$ et

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_D & \xrightarrow[\sim]{\eta} & T_p(G) \\ \downarrow \cdot \Pi & & \downarrow \varphi_* \\ \mathcal{O}_D & \xrightarrow[\sim]{\eta \cdot \Pi} & T_p(G/G[\Pi]) \end{array}$$

Remarque II.3.5. On renvoie à la section 1 du troisième chapitre pour la définition générale de l'action d'un élément de D^{\times} . On notera que $\{(x, x) \mid x \in F^{\times}\} \subset \mathrm{GL}_n(F) \times D^{\times}$ agit trivialement.

Remarque II.3.6. Dans la définition précédente, la définition de η peut être remplacée par: on se donne un élément

$$\eta(1) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}, G) \setminus \Pi \cdot \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}, G)$$

Remarque II.3.7. Le groupe associé à l'espace de Rapoport-Zink précédent, et noté G dans [10], est dans notre cas $(D^{opp})^{\times}$. Dans la définition précédente, on l'a identifié à D^{\times} via $d \mapsto d^{-1}$, ce qui explique que l'on pose $d \cdot \eta = \eta \circ d^{-1}$ alors que la définition usuelle des correspondances de Hecke est pour $g \in G(\mathbb{Q}_p)$, $\eta \mapsto \eta \circ g$.

Remarque II.3.8. L'identification $\mathrm{GL}_n(F) = \mathrm{End}_{D\text{-}\acute{e}\mathrm{q}.}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}^{\times}$ se déduit, avec les notations des sections qui suivent, de l'identification

$$\mathrm{End}_{D\text{-}\acute{e}\mathrm{q}.}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} = \mathrm{End}_{D\text{-}\acute{e}\mathrm{q}.}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}, V) = \mathrm{End}_{\mathcal{O}}\left(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V^{-1}\Pi}\right)$$

et d'un choix d'une base de $\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V^{-1}\Pi}$ (cf. les sections suivantes).

Définition II.3.9. Comme dans la définition II.3.3, on note $\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}(K)/\sim$ l'ensemble des couples (G, ρ) à isogénie déformant un élément de F^{\times} près. Cet ensemble est muni d'une action de $\mathrm{GL}_n(F)$.

II.3.4 Quelques rappels sur Drinfeld classique

Notons

$$N^{\mathcal{D}r} = \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} = D \otimes_F L$$

un isocrystal relativement à l'extension $L|F$. On a

$$N^{\mathcal{D}r} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} N_i^{\mathcal{D}r}, \quad \text{où } N_i^{\mathcal{D}r} = \{n \in N \mid \forall x \in F_n, \iota(x).n = x^{\sigma^{-i}} n\}$$

Relativement à cette graduation, $\deg V = \deg \Pi = +1$. On a de plus

$$\begin{aligned} D \otimes_F L &= \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} D \otimes_{F_n, \sigma^{-a}} L \\ &= \bigoplus_{\substack{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ 0 \leq b \leq n-1}} L \cdot \underbrace{\iota(\Pi^b)(e_a)}_{e_{a,b}} \end{aligned}$$

où $e_a = 1 \otimes 1 \in D \otimes_{F_n, \sigma^{-a}} L$ et $e_{a,b} = \Pi^b \otimes 1$. De plus, avec ces coordonnées

$$V(e_{a,b}) = \iota(\Pi)(e_{a,b}) = \pi^{\delta_{b,n-1}} e_{a,b+1}$$

où l'on a posé $e_{a,n} = e_{a,0}$, et

$$N_i^{\mathcal{D}r} = \bigoplus_{a+b=i} L \cdot e_{a,b}$$

L'opérateur

$$V^{-1}\Pi : N_0^{\mathcal{D}r} \longrightarrow N_0^{\mathcal{D}r}$$

est de pente 0 et fait de $(N_0^{\mathcal{D}r}, V^{-1}\Pi)$ un isocrystal unité:

$$\begin{aligned} (N_0^{\mathcal{D}r}, V^{-1}\Pi) &\simeq ((N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi} \otimes_F L, Id \otimes \sigma) \\ (N^{\mathcal{D}r})_0^{V^{-1}\Pi} &= \bigoplus_{a+b=0} F \cdot e_{a,b} \simeq F^n \end{aligned}$$

Rappelons maintenant qu'il y a des bijections

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sous-isocristaux D-stables de} \\ (N^{\mathcal{D}r}, \varphi) \end{array} \right\} &\xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sous-}F\text{-e.v. de} \\ (N^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi} \end{array} \right\} \\ N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} N_i &\longmapsto N_0^{V^{-1}\Pi} \end{aligned}$$

où φ désigne le Frobenius et pour $K|L$ une extension valuée complète

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{Filtrations D-stables de} \\ \text{codimension } n \text{ dans } N^{\mathcal{D}r} \otimes_L K \end{array} \right\} &\xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Filtrations de codimension 1 dans} \\ (N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi} \otimes_F K \end{array} \right\} \\ \text{Fil} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \text{Fil}_i &\longmapsto \text{Fil}_0 \end{aligned}$$

Alors, $(N^{\mathcal{D}r}, \varphi, \text{Fil})$ est faiblement admissible ssi pour tout sous-isocrystal $N \subset N^{\mathcal{D}r}$, on a

$$t_H(N, N \otimes_L K \cap \text{Fil}) \leq t_N(N, \varphi)$$

où t_H , resp. t_N , désigne le point terminal du polygone de Hodge, resp. Newton. L'existence de la filtration de Harder-Narashiman et sa canonicité sur $(N^{\mathcal{D}r}, \varphi, \text{Fil})$ impliquent que celle-ci est D -stable si Fil l'est et qu'il suffit donc dans ce cas-là de tester la condition d'admissibilité faible sur les sous-isocristaux D -stables ([10] chapitre 1). Restreignons-nous aux filtrations Fil D -stables de codimension n . Via les deux bijections ci-dessus, on trouve aisément

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fil} \subset N^{\mathcal{D}r} \otimes_L K \text{ telles que} \\ (N^{\mathcal{D}r}, \varphi, \text{Fil}) \text{ est faiblement} \\ \text{admissible} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fil}' \subset (N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi} \otimes K \text{ telles que} \\ \forall N' \subset (N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi} \text{ de dim. 1} \\ \text{Fil}' \cap (N' \otimes K) = (0) \end{array} \right\}$$

la condition portant donc sur les sous-isocristaux D -stables de dimension n dans $(N^{\mathcal{D}r}, \varphi)$, qui sont paramétrés par $\check{\mathbb{P}}\left((N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi}\right)(F)$, où pour E un F -ev, on note $\mathbb{P}(E)$, l'espace des filtrations de codimension 1 de E et $\check{\mathbb{P}}(E) = \mathbb{P}(\check{E})$ l'espace des droites de E . La relation d'incidence entre $\mathbb{P}(E)$ et $\check{\mathbb{P}}(E)$ est donnée par: pour $H \in \check{\mathbb{P}}(E)$, H définit une droite D dans E et donc un hyperplan, encore noté H , dans $\mathbb{P}(E)$ formé des filtrations contenant D . Ainsi $\check{\mathbb{P}}(E)$ paramètre les hyperplans dans $\mathbb{P}(E)$. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} (N^{\mathcal{D}r}, \varphi, \text{Fil}) \\ \text{faiblement admissible} \\ \text{Fil } D\text{-stable} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(N_0^{\mathcal{D}r})(K) \setminus \bigcup_{H \in \check{\mathbb{P}}((N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi})(F)} H(K) = \Omega(K)$$

où Ω désigne l'espace de Drinfeld vu comme espace de Berkovich.

Dit d'une autre façon, $\Omega(K)$ est l'ensemble des filtrations Fil de codimension 1 dans $N_0^{\mathcal{D}r} \otimes_L K$ telles que l'application suivante soit injective

$$(N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi} \hookrightarrow N_0^{\mathcal{D}r} \otimes_L K / \text{Fil}$$

II.4 Description de $\mathcal{M}^{\mathcal{L}T}(K)/\sim$ en termes de modules filtrés

Il s'agit ici d'étendre la théorie de Fontaine des modules faiblement admissibles pour les groupes de dimension 1 à des corps K non forcément de valuation discrète.

Soit un couple (H, ρ) , où H est un \mathcal{O} -module π -divisible sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$, et ρ une rigidification avec \mathbb{H} modulo p . L'algèbre de Lie de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle de H , M , est munie d'une filtration $\text{Fil} \subset M$ telle que $M/\text{Fil} \simeq \omega_H^*$. La nature cristalline de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle induit un isomorphisme

$$\rho_* : \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K \xrightarrow{\sim} M\left[\frac{1}{p}\right]$$

et $\text{Fil}_H = \rho_*^{-1}(\text{Fil}\left[\frac{1}{p}\right]) \subset \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K$ est une filtration de codimension 1.

Proposition II.4.1. *L'application précédente $(H, \rho_H) \mapsto \text{Fil}_H$ induit une bijection D^\times -équivariante*

$$\mathcal{M}^{\mathcal{L}^T}(K)/\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})(K)$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'existence du domaine fondamental de Gross-Hopkins et du fait que la restriction du morphisme des périodes à ce domaine est un isomorphisme d'espaces rigides (cf. [8] ou théorème I.4.1).

Plus précisément, étant donné une filtration $\text{Fil} \in \mathbb{P}(K)$ il existe un entier i tel que $\Pi^i \cdot \text{Fil}$ soit dans l'image du domaine fondamental de Gross-Hopkins. Il existe donc un couple $(H, \rho) \in \mathcal{M}^{\mathcal{L}^T}(K)$ induisant $\Pi^i \cdot \text{Fil}$. Alors, $\Pi^{-i} \cdot (H, \rho)$ induit Fil , d'où la surjectivité de l'application.

Pour l'injectivité, si (H, ρ) et (H', ρ') induisent la même filtration alors la quasi-isogénie

$$\rho' \circ \rho^{-1} : H \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \longrightarrow H' \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$$

est telle que l'application induite

$$(\rho' \circ \rho^{-1})_* : \text{Lie}(E(H)) \longrightarrow \text{Lie}(E(H'))$$

vérifie

$$\exists a \in \mathbb{N}, (\rho' \circ \rho^{-1})_*(\omega_{H^D}) \subset p^{-a}\omega_{H'^D}$$

et donc, d'après la théorie de Messing, l'isogénie

$$p^a \rho' \circ \rho^{-1} : (H, \rho) \longrightarrow (H', \rho') \pmod{p}$$

sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$ se relève en une isogénie: $(H, \rho) \sim (H', \rho')$. \square

Remarque II.4.2. Il se peut qu'en général pour des espaces de périodes plus généraux l'application des périodes ne soit pas surjective sur les K -points, i.e., qu'un module faiblement admissible ne provienne pas forcément d'un groupe p -divisible sur K quelconque. Par contre, le calcul des fibres de l'application des périodes (la partie injectivité dans la démonstration précédente) reste valable en général.

II.5 Description de $\mathcal{M}^{Dr}(K)/\sim$ en termes de module filtré

Soit (G, ρ) , où G est un \mathcal{O}_D -module formel spécial sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$, et ρ une rigidification avec \mathbb{G} . Soit M l'extension vectorielle universelle de G , qui est filtrée via $\text{Fil} \subset M$, où $M/\text{Fil} \simeq \omega_G^*$. Il y a une décomposition sous l'action de F_n

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{N}} M_i \quad \text{et} \quad \text{Fil} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \text{Fil}_i$$

d'où un élément $\text{Fil}_{G,0} = \rho_*^{-1}(\text{Fil}_0) \subset \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K$, $\text{Fil}_{G,0} \in \Omega(K)$.

Proposition II.5.1. *L'application $(G, \rho) \mapsto \text{Fil}_{G,0}$ induit une bijection $\text{GL}_n(F)$ -équivariante entre $\mathcal{M}^{\mathcal{D}^r}(K)/\sim$ et $\Omega(K)$ avec Ω défini par*

$$\Omega(K) = \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0})(K) \setminus \bigcup_{H \in \check{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0})^{V=\Pi}(F)} H(K)$$

Démonstration. Cela résulte de ce que l'application des périodes est un isomorphisme rigide pour les espaces de Drinfeld, de l'égalité $\Omega(K) = \widehat{\Omega}(\mathcal{O}_K)$, où $\widehat{\Omega}$ est le schéma formel de Drinfeld, du théorème de Drinfeld et du fait que les deux applications de périodes, celle définie par Drinfeld et celle définie dans [10], coïncident. \square

II.6 Prolongement des isogénies

II.6.1 Prolongement

Soit H un groupe p -divisible sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Soit \mathcal{C} l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (H', f) , où H' est un groupe p -divisible sur \mathcal{O}_K et $f : H' \rightarrow H$ une quasi-isogénie sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Pour un tel couple $T_p(f) : T_p(H') \hookrightarrow V_p(H)$.

Lemme II.6.1. *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\rightarrow \{ \text{réseaux Gal}(\overline{K}|K) - \text{stables dans } V_p(H) \} \\ (H', f) &\mapsto \text{Im } T_p(f) \end{aligned}$$

est une bijection.

Démonstration. C'est une conséquence de ce que, pour \mathcal{G} un groupe fini localement libre sur \mathcal{O}_K et $I \subset \mathcal{G}_\eta$ un sous-groupe fini localement libre, il existe un unique prolongement $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{G}$ de l'inclusion $I \subset \mathcal{G}_\eta$, où \mathcal{I} est un sous-groupe fini localement libre. Le groupe \mathcal{I} est obtenu par adhérence schématique (cf. le chapitre 2 de [11], pour le cas de valuation discrète et le lemme qui suit en général). \square

Lemme II.6.2. *Soit $E \subset K^n$ un sous- K -espace vectoriel. Alors, $E \cap \mathcal{O}_K^n$ est un \mathcal{O}_K -module libre de rang fini facteur direct.*

II.6.2 Définition de l'action de $\text{GL}_n(F)$ sur $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$

On a défini une action de $\text{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ sur $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$. Utilisons le lemme précédent pour étendre cette action à $\text{GL}_n(F)$. Soient $[(H, \rho, \eta)] \in \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$ et $g \in \text{GL}_n(F)$ (les crochets signifient que l'on prend une classe d'isomorphisme de triplets). D'après le lemme précédent, au réseau Galois-stable $\eta(g \cdot \mathcal{O}_F^n)$ dans $V_p(H)$ correspond une quasi-isogénie $\varphi : H \rightarrow H'$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ telle que $\varphi_*^{-1}(T_p(H')) = \eta(g \cdot \mathcal{O}_F^n)$, où $\varphi_* : V_p(H) \xrightarrow{\sim} V_p(H')$. On pose alors

$$g \cdot [(H, \rho, \eta)] = [(H', (\varphi \bmod p) \circ \rho, \varphi_* \circ \eta \circ g)]$$

II.7 Diverses descriptions des points de la tour de Lubin-Tate en niveau infini

Le but de cette section est d'aboutir à une description la plus simple possible de $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$, la plus adaptée à la construction de l'isomorphisme.

II.7.1 Description de $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$ en termes de modules filtrés rigidifiés

Définition II.7.1. Soit $[(H, \rho)] \in \mathcal{M}^{\mathcal{L}^T}(K)/\sim$. Une rigidification du module de Tate de la classe d'isogénie $[(H, \rho)]$ est un isomorphisme de modules galoisiens

$$\eta : F^n \xrightarrow{\sim} V_p(H)$$

qui induit donc naturellement $\forall (H', \rho') \sim (H, \rho)$ un isomorphisme

$$F^n \xrightarrow{\sim} V_p(H')$$

via l'isomorphisme canonique $V_p(H) \xrightarrow{\sim} V_p(H')$, induit par le relèvement de la quasi-isogénie $\rho'\rho^{-1}$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$.

Proposition II.7.2. *L'application naturelle*

$$\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K) \longrightarrow \{([(H, \rho)], \eta) \mid [(H, \rho)] \in \mathcal{M}^{\mathcal{L}^T}(K)/\sim \text{ et } \eta \text{ une rigidification}\}$$

est une bijection $\text{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariante.

Démonstration. Décrivons l'inverse de cette application. Soit $(([(H, \rho)], \eta))$ dans le membre de droite. D'après le lemme II.6.1, il existe un unique $(H', \rho') \sim (H, \rho)$ tel que

$$\eta : \mathcal{O}_F^n \xrightarrow{\sim} T_p(H')$$

On associe alors à $(([(H, \rho)], \eta))$ le triplet (H', ρ', η') . On vérifie aisément que ces deux applications sont inverses l'une de l'autre. \square

Ainsi, les fibres de l'application

$$\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K) \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{L}^T}(K)/\sim$$

sont des $\text{GL}_n(F)$ -torseurs. Soit $U \subset \text{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ un sous-groupe compact-ouvert et $\mathcal{M}_U^{\mathcal{L}^T}(K)$ l'ensemble des K -points de l'espace de Lubin-Tate en niveau U (que nous n'avons pas défini dans cet article). En fait, on a la décomposition plus précise

d'extensions "Galoisiennes"

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K) & \\
 & \downarrow & \uparrow U \\
 GL_n(F) & \mathcal{M}_U^{\mathcal{L}T}(K) & \\
 & \downarrow & \\
 & \mathcal{M}^{\mathcal{L}T}(K)/\sim & \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))(K)
 \end{array}$$

et on peut donc ainsi dire que l'espace des périodes de Gross-Hopkins est le quotient de l'espace de Lubin-Tate en niveau infini par $GL_n(F)$.

Théorème II.7.3. *Il y a une bijection $GL_n(F) \times D^\times$ -équivariante entre l'ensemble $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K)$ et l'ensemble des couples (Fil, ζ) , où*

$$\text{Fil} \in \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})(K)$$

$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, où

$$\forall i, \zeta_i \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]$$

sont linéairement indépendants sur F , i.e., induisent une injection

$$F^n \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}],$$

et $\forall i$, le morphisme induit sur l'évaluation du cristal de Messing sur l'épaississement $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$, $\zeta_{i*} : K \rightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes K$, vérifie $\zeta_{i*}(1) \in \text{Fil}$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence de la proposition précédente couplée à la proposition II.4.1 et au critère de relèvement de Messing vis-à-vis de l'idéal à puissances divisées engendré par p . Dans cet énoncé, si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de F^n , on a posé

$$\zeta_i = \rho^{-1} \circ (\eta(e_i) \bmod p) \quad \square$$

II.7.2 Description de $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K)$ uniquement en termes du module de Tate

Voici la description la plus dépouillée possible à laquelle on peut arriver.

Théorème II.7.4. *Il y a une bijection $GL_n(F) \times D^\times$ -équivariante entre $\mathcal{M}_\infty(K)$ et les uplets $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]^n$ vérifiant*

- Les $(\zeta_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont linéairement indépendants sur F

- Si, pour $f \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]$, on note $f_*(1) \in \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K$ l'image de $1 \in \mathcal{O}_K = \text{Lie } E_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F)$ par le morphisme déduit de l'évaluation des cristaux de Messing sur l'épaississement $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$, alors

$$\dim_K \langle \zeta_{i^*}(1) \rangle_{1 \leq i \leq n} = n - 1$$

Démonstration. Soit $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_{\infty}(K)$ et (Fil, ζ) le couple associé par le théorème II.7.3. Il est clair que les $(\zeta_i)_i$ sont linéairement indépendants sur F , car

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, H)[\frac{1}{p}] & \hookrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, H \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}] \\ & & \simeq \downarrow \rho_H^{-1} \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}] \end{array}$$

De plus, l'application $K^n \rightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K$, donnée par $(\zeta_{i^*}(1))_{1 \leq i \leq n}$, est l'application de Hodge-Tate

$$\begin{array}{ccccc} K^n & \xrightarrow[\sim]{\eta_H \otimes \text{Id}} & V_p(H) \otimes_F K & \xrightarrow{\alpha_H \otimes \text{Id}} & \tilde{\omega}_{H^D}[\frac{1}{p}] \hookrightarrow \text{Lie } E_{\mathcal{O}}(H)[\frac{1}{p}] \\ & \searrow & & \downarrow \simeq & \simeq \downarrow \rho_H^{-1} \\ & & & \text{Fil} \hookrightarrow & \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K \end{array}$$

$(\zeta_{i^*}(1))_i$

et donc son rang est $n - 1$, d'après la surjectivité de $\alpha_H \otimes \text{Id}$ (proposition II.1.4).

Réciproquement, partant de ζ satisfaisant les hypothèses du théorème, on pose $\text{Fil} = \langle \zeta_{i^*}(1) \rangle_{1 \leq i \leq n}$ et il est clair que (Fil, ζ) satisfait les hypothèses du théorème II.7.3. \square

II.7.3 Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}^T}(K)$ en termes d'algèbre linéaire

On applique ici les théorèmes de comparaison de l'appendice C afin de donner une description purement en termes d'algèbre linéaire de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}^T}(K)$. Cette description ne sera pas utilisée dans la construction de l'isomorphisme. On l'utilisera seulement dans la section II.10 afin de donner une description matricielle de l'isomorphisme, ainsi que dans la section II.11 afin de vérifier que celui-ci conserve le degré.

Théorème II.7.5. *Supposons $F = \mathbb{Q}_p$. Il y a une bijection $\text{GL}_n(F) \times D^{\times}$ -équivariante entre l'ensemble $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}^T}(K)$ et l'ensemble des couples (Fil, ξ) tels que*

$$\text{Fil} \in \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})(K)$$

et

$$\xi : F^n \hookrightarrow \text{Fil}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L B_{\text{cris}}^+(\mathcal{O}_K))^{\varphi=p}$$

(qui est alors automatiquement un isomorphisme).

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence de la proposition II.7.2 couplée à la proposition II.4.1 et au théorème C.2.2. \square

De la même façon le théorème II.7.4 se traduit en:

Théorème II.7.6. *Supposons $F = \mathbb{Q}_p$. Il y a une bijection $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariante entre l'ensemble $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$ et l'ensemble des*

$$\xi : F^n \hookrightarrow (\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L B_{\mathrm{cris}}^+(\mathcal{O}_K))^{\varphi=p}$$

tels que via $\theta : B_{\mathrm{cris}}^+(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \widehat{K}$ on ait

$$\mathrm{Im} \theta \circ \xi \subset \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K \quad \text{et} \quad \dim_K \mathrm{Im} \theta \circ \xi = n - 1$$

II.8 Diverses descriptions des points de la tour de Drinfeld en niveau infini

II.8.1 Description de $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$ en termes de modules filtrés rigidifiés

Définition II.8.1. Soit $[(G, \rho)] \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}r}(K)/\sim$. Une rigidification de la classe d'isogénie $[(G, \rho)]$ est un isomorphisme de D -modules galoisiens

$$\eta : D \xrightarrow{\sim} V_p(G)$$

qui induit donc naturellement $\forall (G', \rho') \sim (G, \rho)$ un isomorphisme

$$D \xrightarrow{\sim} V_p(G')$$

via l'identification $V_p(G) \xrightarrow{\sim} V_p(G')$, induite par le relèvement de $\rho' \rho^{-1}$.

Remarque II.8.2. Dans la proposition précédente, la donnée de η est équivalente à celle de $\zeta = \eta(1) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, G)[\frac{1}{p}] \setminus \{0\}$.

Proposition II.8.3. *L'application naturelle*

$$\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K) \longrightarrow \{ [(G, \rho)], \eta \mid [(G, \rho)] \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}r}(K)/\sim \text{ et } \eta \text{ une rigidification} \}$$

est une bijection $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariante.

Démonstration. Elle est identique à celle de la proposition II.7.2, en utilisant le lemme II.6.1. \square

Comme pour l'espace de Lubin-Tate, il y a une description pour $U \subset \mathcal{O}_D^\times$ un sous-groupe ouvert

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K) & \\
 & \downarrow & \curvearrowright U \\
 D^\times & \mathcal{M}_U^{\mathcal{D}r}(K) & \\
 & \downarrow & \\
 & \mathcal{M}^{\mathcal{D}r}(K)/\sim & \xrightarrow{\sim} \Omega(K)
 \end{array}$$

Théorème II.8.4. *Il y a une bijection $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariante entre l'ensemble $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$ et l'ensemble des couples (Fil, ζ) , où*

$$\mathrm{Fil} \in \Omega(K) \subset \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi})(K)$$

et

$$\zeta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}] \setminus \{0\}$$

est tel que, si $\zeta_* : K \rightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ est l'application induite sur l'évaluation des cristaux de Messing sur l'épaississement $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$, alors, si

$$\zeta_*(1) = \bigoplus_i \zeta_*(1)_i \in \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},i} \otimes K$$

on a

$$\forall i, \Pi^{-i} \zeta_*(1)_i \in \mathrm{Fil}$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition précédente, couplée à la remarque II.8.2 et au théorème de relèvement de Messing. Dans l'énoncé, on a posé

$$\zeta = \rho^{-1} \circ (\eta(1) \bmod p) \quad \square$$

II.8.2 Description de $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$ uniquement en termes du module de Tate

Voici la description la plus dépouillée à laquelle on peut aboutir.

Théorème II.8.5. *Il y a une bijection $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariante entre l'ensemble $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$ et l'ensemble des*

$$\zeta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}] \setminus \{0\}$$

tels que, si $\zeta_* : K \rightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ est l'application induite sur l'évaluation des cristaux de Messing sur l'épaississement $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$, alors, si

$$\zeta_*(1) = \bigoplus_i \zeta_*(1)_i \in \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},i} \otimes K$$

on a

$$\dim_K \langle \zeta_*(1)_i \rangle_{1 \leq i \leq n} = n - 1 \quad \text{et} \quad \langle \zeta_*(1)_i \rangle_{1 \leq i \leq n} \in \Omega(K)$$

Démonstration. Elle est identique à celle du théorème II.7.4 en utilisant la surjectivité de l'application de Hodge-Tate: $\alpha_G \otimes \text{Id} : V_p(G) \otimes_F K \longrightarrow \tilde{\omega}_{G^D}[\frac{1}{p}]$. \square

II.8.3 Description de $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}^r}(K)$ en termes d'algèbre linéaire

Cette section ne sera pas utilisée pour construire l'isomorphisme. Elle ne servira que dans les sections II.10 et II.11.

Comme dans la section II.7.3, on a:

Théorème II.8.6. *Supposons $F = \mathbb{Q}_p$. Il y a une bijection $\text{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariante entre l'ensemble $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}^r}(K)$ et l'ensemble des couples (Fil, ξ) où*

$$\text{Fil} \in \Omega(K) \subset \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0})(K)$$

et

$$\xi \in \text{Fil}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes B_{\text{cris}}^+(\mathcal{O}_K))^{(V^{-1}\Pi \otimes \varphi)^n = p} \setminus \{0\}$$

Théorème II.8.7. *Il y a une bijection $\text{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariante entre l'ensemble $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}^r}(K)$ et l'ensemble des*

$$\xi \in (\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes B_{\text{cris}}^+(\mathcal{O}_K))^{(V^{-1}\Pi \otimes \varphi)^n = p} \setminus \{0\}$$

tels que $\forall j, \theta(\varphi^j(\xi)) \in \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},-j} \otimes_L K$ (où φ désigne $\varphi \otimes \varphi$)

$$\dim_K \langle \Pi^j \cdot \theta(\varphi^j(\xi)) \rangle_{0 \leq j \leq n-1} = n - 1 \quad \text{et} \quad \langle \Pi^j \cdot \theta(\varphi^j(\xi)) \rangle \in \Omega(K)$$

II.9 La bijection au niveau des points

Principe général de la construction

On fixe

$$\Delta : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{G}$$

une quasi-isogénie compatible à l'action de \mathcal{O}_D , comme par exemple celle définie dans la section II.3.

Le principe de construction de la bijection s'exprime simplement lorsque l'on part des descriptions de $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}$ et $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}^r}$ données dans les théorèmes II.7.4 et II.8.5. D'après le théorème II.7.4, les éléments de $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$ sont donnés par des morphismes

$$\zeta_H \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]^n$$

satisfaisant certaines conditions. On verra de tels ζ_H comme des éléments de $\zeta_H \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H}^n \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]$. De même, d'après le théorème II.8.5, ceux de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$ sont donnés par des

$$\zeta_G \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]$$

satisfaisant certaines conditions.

La construction de la bijection $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$ consiste à faire correspondre les ζ_G et ζ_H en posant tout simplement

$$\boxed{\zeta_G = \Delta \circ \zeta_H}$$

et à vérifier que, via cette correspondance, les conditions imposées sur ζ_H dans le théorème II.7.4 correspondent exactement à celles imposées sur ζ_G dans le théorème II.8.5. Par exemple, si $\zeta_H = (\zeta_{H1}, \dots, \zeta_{Hn})$ la condition d'indépendance linéaire des $(\zeta_{Hi})_i$ correspondra du côté Drinfeld à ce que le ζ_G associé définisse une filtration dans Ω .

Plutôt que de partir des théorèmes II.7.4 et II.8.5, quitte à refaire une partie des démonstrations de ces théorèmes, on préfère utiliser la description donnée dans les théorèmes II.7.3 et II.8.4.

Quelques notations

Le couple $(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}, \Pi^{-1}V)$ est un isocrystal unité. On fixe un isomorphisme

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi} \simeq F \tag{II.2}$$

qui induit, via Δ , un isomorphisme

$$\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi} \simeq F^n$$

et induit donc

$$\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \simeq L^n$$

De plus, l'isomorphisme (II.2) induit également un isomorphisme $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \simeq L$ et

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j} \xrightarrow[\sum_j \Pi^{-j}]{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \simeq L^n$$

Le choix de l'isomorphisme (II.2) et de ceux qui s'ensuivent n'est pas vraiment nécessaire à la démonstration, mais permet d'identifier les espaces de périodes des côtés Lubin-Tate et Drinfeld à des sous-espaces de \mathbb{P}^n .

Rappelons que l'on a des extensions de corps valués

$$K|\check{F}|F|\mathbb{Q}_p$$

et un isomorphisme $L \simeq \check{F}$.

II.9.1 L'application $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K)$

Soit $(G, \rho_G, \eta_G) \in \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$. Rappelons (cf. théorème II.8.4) qu'on lui associe un couple (Fil_G, ζ_G) , où

$$\text{Fil}_G \in \Omega(K)$$

et

$$\zeta_G \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}] \setminus \{0\}$$

Soit

$$\zeta_{G*} : K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$$

l'application induite au niveau de l'évaluation des cristaux de Messing sur l'épaississement $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$. Considérons la composée

$$\begin{array}{c} K \xrightarrow{\zeta_{G*}} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K \xrightarrow{\Delta_*^{-1}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes K \equiv \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j}^n \otimes K \\ 1 \longmapsto \longrightarrow (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \end{array}$$

et posons $x_{ij} = \Pi^{-j} a_{ij} \in \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \simeq K$. Soit

$$X = (x_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$$

Lemme II.9.1. *L'application K -linéaire de K^n dans lui-même induite par X a pour image Fil_G .*

Démonstration. D'après le théorème II.1.1 et la remarque II.1.3 le sous-module engendré par l'image de ζ_{G*} dans $\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ est $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \Pi^j \text{Fil}_G$. Il en résulte aussitôt que

$$K(x_{i0})_i + \cdots + K(x_{in})_i = \text{Fil}_G \subset K^n = \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \quad \square$$

Définition II.9.2. On note $\text{Fil}_H \in \mathbb{P}^n(K)$ l'image de ${}^t X$ dans K^n , i.e., le sous-espace engendré par les lignes de X .

Via l'identification $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \simeq K^n$, si

$$\begin{array}{c} K \xrightarrow{\zeta_{G*}} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes K \\ 1 \longmapsto \longrightarrow (\alpha_i)_i \end{array}$$

alors $\text{Fil}_H \in \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))(K)$ est l'image de l'application $K^n \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K$, définie par $(\alpha_i)_i$.

La filtration Fil_H définit donc, d'après la proposition II.4.1, un élément $\mathcal{M}^{\mathcal{L}T}(K)/\sim$, dont il reste à définir la rigidification du module de Tate (cf. théorème II.7.3). Considérons la composée

$$F/\mathcal{O}_F \xrightarrow{\zeta_G} \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \xrightarrow{\Delta^{-1}} \mathbb{H}^n \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$$

qui fournit des éléments

$$(\zeta_{H,i})_{1 \leq i \leq n} \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]$$

Pour un entier $i \in \{1, \dots, n\}$, le morphisme induit entre cristaux de Messing évalués sur $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ est

$$\begin{array}{ccc} (\zeta_{H,i})_* : & K \xrightarrow{\zeta_{G*}} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K \xrightarrow{\Delta_*^{-1}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes K \xrightarrow{\text{proj}_i} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \\ & 1 \longmapsto \hspace{15em} \longrightarrow \hspace{1em} \alpha_i \end{array}$$

et donc $\forall i, \text{Im}((\zeta_{H,i})_*) \subset \text{Fil}_H$.

Il reste à voir que les $(\zeta_{H,i})$ sont F -linéairement indépendants. Mais, si $(\lambda_i)_i \in F^n$ est tel que $\sum_i \lambda_i \zeta_{H,i} = 0$, alors $(\lambda_i)_i$ définit une forme linéaire sur F^n . Et l'égalité $\sum_i \lambda_i \zeta_{H,i} = 0$ implique sur l'évaluation des cristaux l'égalité $\sum_i \lambda_i (a_{ij})_j = 0$ et donc $\sum_i \lambda_i (x_{ij})_j = 0$, ce qui implique, d'après le lemme II.9.1, que la forme linéaire associée à $(\lambda_i)_i$ s'annule sur Fil_G . Si $(\lambda_i)_i$ est non nul, alors Fil_G est égal au noyau de la forme linéaire associée, il est donc défini sur F et contient donc a fortiori une droite F -rationnelle. Donc, puisque $\text{Fil}_G \in \Omega(K)$, $\forall i, \lambda_i = 0$.

D'après le théorème II.7.3, on en déduit un triplet $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$.

II.9.2 L'application $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$

Soit $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$. Rappelons (cf. théorème II.7.3) qu'on lui associe un couple (Fil_H, ζ_H) où

$$\text{Fil}_H \in \mathbb{P}^n(K)$$

et

$$\zeta_H = (\zeta_{H,i})_{1 \leq i \leq n} : F^n \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]$$

Soit

$$K \xrightarrow{(\zeta_{H,1^*}, \dots, \zeta_{H,n^*})} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes K \xlongequal{\quad} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j}^n \otimes K$$

$$1 \longmapsto \longrightarrow (a_{ij})_{i,j}$$

l'application induite sur l'évaluation des cristaux sur l'épaississement

$$\mathcal{O}_K \twoheadrightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K.$$

Notons $x_{ij} = \Pi^{-j} a_{ij} \in \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \otimes K \simeq K$. Alors,

$$X = (x_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$$

Lemme II.9.3. *L'endomorphisme K -linéaire de K^n induit par ${}^t X$ a pour image Fil_H .*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème II.1.1. \square

Définition II.9.4. On note

$$\text{Fil}_G = \text{Im}(X) \in \mathbb{P}^n(K) = \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0})(K)$$

via $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \simeq \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}$ induit par Δ .

Proposition II.9.5. $\text{Fil}_G \in \Omega(K) \subset \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{\vee=\Pi})(K)$

Démonstration. On a

$$\text{Fil}_G = K(x_{i1})_i + \dots + K(x_{in})_i$$

Soit $(\mu_j)_j \in K^n$ tel que

$$\sum_j \mu_j (x_{ij})_i \in F^n$$

Soit alors la forme F -linéaire à valeurs dans F définie sur $V_p(H)$ par

$$\varphi : \zeta_{H,i} \longmapsto \sum_j \mu_j x_{ij} \in F$$

Elle définit un élément de $V_p(H)^*$. D'après le corollaire II.2.2, dans la suite de Hodge-Tate de H^D

$$0 \rightarrow \omega_{H^D}^* \otimes K \rightarrow V_p(H)^* \otimes_F K \rightarrow \omega_H \otimes K \rightarrow 0$$

l'application $V_p(H)^* \rightarrow \omega_H \otimes K$ est injective. Or

$$[V_p(H)^* \otimes_F K \twoheadrightarrow \omega_H \otimes K] = [\ker \alpha \hookrightarrow V_p(H) \otimes_F K]^*$$

où $\alpha : V_p(H) \otimes_F K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ est l'application de matrice ${}^t(a_{ij})_{i,j}$. Mais $\varphi|_{\ker \alpha} = 0$ par définition. Donc $\varphi = 0$ et $\sum_j \mu_j(x_{ij})_i = 0$. \square

On obtient donc, d'après la proposition II.5.1, un couple

$$(G, \rho_G) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}r}(K)/\sim.$$

Reste à définir une rigidification de G . Considérons le morphisme composé

$$\zeta_G : F/\mathcal{O}_F \xrightarrow{(\zeta_{H,1}, \dots, \zeta_{H,n})} \mathbb{H}^n \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \xrightarrow{\Delta} \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$$

On vérifie aussitôt que, par définition de Fil_G , le morphisme induit au niveau de l'évaluation des cristaux a son image contenue dans Fil_G . D'après le théorème II.8.4, on obtient donc un élément (G, ρ_G, η_G) . \square

II.9.3 Les deux applications sont inverses l'une de l'autre

Cela ne pose pas de problème puisque, comme expliqué au début, la bijection est caractérisée par l'égalité $\zeta_G = \Delta \circ \zeta_H$.

II.9.4 Retraçage des actions

Proposition II.9.6. *Dans la bijection entre $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$ et $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$, si*

$$(H, \rho_H, \eta_H) \longmapsto (G, \rho_G, \eta_G)$$

et $(g, d) \in \text{GL}_n(F) \times D^{\times}$, alors

$$(g, d).(H, \rho_H, \eta_H) \longmapsto ({}^t g, d^{-1}).(G, \rho_G, \eta_G)$$

Démonstration. Puisque la bijection est caractérisée par l'égalité $\zeta_G = \Delta \circ \zeta_H$, il suffit de le vérifier sur l'action de $\text{GL}_n(F) \times D^{\times}$ sur les

$$\begin{aligned} \zeta_G &\in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathcal{G}\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}] \\ \text{et les } \zeta_H &\in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H}^n \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]. \end{aligned} \quad \square$$

II.9.5 Bijection entre les points des espaces de Berkovich associés

Soit $K \hookrightarrow K'$ une extension isométrique de corps valués complets pour une valuation de rang 1. On vérifie alors aussitôt que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K') & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K') \end{array}$$

Pour $* \in \{\mathcal{LT}, \mathcal{Dr}\}$ posons

$$|\mathcal{M}_\infty^*| = \coprod_K \mathcal{M}_\infty^*(K)/\sim$$

où, pour $x \in \mathcal{M}_\infty^*(K_1)$ et $y \in \mathcal{M}_\infty^*(K_2)$, $x \sim y$ ssi il existe une extension valuée comme précédemment

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \searrow & \\ & & K_3 \\ K_2 & \swarrow & \end{array}$$

telle que x et y aient même image dans $\mathcal{M}_\infty^*(K_3)$.

Cette classe d'équivalence est bien définie, au sens où le quotient est un ensemble. Cela résulte de l'existence de modèles entiers de nos espaces, qui implique que l'on peut se limiter à des corps K de cardinalités bornées. On a donc une bijection $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariante

$$|\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}| \xrightarrow{\sim} |\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{Dr}}|$$

Le choix de modèles entiers de nos espaces permet de munir ces ensembles d'une structure d'espace topologique localement compact et l'existence de l'isomorphisme au niveau de ces modèles entiers (chapitre III) impliquera que la bijection précédente est un homéomorphisme.

II.10 Traduction en termes de matrices de périodes

Les triplets (H, ρ_H, η_H) et (G, ρ_G, η_G) qui se correspondent ont en commun la matrice $X \in \mathrm{M}_n(K)$ de rang $n - 1$ où comme précédemment on identifie

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes K \simeq \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j}^n \otimes K \xrightarrow[\sim]{\oplus_j \Pi^{-j}} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \otimes K \simeq \mathrm{M}_n(K)$$

Celle-ci vérifie

- Les lignes de X engendrent $\mathrm{Fil}_H \in \mathbb{P}^n(K)$
- Les colonnes de X engendrent $\mathrm{Fil}_G \in \Omega(K)$

Supposons maintenant, pour simplifier, que $F = \mathbb{Q}_p$. Alors, X possède un relèvement

$$X_{cris} \in \mathrm{M}_n(B_{cris}^+(\mathcal{O}_K)),$$

i.e., via $\theta : B_{cris}^+(\mathcal{O}_K) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}}$, on a $\theta(X_{cris}) = X$. Ce relèvement est défini de manière similaire à X , en évaluant les cristaux sur $A_{cris}(\mathcal{O}_K) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}}/p\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ au lieu de $\mathcal{O}_K \twoheadrightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$.

Plus précisément, partant de (H, ρ_h, η_H) , si E désigne l'évaluation du cristal de Messing de H sur l'épaississement $A_{cris}(\mathcal{O}_K) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$, il y a une suite

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q}_p^n & \xrightarrow{\eta_H} & V_p(H) & \xrightarrow{\text{périodes}} & E^{\varphi=p} & \xrightarrow{\rho_{H^*}^{-1}} & (\mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes_L B_{cris}^+)^{\varphi=p} \\ & & & & & & \downarrow \simeq \\ & & & & & & (B_{cris}^+)^n \xlongequal{\quad} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} (\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \otimes B_{cris}^+)^{\varphi=p} \end{array}$$

qui induit un morphisme $\mathbb{Q}_p^n \rightarrow (B_{cris}^+)^n$ de matrice ${}^t X_{cris}$.

Dans l'autre sens, partant de (G, ρ_G, η_G) , si E' désigne l'évaluation du cristal de G sur $A_{cris}(\mathcal{O}_K) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$, il y a une suite

$$D \xrightarrow{\eta_G} V_p(G) \longrightarrow E'^{\varphi=p} \xrightarrow{(\Delta \circ \rho_G)^{-1}} \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \otimes_L B_{cris}^+ \right)^{\varphi=p}$$

Via l'identification $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} = L$, l'image de $1 \in D$ induit l'élément de

$$\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} (B_{cris}^+)^n$$

donné par X_{cris} (colonnes indexées par $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

De plus,

$$\det(X_{cris}) \in \mathbb{Q}_p^\times \cdot t$$

où la valuation de l'élément de \mathbb{Q}_p^\times est liée aux hauteurs de ρ_H, ρ_G et Δ (cf. la section suivante). Si

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & p & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice du Frobenius de $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$ relativement à la base définie par l'isomorphisme

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \simeq L \quad \text{et} \quad \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \simeq \bigoplus_j \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j} \xrightarrow[\sim]{\sum_j \Pi^{-j}} \bigoplus_j \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0},$$

on a l'équation fonctionnelle

$$\boxed{\varphi(X_{cris}) {}^t \Phi = p X_{cris}} \quad (\text{II.3})$$

où $\varphi(X_{cris})$ est obtenue en appliquant le Frobenius cristallin à tous les éléments de la matrice X_{cris} . Cette équation est conséquence de ce que le morphisme des périodes $V_p(H) \rightarrow E$ a son image contenue dans $E^{\varphi=p}$.

On peut montrer la proposition suivante:

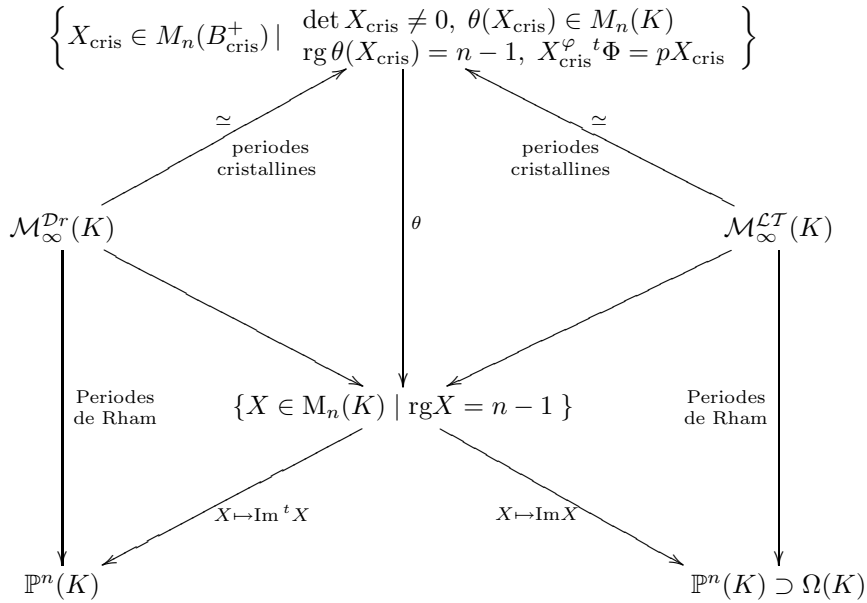
Proposition II.10.1. *Les espaces $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K)$ et $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$ s'envoient surjectivement sur l'ensemble des matrices $X \in M_n(K)$ de rang $n - 1$ possédant un relèvement X_{cris} à B_{cris}^+ de déterminant non nul et vérifiant l'équation (II.3). De plus, les fibres de cette application en X sont en bijection avec l'ensemble des relèvements de X de déterminant non nul satisfaisant à l'équation (II.3).*

Cet ensemble de matrices est muni d'une action de $\text{GL}_n(F) \times D^\times$, de la façon suivante: l'isomorphisme $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \simeq L^n$ induit un plongement $D^\times \hookrightarrow \text{GL}_n(L)$. Alors

$$\forall (g, d) \in \text{GL}_n(F) \times D^\times, \quad \forall X, \quad (g, d).X = {}^t g X d^{-1}$$

Les applications précédentes sont compatibles à cette action.

Démonstration. Il s'agit d'une application des théorèmes II.7.6 et II.8.7. □



Remarque II.10.2. Dans la proposition précédente, on peut enlever la condition “de déterminant non nul” et la remplacer par $\text{Im } X \in \Omega(K)$.

Remarque II.10.3. Pour les corps locaux de caractéristique positive, A. Genestier et V. Lafforgue ([7]) savent donner une interprétation géométrique comme points d'un certain schéma formel de l'analogie en caractéristique positive de l'ensemble des matrices X_{cris} solutions de l'équation précédente. Il n'existe pas de telle interprétation en caractéristique zéro.

Remarque II.10.4. Vue la forme explicite “cyclique” de la matrice de Frobenius Φ , l'équation fonctionnelle (II.3) se résoud simplement et

$$\{X_{cris} \in M_n(B_{cris}^+) \mid X_{cris}^\varphi {}^t\Phi = pX_{cris}\} \simeq \{(x_1, \dots, x_n) \in ((B_{cris}^+)^{p^{n-1}\varphi^n = \text{Id}})^n\}$$

À (x_1, \dots, x_n) correspond la matrice

$$X_{cris} = \begin{pmatrix} p^{n-1}x_1^{\varphi^{n-1}} & p^{n-2}x_1^{\varphi^{n-2}} & \dots & px_1^\varphi & x_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ p^{n-1}x_n^{\varphi^{n-1}} & p^{n-2}x_n^{\varphi^{n-2}} & \dots & px_n^\varphi & x_n \end{pmatrix}$$

II.11 L'isomorphisme conserve le degré

Il s'agit de démontrer que pour un choix convenable de Δ le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

où les applications vers \mathbb{Z} sont les applications hauteurs renormalisées des quasi-isogénies universelles. Cela implique en particulier que les tours de Lubin-Tate et Drinfeld classiques, les fibres en hauteur zéro, sont isomorphes.

Plus précisément, si f est une quasi-isogénie entre \mathcal{O} -modules π -divisibles on note $\text{ht}_\mathcal{O}(h) = \text{ht}(f)/[F : \mathbb{Q}_p]$. Alors l'application $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ est

$$(G, \rho_G, \eta_G) \mapsto \text{ht}_\mathcal{O}(\rho_G)/n$$

et l'application $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ est

$$(H, \rho_H, \eta_H) \mapsto \text{ht}_\mathcal{O}(\rho_H)$$

On va appliquer le théorème C.2.6 de l'appendice. Afin de simplifier on se limite au cas $F = \mathbb{Q}_p$, le cas général étant laissé au lecteur.

Supposons que l'isomorphisme $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \simeq L$ fixé au début de la section II.9 provienne d'un isomorphisme $\mathbb{D}(\mathbb{H})_0 \simeq \mathcal{O}_L$.

Proposition II.11.1. *Soit $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K)$. Soit $\xi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{H}^n \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ associé à η_H , ρ_H et la base canonique de \mathbb{Z}_p^n . Soit $X_{cris} \in M_n(B_{cris}^+(\mathcal{O}_K))$ la matrice associée. Alors $\det(X_{cris}) = \lambda.t \in \mathbb{Q}_p^\times.t$ et de plus*

$$v_p(\lambda) = -\text{ht}(\rho_H)$$

Démonstration. On peut supposer que $K = \widehat{K}$. Soit k_K le corps résiduel de K , un corps algébriquement clos. Soit H_k la fibre spéciale de H et $\mathbb{D}(H_k)$ son module de Dieudonné, l'évaluation du cristal de H_k sur l'épaississement $W(k_K) \rightarrow k_K$.

Soit $M_0 \subset \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L W(k_K)[\frac{1}{p}]$ le réseau

$$M_0 = \rho_{H^*}^{-1}(\mathbb{D}(H_k))$$

où ρ_{H^*} est induit par la quasi-isogénie ρ_H couplée au morphisme d'épaississements $(\text{Spec}(k_K) \hookrightarrow \text{Spec}(W(k_K))) \rightarrow (\text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p) \hookrightarrow \text{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_p)))$. D'après le théorème C.2.6 de l'appendice, le morphisme non-entier

$$T_p(H) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{cris}^+ \hookrightarrow M_0 \otimes_{W(k_K)} B_{cris}^+$$

dont le conoyau est annulé par t , induit l'égalité de réseaux

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^n T_p(H) \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(k_K) & \xlongequal{\quad} & t. \bigwedge^n M_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigwedge^n T_p(H) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{cris}^+ & \xhookrightarrow{\quad} & \bigwedge^n M_0 \otimes_{W(k_K)} B_{cris}^+ \end{array}$$

Cette égalité de réseaux induit de plus

$$\bigwedge^n T_p(H) \xrightarrow{\sim} (t. \bigwedge^n M_0)^{\varphi=p^n} = t. (\bigwedge^n M_0)^{\varphi=p^{n-1}}$$

(($\bigwedge^n M_0, p^{1-n}\varphi$) est un cristal unité). Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} T_p(H) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{cris}^+ & \xhookrightarrow{\quad} & M_0 \otimes_{W(k_K)} B_{cris}^+ & \xrightarrow{\rho_{H^*}^{-1}} & \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes_{\mathcal{O}_L} B_{cris}^+ \\ \eta_H \uparrow \simeq & & & & \uparrow \sum_j \Pi^j \\ (B_{cris}^+)^n & \xrightarrow{t X_{cris}} & \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} B_{cris}^+ & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_0 \otimes_{\mathcal{O}_L} B_{cris}^+ \end{array}$$

Sa puissance extérieure maximale induit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge T_p(H) & \xrightarrow{\sim} & t. (\bigwedge M_0)^{\varphi=p^{n-1}} \xrightarrow{\wedge \rho_{H^*}^{-1}} t. (\bigwedge \mathbb{D}(\mathbb{H}))^{\varphi=p^{n-1}} [\frac{1}{p}] \\ \simeq \uparrow \wedge \eta_H & & \uparrow \\ \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\det X_{cris}} & \mathbb{Q}_p.t \xrightarrow{\sim} t. (\bigotimes_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_0)^{\varphi=p^{n-1}} [\frac{1}{p}] \end{array}$$

De plus via ρ_{H^*}

$$[M_0 : \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes_{\mathcal{O}_L} W(k_K)] = \text{ht}(\rho_H)$$

et $\mathbb{D}(\mathbb{H}) = \sum_{j=0}^{n-1} \Pi^j \mathbb{D}(\mathbb{H})_0$. On en déduit le résultat. \square

Proposition II.11.2. *Soit $(G, \rho_G, \eta_G) \in \mathcal{M}_\infty^{\text{Dr}}(K)$ et X_{cris} la matrice associée. Alors $\det(X_{\text{cris}}) = \lambda.t \in \mathbb{Q}_p^\times t$, où*

$$v_p(\lambda) = -ht(\rho_G)/n - ht(\Delta) + \frac{1}{2}n(n-1)$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la proposition précédente. Le facteur $\frac{1}{2}n(n-1)$ provient de ce que $\mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L$ est un ordre d'Iwahori d'indice $\frac{1}{2}n(n-1)$ dans l'ordre maximal $M_n(\mathcal{O}_L)$. \square

Corollaire II.11.3. *Si $ht_{\mathcal{O}}(\Delta) = \frac{1}{2}n(n-1)$ alors la bijection entre $\mathcal{M}_\infty^{\text{LT}}(K)$ et $\mathcal{M}_\infty^{\text{Dr}}(K)$ respecte les hauteurs normalisées.*

Corollaire II.11.4. *Soit $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_\infty(K)$ tel que $ht(\rho_H) = 0$. Alors, le couple (G, ρ_G) associé dans l'espace de Rapoport-Zink sans niveau est l'élément de $\Omega(K) \subset \mathcal{M}^{\text{Dr}}(K)$ donné par le dual de la décomposition de Hodge-Tate de H couplé à η_H . Plus généralement, soit (G, ρ_G) le point de $\Omega(K)$ associé à la décomposition de Hodge-Tate de H et à η_H . Le point de $\mathcal{M}^{\text{Dr}}(K)$ associé par l'isomorphisme de Faltings est alors*

$$(G, \rho_G \circ \Pi^{ht(\rho_H)})$$

II.12 Un point de vue différent sur la bijection

Nous allons redémontrer la bijection précédente d'un point de vue "dual". En particulier, au lieu de considérer des filtrations $\text{Fil}_H \in \mathbb{P}^n, \text{Fil}_G \in \Omega$, nous considérerons plutôt les quotients $K^n \twoheadrightarrow K^n/\text{Fil}_H, K^n \twoheadrightarrow K^n/\text{Fil}_G$. Ce point de vue se prête mieux lorsque l'on travaillera sur une base quelconque (c'est-à-dire plus sur un point comme dans cet article) puisque pour un fibré vectoriel \mathcal{E} , il est plus commode de définir $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ comme classifiant les quotients localement libres $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ de rang 1 (en tout cas cela est plus facile à platifier par éclatements). En effet, dans le cas d'une base quelconque, l'approche des sections précédentes nous conduirait à définir Fil_H comme sous-module engendré par certaines sections, ce qui est moins commode. De plus, la matrice définissant ces sous-modules serait une section de $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}] \simeq M_n(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$, où \mathfrak{X} est l'espace de Lubin-Tate ou de Drinfeld en niveau infini. Il faudrait donc procéder à de nouveaux éclatements afin de rendre l'espace engendré par les lignes et celui par les colonnes localement facteur direct entier (cette dernière justification est quelque peu hypocrite puisque de toute façon dans la démonstration finale, on devra à un endroit rendre entier l'application des périodes). Le point de vue qui suit permet de construire directement une application entière du sommet de la tour de Lubin-Tate (resp. la tour de Drinfeld) vers le schéma formel de Drinfeld (resp. $\widehat{\mathbb{P}}^{n-1}$).

Commençons par faire le lien entre le point de vue précédent et celui qui va suivre.

II.12.1 Identification de $K^n \rightarrow K^n/\text{Fil}_H$ avec l'application de Hodge-Tate de G^D

Soit $(G, \rho_G, \eta_G) \in \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$. Rappelons qu'on a défini une matrice X telle que $\text{Im}X = \text{Fil}_G$ et $\text{Im}{}^tX = \text{Fil}_H$. Tout repose sur une bidualisation, l'exactitude de la suite de Hodge-Tate, ainsi que sur un analogue de l'énoncé d'algèbre linéaire suivant: soit $u : E_1 \rightarrow E_2$ une application linéaire entre deux K -espaces vectoriels de dimension finie, il y a alors une identification canonique

$$[E_1^* \rightarrow E_1^*/\text{Im}{}^t u] \simeq [\ker u \hookrightarrow E_1]^*$$

L'analogue est le suivant: pour E un $D \otimes_F K$ -module de type fini (à gauche ou à droite) posons

$$\Gamma(E) = \text{Hom}_{D \otimes_F L}(E, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})$$

un K -espace vectoriel de dimension finie. Alors,

$$\forall u : E_1 \rightarrow E_2, \quad [\Gamma(E_1) \rightarrow \Gamma(E_1)/\text{Im}{}^\Gamma u] \simeq \Gamma[\ker u \hookrightarrow E_1] \quad (\text{II.4})$$

Notons maintenant, pour W un K -e.v., $\Phi(W) = W^*$ le dual usuel. Si E est un $D \otimes_L K$ -module de type fini à gauche, resp. à droite, alors $\Phi(E)$ est naturellement un $D \otimes_L K$ -module de type fini à droite, resp. à gauche.

Il y a alors un isomorphisme naturel de bidualité pour E comme ci-dessus

$$\Gamma \circ \Phi(E) \simeq \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \otimes_L E_0$$

où, comme d'habitude, $E_0 = \{x \in E \mid \forall a \in F_n, a \otimes 1.x = 1 \otimes a.x\}$.

Lemme II.12.1. *Soit l'application $D \otimes_F K$ -linéaire composée*

$$u : D \otimes_F K \xrightarrow[\simeq]{\eta_G} V_p(G) \otimes_F K \xrightarrow{\alpha_G} \mathbb{D}(G)_{\mathbb{Q}} \otimes_L K$$

Procédons aux identifications suivantes:

$$\begin{aligned} \Gamma(D \otimes_F K) &\xrightarrow{\simeq} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K \\ f &\longmapsto f(1 \otimes 1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbb{D}(G)_{\mathbb{Q}} \otimes_L K) &\xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_L(\mathbb{D}(G)_{\mathbb{Q},0}, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}) \otimes_L K \simeq K^n \\ f &\longmapsto f|_{\mathbb{D}(G)_{\mathbb{Q},0} \otimes K} \end{aligned}$$

via l'isomorphisme (II.2) et Δ . Alors

$${}^\Gamma u : K^n \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \quad (\simeq K^n)$$

s'identifie à tX et donc $\text{Im}({}^\Gamma u) = \text{Fil}_H$.

Démonstration. Il suffit de retracer les différentes identifications. □

Remarque II.12.2. Étant donné que le module de Tate de G est trivialisé et que $\det V_p(G) \simeq \mathbb{Q}_p(1)$, on en déduit que $\mathbb{Q}_p(1)$ est trivialisé et que donc l'application de Hodge-Tate de G^D est définie sur $K: \alpha_{G^D}: V_p(G^D) \rightarrow \omega_G \otimes K$. En d'autres termes, $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}) \subset K$.

Corollaire II.12.3. *Il y a des identifications canoniques*

$$\begin{aligned} & [\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \rightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K/\text{Fil}_H] \\ & \simeq \left[(V_p(G^D) \otimes_F K)_0 \xrightarrow{\alpha_{G^D}} \omega_{G,0} \otimes K \right] (-1) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \\ & \simeq [\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \rightarrow \omega_{G,0}(-1) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}] \end{aligned}$$

où α_{G^D} est l'application de Hodge-Tate de G^D .

Démonstration. Soit

$$\left[E_1 \xrightarrow{\alpha_G} E_2 \right] = \left[V_p(G) \otimes_F K \xrightarrow{\alpha_G} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K \right]$$

D'après le lemme précédent,

$$[\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \rightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K/\text{Fil}_H] \simeq \left[\Gamma(E_1) \xrightarrow{\Gamma \alpha_G} \Gamma(E_1)/\text{Im}(\Gamma \alpha_G) \right]$$

qui, d'après l'identification (II.4), est isomorphe à

$$\Gamma[\ker \alpha_G \hookrightarrow E_1]$$

Mais, d'après la proposition II.1.4 (décomposition de Hodge-Tate), la suite

$$0 \rightarrow \omega_G^* \otimes K(-1) \xrightarrow{\Phi \alpha_{G^D}(-1)} V_p(G) \otimes_F K \xrightarrow{\alpha_G} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K$$

est exacte. Donc,

$$\begin{aligned} \simeq \Gamma[\ker \alpha_G \hookrightarrow E_1] & \simeq \Gamma \circ \Phi [V_p(G^D) \otimes_F K \rightarrow \omega_G \otimes K] (-1) \\ & \simeq [(V_p(G^D) \otimes_F K)_0 (-1) \rightarrow \omega_{G,0} \otimes K(-1)] \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme dans l'énoncé du corollaire provient de la rigidification $\eta: D \xrightarrow{\sim} V_p(G)$, qui induit

$$\Gamma \circ \Phi (V_p(G) \otimes_F K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \quad \square$$

II.12.2 Identification de $K^n \rightarrow K^n/\text{Fil}_G$ avec l'application de Hodge-Tate de H^D

Soit $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}^T}(K)$. On procède comme dans la section précédente. Pour E un K -espace vectoriel, posons

$$\Psi(E) = \text{Hom}_L(E, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0})$$

Lemme II.12.4. *Soit l'application composée*

$$v : K^n \xrightarrow[\sim]{\eta_H} V_p(H) \otimes_F K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K$$

Procédons aux identifications suivantes:

$$\begin{aligned} \Psi(K^n) &\simeq \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \otimes K \simeq \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \text{ via } \Delta \\ \Psi(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K) &\simeq \text{Hom}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}) \otimes K \simeq K^n \end{aligned}$$

où la seconde identification utilise

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j} \xrightarrow[\sim]{\oplus_i \Pi^{-i}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \simeq L^n$$

Alors $\Psi v : K^n \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K$ s'identifie à la matrice X et donc $\text{Im}(\Psi v) = \text{Fil}_G$.

Corollaire II.12.5. *Il y a des identifications*

$$\begin{aligned} &[\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \twoheadrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K / \text{Fil}_G] \\ &\simeq \left[V_p(H^D) \xrightarrow{\alpha_{H^D}} \omega_H \otimes K \right] (-1) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \\ &\simeq [\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \twoheadrightarrow \omega_H \otimes K (-1) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}] \end{aligned}$$

Démonstration. Soit

$$\left[E_1 \xrightarrow{\alpha_H} E_2 \right] = \left[V_p(H) \otimes_F K \xrightarrow{\alpha_H} \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes_L K \right]$$

Alors

$$\begin{aligned} &[\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \twoheadrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K / \text{Fil}_G] \\ &\simeq [\Psi(E_1) \twoheadrightarrow \Psi(E_2)] \\ &\simeq \Psi[\ker \alpha_H \hookrightarrow E_1] \\ &\simeq \Psi \circ \Phi \left[V_p(H^D) \otimes_F K (-1) \xrightarrow{\alpha_{H^D}(-1)} \omega_H \otimes K (-1) \right] \\ &\simeq \left[V_p(H^D) \otimes_F K \xrightarrow{\alpha_{H^D}} \omega_H \otimes K \right] (-1) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \end{aligned}$$

où on a utilisé l'exactitude de la suite de Hodge-Tate pour H (proposition II.1.4). \square

II.12.3 L'application $\mathcal{M}_{\infty}^{\text{Dr}}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{\infty}^{\text{LT}}(K)$

Soit $(G, \rho_G, \eta_G) \in \mathcal{M}_{\infty}^{\text{Dr}}(K)$.

II.12.3.1 Première étape: on met une structure d'isocrystal sur le module de Tate. Posons

$$N = \mathrm{Hom}_D(V_p(G), \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})$$

un isocrystal relativement à l'extension $L|F$, si on le munit de $\varphi : N \xrightarrow{\sim} N$, défini par $\varphi.f = \varphi \circ f$.

II.12.3.2 Deuxième étape: la rigidification du module de Tate induit une rigidification de l'isocrystal. L'isomorphisme de D -modules $\eta_G : D \xrightarrow{\sim} V_p(G)$ induit un isomorphisme d'isocristaux

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} (N, \varphi)$$

II.12.3.3 Troisième étape: la filtration de Hodge-Tate induit une filtration du module de Dieudonné. Considérons l'application de Hodge-Tate de G^D tordue par $K(-1)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) &= \left[V_p(G)^* \otimes_F K \xrightarrow{\alpha_{G^D}(-1)} \omega_G \otimes K(-1) \right] \\ &= \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \left[(V_p(G)^* \otimes_F L)_j \otimes_L K \rightarrow \omega_{G,j} \otimes K(-1) \right] \end{aligned}$$

Tensorisons cette suite

$$(\mathcal{S}) \otimes_{D \otimes_F L} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \simeq [N \otimes_F L \rightarrow \omega_{G,0}(-1) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}]$$

qui fournit donc, via la deuxième étape, un élément

$$\mathrm{Fil}_H \in \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})(K)$$

On obtient ainsi un couple $[(H, \rho_H)] \in \mathcal{M}^{\mathcal{L}^T}(K)/\sim$.

II.12.3.4 Quatrième étape: construction d'éléments dans le module de Tate de H . Construisons un morphisme

$$\Psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H})\left[\frac{1}{p}\right] \longrightarrow V_p(H)$$

Soit

$$\zeta_G \in \mathrm{Hom}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)\left[\frac{1}{p}\right]$$

comme dans le théorème II.8.4. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H})\left[\frac{1}{p}\right]$. Considérons

$$f \circ \zeta_G \in \mathrm{Hom}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)\left[\frac{1}{p}\right]$$

Pour le morphisme induit sur les cristaux évalués sur l'épaississement $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$

$$(f \circ \zeta_G)_* : K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K$$

montrons que $(f \circ \zeta_G)_*(1) \in \mathrm{Fil}_H$.

Via $\eta_G : D \xrightarrow{\sim} V_p(G)$ le morphisme $f_* : \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ s'identifie à

$$(V_p(G)^* \otimes_F K) \otimes_{D \otimes L} \left[\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\mathbb{D}(f)} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \right]$$

On doit montrer que $\zeta_{G^*}(1) \in (V_p(G)^* \otimes K) \otimes_{D \otimes L} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}$ s'envoie sur zéro par la composée donnée par la ligne pointillée diagonale dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} (V_p(G)^* \otimes K) & \otimes_{D \otimes L} [\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\mathbb{D}(f)} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}] & \\ \downarrow \alpha_{G^D}(-1) & \downarrow Id \quad \swarrow \text{---} \quad \downarrow Id & \\ \omega_G \otimes K(-1) & \otimes_{D \otimes L} [\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\mathbb{D}(f)} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}] & \end{array}$$

Il résulte de ce diagramme qu'il suffit de vérifier que l'image de $\zeta_{G^*}(1)$ par l'application

$$\alpha_{G^D}(-1) \otimes Id : (V_p(G)^* \otimes K) \otimes_{D \otimes L} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \omega_G \otimes K(-1) \otimes_{D \otimes L} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}$$

est nulle. Mais, si $\iota : \tilde{\omega}_{G^D} \otimes K \hookrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ et ${}^t\alpha_G : \tilde{\omega}_{G^D} \otimes K \longrightarrow V_p(G)^* \otimes K$ est l'application de gauche dans la suite de Hodge Tate de G^D tordue par $K(-1)$, ${}^t\alpha_G \in V_p(G)^* \otimes K \otimes \omega_{G^D}$, alors

$$\zeta_{G^*}(1) = (Id \otimes \iota) ({}^t\alpha_G)$$

Le résultat se déduit donc du fait que, dans la suite de Hodge-Tate de G^D , la composée des deux applications est nulle: ${}^t\alpha_G \circ \alpha_{G^D}(-1) = 0$. On a donc bien défini l'application Ψ .

II.12.3.5 Sixième étape: l'application ψ est un isomorphisme. Il suffit de démontrer qu'elle est injective. Soit donc f tel que $\psi(f) = 0$. On vérifie alors sur l'évaluation des cristaux que cela implique que pour $\mathbb{D}(f) : \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$

$$\mathbb{D}(f)|_{\tilde{\omega}_{G^D} \otimes K} = 0$$

Mais

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(f) \in \text{Hom}_{D, \varphi}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}, 0}^{V=\Pi}, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}, 0}^{V=\Pi}) \\ h \longmapsto & & h|_{\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}, 0}^{V=\Pi}} \end{array}$$

or

$$[\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}, 0}^{V=\Pi} \otimes K \rightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}, 0} \otimes K / \tilde{\omega}_{G^D, 0} \otimes K] \in \Omega(K) \subset \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}, 0}^{V=\Pi}(K))$$

Donc, $\mathbb{D}(f)|_{\omega_{G^D} \otimes K} = 0 \Rightarrow \mathbb{D}(f) = 0$ et donc $f = 0$.

La quasi-isogénie Δ induit un isomorphisme

$$F^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H})[\frac{1}{p}]$$

et on obtient donc une rigidification η_H de $[(H, \rho_H)]$, ce qui détermine le triplet (H, ρ_H, η_H) , d'après le théorème II.7.3.

II.12.4 L'application $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$

Soit maintenant $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$.

II.12.4.1 Première étape: On met une structure d'isocrystal sur le module de Tate. Soit

$$N = \mathrm{Hom}_F(V_p(H), \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})$$

qui est muni d'une structure d'isocrystal en posant $\varphi.f = \varphi \circ f$. Notons que cet isocrystal est muni d'une action de D , puisque c'est le cas de $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$.

Deuxième étape: η_H rigidifie l'isocrystal L'isomorphisme $\eta_H : F^n \xrightarrow{\sim} V_p(H)$ couplé à la quasi-isogénie Δ induit un isomorphisme d'isocristaux munis d'une action de D

$$\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \xrightarrow{\sim} N$$

II.12.4.2 Troisième étape: la filtration de Hodge-Tate induit une filtration du module de Dieudonné. Considérons l'application de Hodge-Tate de H^D tordue par $K(-1)$

$$(\mathcal{T}) = [V_p(H)^* \otimes K \rightarrow \omega_H \otimes K(-1)]$$

Après application de $- \otimes_F \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$, on obtient via la deuxième partie une filtration D -invariante

$$(\mathcal{T}) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \simeq [\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K \rightarrow \omega_H \otimes K(-1) \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}]$$

La partie "indice zéro" de cette application est obtenue par

$$(\mathcal{T}) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \simeq [\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \rightarrow \omega_H \otimes K(-1) \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}]$$

qui définit $\mathrm{Fil}_G \in \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0})(K)$. La quasi-isogénie Δ couplée à η_H induit un isomorphisme

$$V_p(H)^* \otimes_F \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^{V^{-1}\Pi} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V^{-1}\Pi}$$

D'après le corollaire II.2.2, $(\mathcal{T}) \in \Omega(K) \subset \mathbb{P}(V_p(H)^*)(K)$. Donc

$$\mathrm{Fil}_G \in \Omega(K) \subset \mathbb{P}\left(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V^{-1}\Pi}\right)(K)$$

On obtient donc ainsi un couple $[(G, \rho_G)] \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)/\sim$.

II.12.4.3 Quatrième étape: Construction d'éléments dans le module de Tate de G . À la rigidification $\eta_H : F^n \xrightarrow{\sim} V_p(H)$ est associé un élément

$$\xi \in \text{Hom}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H}^n \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]$$

qui, composé avec Δ , fournit $\zeta_G \in \text{Hom}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]$. Il s'agit de montrer que sur l'évaluation des cristaux

$$\zeta_{G*}(1) \in \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \Pi^j \text{Fil}_G \subset \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$$

Pour cela, il suffit de vérifier que

$$\xi_*(1) \in \ker \left[\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes K \xrightarrow{\eta_H} V_p(H)^* \otimes K \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \rightarrow \omega_H \otimes K(-1) \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \right]$$

Or cela résulte de ce que $\xi_*(1) \in V_p(H)^* \otimes K \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$ est donné par

$$V_p(H) \xrightarrow{\alpha_H} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K$$

et de ce que $\alpha_{H^D}(-1) \circ \alpha_H = 0$ dans la suite de Hodge-Tate de H^D . Donc ζ_G définit un élément de $V_p(G)$.

Cinquième étape: Rigidification Il suffit de montrer que ζ_G est non nul, mais cela est clair. On obtient donc, d'après le théorème II.8.4, un triplet $(G, \rho_G, \eta_G) \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}^r}(K)$.

II.12.5 Les deux applications sont inverses l'une de l'autre

Cela est moins clair que dans la première description de l'isomorphisme.

Partons de $(G, \rho_G, \eta_G) \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}^r}(K)$ et soit $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_{\infty}(K)$ le triplet associé. Soit $(G', \rho_{G'}, \eta_{G'}) \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}^r}(K)$ le triplet associé à (H, ρ_H, η_H) . Rappelons que la filtration de $\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ définissant $(G', \rho_{G'}) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}^r}(K)/\sim$ s'identifie à

$$[V_p(H)^* \otimes K \rightarrow \omega_H \otimes K(-1)] \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$$

via

$$V_p(H)^* \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow[\text{via } \eta_H]{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \xrightarrow{\mathbb{D}(\Delta)} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}$$

Rappelons que l'on a un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H}) \xrightarrow{\sim} V_p(H)$$

et qu'alors l'identification ci-dessus se résume à

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_F \left(\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H})[\frac{1}{p}], \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \right) \xleftarrow{\sim} V_p(H)^* \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \\ x & \longmapsto & [f \mapsto \mathbb{D}(f)(x)] \end{array}$$

D'après l'exactitude de la suite de Hodge-Tate de H^D ,

$$\begin{aligned} & \ker (V_p(H)^* \otimes K \rightarrow \omega_G \otimes K(-1)) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \\ &= \{ h : V_p(H) \otimes K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \mid \alpha_H(x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0 \} \end{aligned}$$

Mais, via l'identification $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H})[\frac{1}{p}] \simeq V_p(H)$, l'application α_H est

$$f \longmapsto (\mathbb{D}(f) \otimes Id) (\zeta_{G^*}(1))$$

où $\mathbb{D}(f) \otimes Id : \mathbb{D}(\mathbb{G}) \otimes K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes K$, $\zeta_G = \rho_G \circ \eta_G(1)$ et ζ_{G^*} est l'application induite sur les cristaux. On en déduit que la filtration définissant $(G', \rho_{G'})$ sur $\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ est

$$\left\{ x \in \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K \mid \begin{array}{l} \forall f \in \mathrm{Hom}_{D, \varphi}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}) \\ (f \otimes Id)(\zeta_{G^*}(1)) = 0 \Rightarrow (f \otimes Id)(x) = 0 \end{array} \right\} = (\mathrm{Im}(\alpha_G)^\perp)^\perp$$

qui est donc égal à $\mathrm{Im} \alpha_G$, qui par surjectivité de l'application de Hodge-Tate de G est la filtration définissant G . Donc $(G', \rho_{G'}) = (G, \rho_G)$.

Il est maintenant aisé de vérifier que les rigidifications des modules de Tate de G' et G coïncident, puisqu'il suffit de vérifier qu'elles coïncident modulo p , dans $\mathrm{Hom}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$, ce qui est immédiat. Donc $(G', \rho_{G'}, \eta_{G'}) = (G, \rho_G, \eta_G)$.

On vérifie de la même façon que l'application composée

$$\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}^r}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$$

est l'identité.

Annexe C

Théorèmes de comparaison entiers relatifs pour les groupes p -divisibles d'après Faltings

Dans cet appendice on explique les résultats auxquels on peut parvenir à partir des méthodes de [3] pour les périodes cristallines et de Hodge-Tate des groupes p -divisibles sur les anneaux d'entiers de corps non-archimédiens. L'auteur a vérifié chacune des assertions énoncées en reprenant les résultats de [3], il invite le lecteur à en faire de même. On supposera toujours que $p \neq 2$.

C.1 Groupes p -divisibles sur les anneaux d'entiers de corps non-archimédiens

Soit $K|\mathbb{Q}_p$ un corps valué complet pour une valuation de rang 1, c'est-à-dire à valeurs dans \mathbb{R} , étendant celle de \mathbb{Q}_p . On note \mathcal{O}_K son anneau des entiers et k son corps résiduel. Fixons $\mathcal{O}_{K_0} \subset \mathcal{O}_K$ un anneau de Cohen. On a des extensions valuées $K|K_0|\mathbb{Q}_p$. Le choix de l'anneau de Cohen fixe en particulier une section ϵ du morphisme $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \rightarrow k$. Si k est parfait, $\mathcal{O}_{K_0} \simeq W(k)$.

Par définition, un groupe p -divisible sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ est un système compatible de groupes p -divisibles sur les $(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K))_{n \geq 1}$.

Lemme C.1.1. *Soit G un groupe p -divisible sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$. Sont équivalents:*

- $G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ est isogène à un groupe constant H sur k :

$$G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \sim H \otimes_{k,\epsilon} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$$

- Il existe un nombre réel $\lambda \geq 1$ et H' un groupe p -divisible sur k tels que si $\mathfrak{m}_{K,\lambda} = \{x \in K \mid v_p(x) \geq \lambda\}$, alors

$$G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{m}_{K,\lambda} \simeq H' \otimes_{k,\epsilon} \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_{K,\lambda}$$

- Soit $R \simeq \mathcal{O}_{K_0}[[x_i]]_{i \in I}$ l'anneau universel des déformations du groupe $G \otimes k$ sur des \mathcal{O}_{K_0} -algèbres locales complètes et G^{univ} la déformation universelle. Il existe un morphisme

$$x : \text{Spf}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \text{Spf}(R),$$

i.e., $x \in \text{Spf}(R)^{\text{an}}(K)$, où $^{\text{an}}$ désigne la fibre générique au sens des espaces de Berkovich, tel que $G \simeq x^*G^{\text{univ}}$

Démonstration. Elle ne pose pas de problème. \square

On remarquera que si les conditions du lemme précédent sont vérifiées, alors nécessairement $H' \simeq G_k$ et on peut choisir $H = G_k$.

Définition C.1.2. Un groupe p -divisible satisfaisant aux conditions équivalentes du lemme précédent sera dit isotrivial mod p .

Remarque C.1.3. En utilisant des morphismes non-continus $R \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, on peut construire des groupes p -divisibles non-isotriviaux mod p sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$.

C.2 Théorèmes de comparaison

On reprend les notations de la section précédente. On fixe un relèvement de Frobenius $\sigma : \mathcal{O}_{K_0} \rightarrow \mathcal{O}_{K_0}$. Soit G un groupe p -divisible sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$. On note M l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de G . Celle-ci est filtrée:

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D} \longrightarrow M \longrightarrow \omega_G^* \longrightarrow 0$$

On note $\text{Fil } M = \omega_{G^D}$. On note \mathcal{E} le cristal de Messing (covariant) de $G \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ sur le gros site cristallin nilpotent de [1]

$$NCRIS(\text{Spec}(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)/\text{Spec}(\mathcal{O}_{K_0}))$$

où $\text{Spec}(\mathcal{O}_{K_0}) \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$ est défini via la section ϵ , et

$$M_0 = \mathcal{E}_{\mathcal{O}_{K_0} \rightarrow k}$$

le module de Dieudonné "classique" de $G \otimes k$, si k est parfait. Il est muni d'une application σ -linéaire $\varphi : M_0 \longrightarrow M_0$ associée au relèvement de Frobenius σ .

Rappelons que l'on dispose d'une \mathcal{O}_{K_0} -algèbre $A_{\text{cris}}(\mathcal{O}_K)$ augmentée via $\theta : A_{\text{cris}}(\mathcal{O}_K) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_K}$, qui définit un pro-objet de notre site cristallin. On note φ le Frobenius cristallin sur A_{cris} .

L'évaluation

$$E = \mathcal{E}_{A_{\text{cris}} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_K}/p\widehat{\mathcal{O}_K}}$$

est un A_{cris} -module libre muni d'un morphisme φ -linéaire $\varphi : E \longrightarrow E$ tel que

$$E \otimes_{\theta} \widehat{\mathcal{O}_K} \simeq M \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{\mathcal{O}_K}$$

ce qui permet de filtrer E via $\text{Fil } E = \theta^{-1}(\text{Fil } M \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}})$. On a donc un φ -module filtré $(E, \text{textFil } E, \varphi)$.

Exemple C.2.1. Si $G = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ sur \mathcal{O}_K alors $E = \text{Fil } E = A_{\text{cris}}$ et le Frobenius de E est $p\varphi$ avec φ le Frobenius cristallin.

Le module de Tate de G s'identifie à $\text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}})$. Tout morphisme $f : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \rightarrow G \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$ induit un morphisme entre les F -cristaux filtrés correspondants et donc, par évaluation sur l'épaississement $A_{\text{cris}} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}}/p\mathcal{O}_{\widehat{K}}$, une application des périodes

$$\begin{aligned} T_p(G) &= \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}) \rightarrow \text{Hom}((A_{\text{cris}}, A_{\text{cris}}, p\varphi), (E, \text{Fil } E, \varphi)) \\ &= (\text{Fil } E)^{\varphi=p} \end{aligned}$$

Théorème C.2.2. *L'application des périodes induit un isomorphisme naturel $\text{Gal}(\overline{K}|K)$ -équivariant*

$$T_p(G) \xrightarrow{\sim} (\text{Fil } E)^{\varphi=p}$$

Elle induit deux inclusions naturelles strictement compatibles aux filtrations et à l'action de Galois

$$tE \subset T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{\text{cris}} \subset E$$

Ces inclusions sont compatibles aux Frobenius cristallins lorsque l'on munit $T_p(G) \otimes A_{\text{cris}}$ de $p \otimes \varphi$.

Remarque C.2.3. Dans le théorème précédent la filtration est indexée de la façon suivante

$$\begin{aligned} \text{Fil}^i(T_p(G) \otimes A_{\text{cris}}) &= T_p(G) \otimes \text{Fil}^i A_{\text{cris}} \\ \forall i \leq -1, \text{Fil}^i E &= E \\ \text{Fil}^0 E &= \theta^{-1}(\text{Fil } M \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}) \\ \forall i \geq 1, \text{Fil}^i E &= \text{Fil}^i A_{\text{cris}} \cdot \text{Fil}^0 + \text{Fil}^{i+1} A_{\text{cris}} \cdot E \end{aligned}$$

Remarque C.2.4. L'application des périodes est compatible à la dualité de Cartier. Plus précisément, le $(A_{\text{cris}}, \varphi)$ -module filtré associé à G^D s'identifie à $E^D = \text{Hom}_{A_{\text{cris}}}(E, A_{\text{cris}})$, avec pour $f \in E^D$, $\varphi(f) = p\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ et $\text{Fil } E^D = \{f \in E^D \mid f(\text{Fil } E) \subset \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}\}$. Alors, si $\gamma : T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{\text{cris}} \rightarrow E$ désigne l'application des périodes, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} T_p(G) \otimes A_{\text{cris}} & \xrightarrow{\gamma} & E = (E^D)^* & \xrightarrow{t\gamma^D} & T_p(G^D)^* \otimes A_{\text{cris}} & \xlongequal{\quad} & T_p(G)(-1) \otimes A_{\text{cris}} \\ & & & \searrow & \text{Id} \otimes t & \nearrow & \end{array}$$

Lorsque le groupe p -divisible G est isotrivial mod p , son isocristal est engendré par ses section horizontales. On en déduit le théorème suivant.

Théorème C.2.5. *Supposons de plus que G est isotrivial mod p . Il y a alors des isomorphismes*

$$M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} K \simeq M[\frac{1}{p}]$$

et

$$E[\frac{1}{p}] \simeq M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris}^+$$

comme φ -modules où $B_{cris}^+ = A_{cris}[\frac{1}{p}]$.

Il y a donc des inclusions strictement compatibles aux filtrations

$$tM_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris}^+ \subset V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}^+ \subset M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris}^+$$

un isomorphisme

$$M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris} \simeq V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}$$

avec $B_{cris} = B_{cris}^+[\frac{1}{p}]$, et un autre isomorphisme

$$V_p(G) \xrightarrow{\sim} \text{Fil} \left(M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris}^+ \right)^{\varphi=p}$$

où, sur $M_0 \otimes B_{cris}^+$, $\varphi = \varphi \otimes \varphi$ et Fil est la filtration associée à celle de $M[\frac{1}{p}]$ via l'isomorphisme $M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} K \simeq M[\frac{1}{p}]$ et θ .

C.2.1 Le déterminant des périodes divisé par $2i\pi$ est une unité p -adique

C.2.1.1 Énoncé et dévissage au cas C.M. Soit K comme précédemment et supposons de plus que son corps résiduel est algébriquement clos, ce que l'on peut toujours réaliser, quitte à étendre les scalaires. L'anneau \mathcal{O}_{K_0} s'identifie donc aux vecteurs de Witt de ce corps résiduel.

Soit G un groupe p -divisible isotrivial mod p sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ de dimension d et hauteur h . On reprend les notations précédentes. En particulier (M_0, φ) est le module de Dieudonné covariant de la réduction de G sur le corps résiduel de K .

L'isomorphisme de B_{cris} -modules

$$V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \xrightarrow{\sim} M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris}$$

du théorème C.2.5 induit un isomorphisme φ -équivariant

$$\alpha : \det V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \xrightarrow{\sim} (\det M_0)[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris}$$

Plus précisément, il y a une inclusion de B_{cris}^+ -modules compatible aux filtrations et Frobenius

$$u : T_p(G) \otimes B_{cris}^+ \hookrightarrow M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} B_{cris}^+$$

de conoyau annulé par t , d'où une inclusion

$$\det u : \det T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{cris}^+ \hookrightarrow (\det M_0) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} B_{cris}^+$$

Via l'application de réduction modulo $\text{Fil}^1 B_{\text{cris}}^+$ et l'identification $M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{K} \simeq M \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{K}$ (où $M = \text{Lie } E(G)$)

$$(M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} B_{\text{cris}}^+) / \text{Fil}^1 B_{\text{cris}}^+ \cdot (M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} B_{\text{cris}}^+) \simeq M \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{K}$$

et $\text{Fil}(M_0 \otimes B_{\text{cris}}^+)$ est l'image réciproque de $\text{Fil } M \otimes \widehat{K}$ (où $\text{Fil } M = \omega_{G^D}$). Il existe donc, d'après le lemme de Nakayama, une base (e_1, \dots, e_n) du B_{cris}^+ -module $M_0 \otimes B_{\text{cris}}^+$ telle que

$$\text{Fil}(M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} B_{\text{cris}}^+) = B_{\text{cris}}^+ e_1 \oplus \dots \oplus B_{\text{cris}}^+ e_{n-d-1} \oplus \text{Fil}^1 B_{\text{cris}}^+ e_{n-d} \oplus \dots \oplus \text{Fil}^1 B_{\text{cris}}^+ e_n$$

L'image de u est contenue dans $\text{Fil}(M_0 \otimes B_{\text{cris}}^+)$. On en déduit que

$$\det u : \det T_p(G) \otimes B_{\text{cris}}^+ \hookrightarrow \det M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \text{Fil}^d B_{\text{cris}}^+$$

qui définit donc un élément (un régulateur)

$$\beta \in \left(\det T_p(G)^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \text{Fil}^d B_{\text{cris}}^+ \right)^{\varphi = \text{Id}}$$

où rappelons que φ agit par la multiplication par p sur $T_p(G)$ (cf. théorème C.2.2). Mais le corps résiduel de K étant algébriquement clos

$$(\det M_0, \det \varphi) \simeq (\mathcal{O}_{K_0}, p^{h-d} \sigma)$$

Donc

$$\beta \in \det(T_p(G))^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det(M_0))^{\varphi = p^{h-d}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \left(\text{Fil}^d B_{\text{cris}}^+ \right)^{\varphi = p^d}$$

Mais puisque

$$\left(\text{Fil}^d B_{\text{cris}}^+ \right)^{\varphi = p^d} = \mathbb{Q}_p \cdot t^d$$

(cf. théorème A.3.26 de [12]) on a

$$\beta \in (\det T_p(G))^{-1} \otimes (\det M_0)^{\varphi = p^{h-d}} \otimes \mathbb{Q}_p \cdot t^d$$

Les structures entières $\det T_p(G) \simeq \mathbb{Z}_p$ et $\det M_0 \simeq \mathcal{O}_{K_0}$ induisent une \mathbb{Z}_p -structure sur $\mathbb{Q}_p t^d$. L'élément β fournit donc un élément de $\mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Z}_p^\times \cdot t^d$.

Théorème C.2.6 (Faltings). *L'élément β est entier: $\beta \in \mathbb{Z}_p^\times \cdot t^d$.*

Démonstration. Le groupe G étant isotrivial mod p on peut le mettre en famille. Plus précisément, soit \mathfrak{X} l'espace des déformations de la réduction de G sur le corps résiduel de K . C'est un \mathcal{O}_{K_0} -schéma formel non-canoniquement isomorphe à $\text{Spf}(\mathcal{O}_{K_0}[[t_i]]_{1 \leq i \leq d(h-d)})$. Il existe alors un \mathcal{O}_{K_0} -morphisme $x : \text{Spf}(\mathcal{O}_K) \rightarrow \mathfrak{X}$ tel que $G = x^* G^{\text{univ}}$, où G^{univ} désigne la déformation universelle.

Il existe de plus un nombre rationnel $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ tel que $\forall i, v_p(x^*(t_i)) \geq \alpha$. Le morphisme x se factorise donc en

$$x : \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathfrak{X}$$

où $\mathcal{C} = \mathrm{Spf}(R)$ est un modèle formel p -adique normal sans p -torsion sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{K_0})$ de la boule rigide formée des éléments de valuation supérieure ou égale à α . Fixons une clôture algébrique E du corps des fractions de R . Soit L la plus grande extension de $\mathrm{Frac}(R)$ contenue dans K , $E|L|\mathrm{Frac}(R)$, telle que la fermeture intégrale $\overline{R}^L[\frac{1}{p}]$ soit une $R[\frac{1}{p}]$ -algèbre ind-étale. Posons $\overline{R} = \overline{R}^L$. Si ξ désigne le point géométrique générique de $\mathrm{Spec}(R)$ défini par E , on a donc $\mathrm{Gal}(\overline{R}[\frac{1}{p}]|R[\frac{1}{p}]) = \pi_1(\mathrm{Spec}(R[\frac{1}{p}]), \xi)$. À partir de l'anneau \overline{R} , on peut construire un anneau $A_{\mathrm{cris}}(R)$ muni de $\theta : A_{\mathrm{cris}}(R) \rightarrow \widehat{\overline{R}}$. Les théorèmes de comparaison pour les groupes p -divisibles cités précédemment s'appliquent dans ce cadre-là, toujours en utilisant les méthodes de [3].

Il y a un morphisme de spécialisation

$$A_{\mathrm{cris}}(R) \twoheadrightarrow A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$$

Notons H la restriction de G^{univ} à \mathcal{C} . Sur $\mathrm{Spec}(R/pR)$, le groupe $G^{\mathrm{univ}} \otimes R/pR$ est isogène au groupe constant $G_k \otimes_k R/pR$, où k désigne le corps résiduel de K . Il y a donc un isomorphisme de comparaison

$$V_p(H) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{cris}}(R) \xrightarrow{\sim} M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{\mathrm{cris}}(R)$$

Toujours par application du théorème A.3.26 de [12], on peut vérifier que

$$\left(\mathrm{Fil}^d B_{\mathrm{cris}}^+(R)\right)^{\varphi=p^d} = \mathbb{Q}_p \cdot t^d.$$

On obtient alors comme précédemment un élément

$$\beta' \in \left((\det T_p(H))^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{Fil}^d B_{\mathrm{cris}}^+(R) \right)^{\varphi=Id} \simeq \mathbb{Q}_p t^d$$

Et bien sûr, par spécialisation $A_{\mathrm{cris}}(R) \twoheadrightarrow A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_K)$, $\beta' \mapsto \beta$.

L'énoncé du théorème est donc invariant par transport parallèle: on peut transporter β parallèlement en n'importe quel point du disque unité $\mathfrak{X}^{\mathrm{an}}$ (quitte à agrandir le rayon de la boule $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}$). Le mieux est de choisir un point pour lequel la matrice des périodes est diagonalisable. On peut par exemple prendre un point C.M. ayant multiplication complexe par \mathbb{Z}_{p^h} , où h est la hauteur de G . En effet, l'action de \mathbb{Z}_{p^h} permet de diagonaliser la matrice des périodes, si l'on prend des bases de vecteurs propres pour cette action. Le résultat est démontré dans la section suivante, dans ce cas particulier. \square

C.2.1.2 Étude des périodes entières des groupes p -divisibles ayant multiplication complexe par un ordre maximal non-ramifié. Nous étudions ici les périodes des groupes p -divisibles C.M. les plus simples, ceux ayant multiplication complexe par l'anneau des entiers d'une extension non-ramifiée de \mathbb{Q}_p . Soit donc G un groupe p -divisible de hauteur h et dimension d sur \mathbb{Z}_{p^h} , muni d'une action $\iota : \mathbb{Z}_{p^h} \rightarrow \text{End}(G)$. On pourra par exemple prendre, lorsque $d = 1$, le groupe formel de logarithme

$$f(T) = \sum_{n \geq 0} \frac{T p^{nh}}{p^n}$$

qui est bien muni d'une action de \mathbb{Z}_{p^h} , puisque $\forall \zeta \in \mu_{p^h-1} : f(\zeta T) = \zeta f(T)$, ou n'importe quel groupe de Lubin-Tate de hauteur 1, pour l'extension \mathbb{Q}_{p^h} .

Notons

$$\chi : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p} | \mathbb{Q}_{p^h}) \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^h}^\times$$

le caractère de Lubin-Tate. Notons $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_{p^h} | \mathbb{Q}_p)$ le Frobenius et $\forall i, \chi^{\sigma^i} = \sigma^i \circ \chi$.

Lemme C.2.7. *Comme \mathbb{C}_p -e.v. munis d'une action semi-linéaire de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p} | \mathbb{Q}_{p^h})$ on a*

$$\forall i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}, \quad \mathbb{C}_p(\chi^{\sigma^i}) \simeq \begin{cases} \mathbb{C}_p(1) & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{C}_p & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration. La décomposition de Hodge-Tate d'un groupe de Lubin-Tate G de hauteur h et dimension 1 sur \mathbb{Z}_{p^h} est

$$V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \simeq (\omega_{G^D} \otimes_{\mathbb{Z}_{p^h}} \mathbb{C}_p) \oplus (\omega_G^* \otimes_{\mathbb{Z}_{p^h}} \mathbb{C}_p(1))$$

Soit $\iota : \mathbb{Z}_{p^h} \xrightarrow{\sim} \text{End}(G)$. On a la décomposition $V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} \mathbb{C}_p(\chi^{\sigma^i})$, où l'action de $\iota(\mathbb{Z}_{p^h})$ sur le facteur $\mathbb{C}_p(\chi^{\sigma^i})$ se fait via σ^i . La décomposition de Hodge-Tate précédente est compatible à l'action de \mathbb{Z}_{p^h} sur G , via ι . Puisque $\iota(\mathbb{Z}_{p^h})$ agit sur ω_G^* via σ^0 et sur ω_{G^D} via les autres plongements $\sigma^i, i \neq 0$, on en déduit le résultat. \square

Il résulte de la classification des représentations cristallines abéliennes (Fontaine, cf. [13]) qu'il existe des entiers $a_i, 0 \leq a_i \leq d$, tels que

$$V_p(G) = \prod_{i=0}^{h-1} \chi^{a_i \sigma^{-i}}$$

De plus, d'après le lemme précédent, la décomposition de Hodge-Tate de $V_p(G)$ est

$$V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p = \bigoplus_{i=0}^{h-1} \mathbb{C}_p(a_i)$$

Donc $\forall i, a_i \in \{0, 1\}$, $\sum_i a_i = d$ et $a_i = \text{rg}_{\mathbb{Z}_p^h} \text{Lie}(G)_i$, avec

$$\text{Lie } G = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} \text{Lie}(G)_i$$

$\iota(\mathbb{Z}_p^h)$ agissant sur $\text{Lie}(G)_i$ via σ^i .

Considérons l'application des périodes

$$T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}(\mathbb{Z}_p^h) \hookrightarrow M_0 \otimes_{\mathbb{Z}_p^h} A_{cris}(\mathbb{Z}_p^h)$$

où M_0 est le module de Dieudonné de la fibre spéciale de G , un groupe p -divisible sur \mathbb{F}_{p^h} (l'idéal $p\mathbb{Z}_p^h$, possédant des puissances divisées l'évaluation du cristal de G sur l'épaississement $A_{cris} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, s'identifie à $M_0 \otimes_{\mathbb{Z}_p^h} A_{cris}$).

Le module de Dieudonné M_0 est un $W(\mathbb{F}_{p^h}) = \mathbb{Z}_p^h$ -module et via ι il devient un $\mathbb{Z}_p^h \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^h$ -module libre de rang 1.

Via ι , le module de Tate $T_p(G)$ est un \mathbb{Z}_p^h -module de rang 1. L'anneau A_{cris} est un \mathbb{Z}_p^h -module et donc $T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}$ est un $\mathbb{Z}_p^h \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^h$ -module.

L'action ι permet donc de décomposer

$$\begin{aligned} T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} (T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris})_i \\ M_0 &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} M_{0,i} \end{aligned}$$

où $\iota(\mathbb{Z}_p^h)$ agit sur la composante indexée par i via σ^i . La naturalité de l'application des périodes implique que celle-ci est somme directe de morphismes de A_{cris} -modules libres de rang 1 pour $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$

$$(T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris})_i \hookrightarrow M_{0,i} \otimes_{\mathbb{Z}_p^h} A_{cris}$$

Après choix d'un générateur de $T_p(G)$ comme \mathbb{Z}_p^h -module via ι et de M_0 comme $\mathbb{Z}_p^h \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^h$ -module, ces morphismes sont donnés par la multiplication par des éléments $x_i \in A_{cris}$, $i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$, bien définis modulo $\mathbb{Z}_p^h \times$. Dans une telle base, la matrice des périodes cristallines est donnée par la matrice diagonale

$$\text{diag}(x_0, \dots, x_{h-1})$$

Le module $M_0 \otimes_{\mathbb{Z}_p^h} A_{cris}$ est filtré par $\text{Fil}^0 \subset \text{Fil}^{-1} = M_0 \otimes_{\mathbb{Z}_p^h} A_{cris}$, avec

$$\begin{aligned} \text{Fil}^{-1}/\text{Fil}^0 &= \text{Lie}(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p^h} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \\ \text{Fil}^0/(\text{Fil}^1 A_{cris} \cdot \text{Fil}^{-1}) &= \omega_{G^D} \otimes_{\mathbb{Z}_p^h} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \end{aligned}$$

et cette filtration est compatible à l'action de \mathbb{Z}_p^h . Donc

$$\text{Fil}^0 = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} \text{Fil}_i^0$$

avec $\forall i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}_i^{-1}/\mathrm{Fil}_i^0 &= \mathrm{Lie}(G)_i \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \simeq \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} & \text{si } a_i = 1 \\ 0 & \text{si } a_i = 0 \end{cases} \\ \mathrm{Fil}_i^0/(\mathrm{Fil}^1 A_{cris} \cdot \mathrm{Fil}_i^{-1}) &= \omega_{G^D, i} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \simeq \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} & \text{si } a_i = 0 \\ 0 & \text{si } a_i = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Lorsque l'on munit $T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}$ de la filtration $T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Fil}^\bullet A_{cris}$, l'application des périodes est strictement compatible aux filtrations de conoyau annulé par t et donc, via les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} (T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris})_i & \hookrightarrow & M_{0,i} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ A_{cris} & \xrightarrow{\times x_i} & A_{cris} \end{array}$$

on obtient que si $a_i = 1$, alors $x_i \in \mathrm{Fil}^1 A_{cris}$ et si $a_i = 0$, $x_i \notin \mathrm{Fil}^1 A_{cris}$.

Notons y_i l'image de x_i dans $\mathrm{Gr}^1 A_{cris}$, si $a_i = 1$, et sinon, lorsque $a_i = 0$, y_i l'image de x_i dans $\mathrm{Gr}^0 A_{cris}$.

Via θ , on a une identification $\mathrm{Gr}^0 A_{cris} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. Le $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \mathrm{Gr}^0 A_{cris}$ -module $\mathrm{Gr}^1 A_{cris}$ est libre de rang 1. On peut alors définir la valuation d'un élément de $\mathrm{Gr}^1 A_{cris}$, indépendamment du choix d'un isomorphisme $\mathrm{Gr}^1 A_{cris} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. On peut donc définir pour tout i , $v(y_i)$.

Proposition C.2.8. *Supposons $d = 1$ et soit i_0 l'unique indice tel que $a_{i_0} \neq 0$. Alors, pour $0 \leq i \leq h - 1$,*

$$\begin{aligned} \forall i < i_0, v(y_i) &= \frac{p^{h+i-i_0}}{p^h - 1} \\ \forall i \geq i_0, v(y_i) &= \frac{p^{i-i_0}}{p^h - 1} \end{aligned}$$

et le déterminant des périodes cristallines β vérifie $\beta \in \mathbb{Z}_p^\times \cdot t$; le théorème C.2.6 est vérifié lorsque $d = 1$.

Démonstration. La compatibilité du morphisme de comparaison à l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p | \mathbb{Q}_{p^h})$ est équivalente à ce que

$$\forall \tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p | \mathbb{Q}_{p^h}), \quad x_i^\tau = \chi_G(\tau)^{\sigma^i} x_i$$

où $\chi_G = \chi^{\sum_i a_i \sigma^{-i}}$ désigne le caractère galoisien associé à $V_p(G)$. En particulier, si i est tel que $a_i = 0$, par application de θ , on obtient

$$\forall \tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p | \mathbb{Q}_{p^h}), \quad y_i^\tau = \chi_G(\tau)^{\sigma^i} y_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$$

Puisque $d = 1$, $\chi_G = \chi^{\sigma^{-i_0}}$. Considérons maintenant le lemme suivant:

Lemme C.2.9. Soit $z \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ tel que $\forall \tau \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_{p^h})$, $z^\tau = \chi(\tau)^{\sigma^i} z$. Alors,

$$\exists j \in \mathbb{N}, \quad v(z) \in \frac{p^i}{p^{jh}(p^h - 1)} + \mathbb{Z}$$

Démonstration. Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$, notons $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, \geq \lambda}$, resp. $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, > \lambda}$, les éléments de valuations supérieure à λ , resp. strictement supérieure à λ . Notons $q = p^h$. Nous nous intéressons à l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_{p^h})$ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, \geq \lambda}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, > \lambda} \simeq \overline{\mathbb{F}_p}$. Fixons $p^\lambda \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ un élément tel que si $\lambda = \frac{r}{s}$ avec $(r, s) = 1$, on ait $(p^\lambda)^s = p^r$. L'extension $\mathbb{Q}_{p^h}(p^\lambda)|\mathbb{Q}_{p^h}$ est totalement ramifiée. Soit $\tau_0 \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_{p^h}(p^\lambda))$ un relèvement du Frobenius $x \mapsto x^q$. L'inertie $I_{\mathbb{Q}_{p^h}}$ agit sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, \geq \lambda}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, > \lambda}$ via le caractère modéré

$$\tau \mapsto \frac{\tau(p^\lambda)}{p^\lambda} \bmod \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, > \lambda} \in \overline{\mathbb{F}_p}^\times$$

Désormais $\lambda = v(z)$. Écrivons $z = up^\lambda$, où $u \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$. Alors, modulo $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, > \lambda}$

$$\begin{aligned} \forall \tau \in I_{\mathbb{Q}_{p^h}}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\tau_0^k \tau(z)}{z} &\equiv \frac{\tau_0^k(u)}{u} \cdot \frac{\tau_0^k \tau(p^\lambda)}{p^\lambda}, \quad \text{car } \frac{\tau(u)}{u} \equiv 1 \bmod \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, > 0} \\ &\equiv u^{q^k - 1} \left(\frac{\tau(p^\lambda)}{p^\lambda} \right)^{q^k}, \quad \text{car } \tau_0(p^\lambda) = p^\lambda \end{aligned}$$

Quant au caractère χ , il vérifie la congruence

$$\forall \tau' \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_{p^h}), \quad \chi(\tau') \equiv \frac{\tau'(p^{\frac{1}{q-1}})}{p^{\frac{1}{q-1}}} \in \mu_{q-1}$$

L'hypothèse du lemme implique que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \tau \in I_{\mathbb{Q}_{p^h}}, \quad u^{q^k - 1} \frac{\tau(p^{q^k \lambda - \frac{p^i}{q-1}})}{p^{q^k \lambda - \frac{p^i}{q-1}}} \equiv 1$$

ce qui implique d'abord, avec $\tau = Id$, que $\bar{u} \in \mathbb{F}_q^\times$ et que l'on peut donc supposer que $u = 1$ dans la congruence ci-dessus. De plus, pour $\mu \in \mathbb{Q}$, le caractère modéré

$$\begin{array}{ccc} I_{\mathbb{Q}_{p^h}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{F}_p}^\times \\ \tau & \longmapsto & \frac{\tau(p^\mu)}{p^\mu} \end{array}$$

est trivial ssi $\mu \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. Donc, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $q^k \lambda - \frac{p^i}{q-1} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$, ce qui implique facilement le lemme. \square

Il résulte du lemme précédent que

$$\forall i > i_0, \exists j \in \mathbb{N}, \quad v(y_i) \in \frac{p^{i-i_0}}{q^j(q-1)} + \mathbb{Z}$$

$$\text{et } \forall i < i_0, \exists j \in \mathbb{N}, \quad v(y_i) \in \frac{p^{h+i-i_0}}{q^j(q-1)} + \mathbb{Z}$$

De plus, l'application des périodes étant annulées par $t \in A_{cris}$ pour tout i , le conoyau de $A_{cris} \xrightarrow{\times x_i} A_{cris}$ est annulé par t et donc $t \in A_{cris}x_i$. Étant donné que

$$v(t) = \frac{1}{p-1}$$

on en déduit que

$$\forall i, \quad 0 \leq v(y_i) \leq \frac{1}{p-1}$$

On déduit donc avec le résultat précédent que

$$\forall i > i_0, \exists j \in \mathbb{N}, \quad v(y_i) = \frac{p^{i-i_0}}{q^j(q-1)}$$

$$\text{et } \forall i < i_0, \exists j \in \mathbb{N}, \quad v(y_i) = \frac{p^{h+i-i_0}}{q^j(q-1)}$$

Considérons maintenant l'application de Hodge-Tate

$$\alpha_G : T_p(G) \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes_{\mathbb{Z}_p^h} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \bigoplus_{i \neq i_0} \omega_{G^D, i} \otimes_{\mathbb{Z}_p^h} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$$

Écrivons $\alpha_G = (\alpha_{G, i})_{i \neq i_0}$. Alors, pour $i \neq i_0$, on a, après choix d'une base du \mathbb{Z}_p^h -module de rang 1 $\omega_{G^D, i}$,

$$\text{Im}(\alpha_{G, i}) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \cdot y_i$$

Mais, modulo p , l'application de Hodge-Tate de G coïncide avec celle de $G[p]$

$$\begin{array}{ccc} T_p(G) & \xrightarrow{\alpha_G} & \omega_{G^D} \otimes_{\mathbb{Z}_p^h} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_p(G)/pT_p(G) = G[p](\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) & \xrightarrow{\alpha_{G[p]}} & \omega_{G[p]^D} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \end{array}$$

Or, si $K = \mathbb{Q}_p^h(p^{\frac{1}{q-1}})$ désigne l'extension modérée abélienne maximale de \mathbb{Q}_p^h , on a $G[p](\overline{\mathbb{Q}}_p) = G[p](K)$, i.e., $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p|\mathbb{Q}_p)$ agit trivialement sur $T_p(G)/pT_p(G)$, ou encore χ modulo p est modérément ramifié. Donc

$$\forall i \neq i_0 \quad y_i \in \mathcal{O}_K + p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$$

Étant donné que l'on a déjà vu que $y_i \notin p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, on en déduit que $\forall i \neq i_0, v(y_i) \in \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}$. Reprenant les estimations précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \forall i > i_0, \quad v(y_i) &= \frac{p^{i-i_0}}{q-1} \\ \text{et } \forall i < i_0, \quad v(y_i) &= \frac{p^{h+i-i_0}}{q-1} \end{aligned}$$

Mais maintenant, si $\beta \in \mathbb{Q}_p^\times . t \subset A_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]$ est le déterminant des périodes, on a

$$\beta = \prod_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} x_i$$

De plus, étant donné que pour G l'application des périodes est entière, $\beta \in A_{\text{cris}}$ et donc $\beta \in \mathbb{Z}_p . t$. Donc

$$v(y_{i_0}) + \sum_{i < i_0} \frac{p^{h+i-i_0}}{q-1} + \sum_{i > i_0} \frac{p^{i-i_0}}{q-1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} v(y_i) \in \frac{1}{p-1} + \mathbb{N}$$

Utilisant que $0 \leq v(y_{i_0}) \leq \frac{1}{p-1}$, on obtient que $v(y_{i_0}) = \frac{1}{q-1}$ et donc

$$\beta \in \mathbb{Z}_p^\times . t$$

Ce qui démontre la proposition. \square

Attaquons maintenant le cas de dimension d quelconque. Commençons par remarquer qu'il résulte de l'étude du cas de dimension 1 et du théorème de Tate, $H^0(G_{\mathbb{Q}_{p^h}}, \mathbb{C}_p) = \mathbb{Q}_{p^h}$, que

Corollaire C.2.10. *Pour tout entier i compris entre 1 et $h-1$,*

$$H^0(G_{\mathbb{Q}_{p^h}}, \mathbb{C}_p(\chi^{-\sigma^i})) = \mathbb{Q}_{p^h} . z_i$$

où $z_i \in \mathbb{C}_p$ est un élément de valuation $\frac{p^i}{p^h-1}$.

Plus généralement, on a

Proposition C.2.11. *Soit $(b_j)_{j \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}}$. Soit $\psi = \chi^{\sum_j b_j \chi^{\sigma^j}}$. Supposons que $b_0 = 0$ et donc, d'après le lemme C.2.7, $\mathbb{C}_p(\psi) \simeq \mathbb{C}_p$. Alors*

$$\{z \in \mathbb{C}_p \mid \forall \tau \in G_{\mathbb{Q}_{p^h}}, z^\tau = \psi(\tau) . z\} = H^0(G_{\mathbb{Q}_{p^h}}, \mathbb{C}_p(\psi^{-1})) = \mathbb{Q}_{p^h} . z_\psi$$

où

$$v(z_\psi) \in \sum_{j=0}^{h-1} b_j \frac{p^j}{p^h-1} + \mathbb{Z}$$

Démonstration. Le cup-produit

$$\bigotimes_{j \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} H^0(G_{\mathbb{Q}_{p^h}}, \mathbb{C}_p(\chi^{-\sigma^j}))^{\otimes b_j} \longrightarrow H^0(G_{\mathbb{Q}_{p^h}}, \psi^{-1})$$

est un isomorphisme de \mathbb{Q}_{p^h} -e.v. de dimension 1. C'est donc une conséquence du corollaire précédent. \square

Revenons maintenant au cas d quelconque. La proposition précédente implique que si $a_i = 0$, alors

$$v(y_i) \in \frac{1}{p^h - 1} \left(\sum_{0 \leq j < i} a_j p^{i-j} + \sum_{i < j < h} a_j p^{h+i-j} \right) + \mathbb{Z}$$

et l'estimation $0 \leq v(y_i) \leq \frac{1}{p-1}$ implique que

$$v(y_i) = \frac{1}{p^h - 1} \left(\sum_{0 \leq j < i} a_j p^{i-j} + \sum_{i < j < h} a_j p^{h+i-j} \right)$$

Maintenant si $a_i = 1$, $y_i \in \text{Gr}^1 A_{\text{cris}}$ s'écrit sous la forme $y_i = w_i \cdot t$, où $w_i \in \mathbb{C}_p$. Or t se transforme via $G_{\mathbb{Q}_{p^h}}$ par $N_{\mathbb{Q}_{p^h}|\mathbb{Q}_p} \circ \chi = \chi^{\sum_{j=0}^{h-1} \sigma^j}$. De là, on déduit que $w_i \in H^0(G_{\mathbb{Q}_{p^h}}, \psi^{-1})$, avec $\psi = \chi^{\sum_j (a_j - 1) \sigma^{-j+i}}$. Utilisant de nouveau la proposition précédente, on en déduit $v(w_i)$ à translation par un élément de \mathbb{Z} près et donc, puisque $v(t) = \frac{1}{p-1} = \sum_{j=0}^{h-1} \frac{p^j}{p^h-1}$, $v(y_i)$ à translation par un élément de \mathbb{Z} près. Utilisant l'estimation $0 \leq v(y_i) \leq \frac{1}{p-1}$, on en déduit comme précédemment que

$$v(y_i) = \frac{1}{p^h - 1} \left(\sum_{0 \leq j < i} a_j p^{i-j} + \sum_{i < j < h} a_j p^{h+i-j} \right)$$

On obtient donc bien finalement que

$$\sum_i v(y_i) = \frac{1}{p-1}$$

c'est-à-dire $\beta \in \mathbb{Z}_p^\times \cdot t$.

Cela met un point final à la démonstration du théorème C.2.6. \square

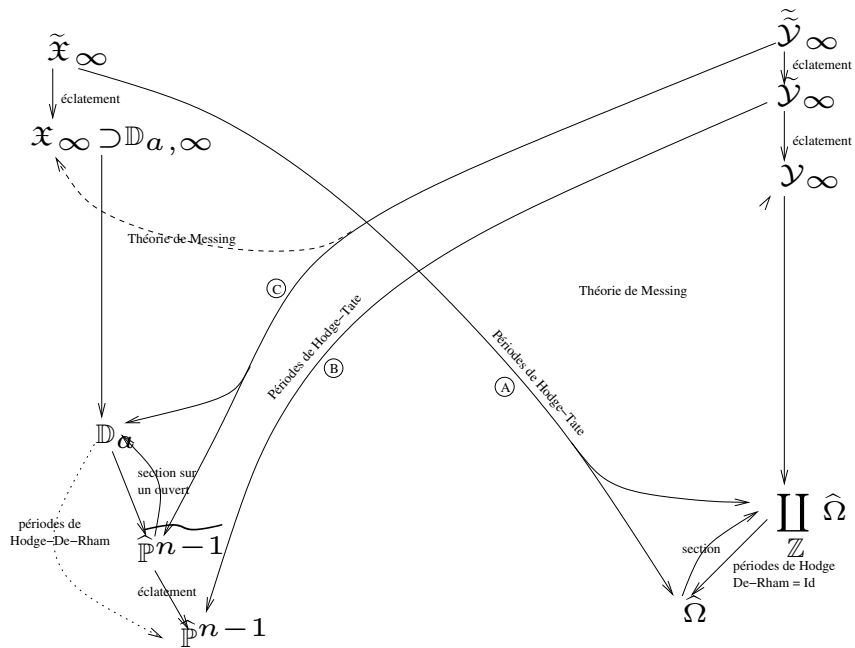
Remarque C.2.12. Il se peut que les résultats de [2] permettent également d'obtenir le résultat précédent sur les périodes CM. L'auteur n'a pas eu le courage de le vérifier.

Bibliographie

- [1] P. Berthelot, L. Breen, and W. Messing. *Théorie de Dieudonné cristalline. II*, volume 930. Springer-Verlag, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, 1982.
- [2] P. Colmez. Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe. *Ann. of Math.*, 138(3):625–683, 1993.
- [3] G. Faltings. Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(1):117–144, 1999.
- [4] G. Faltings. A relation between two moduli spaces studied by v.g. Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 115–129, 2002.
- [5] L. Fargues. Application de Hodge-Tate duale d’un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification. *À paraître à Duke Math.*
- [6] J.-M. Fontaine. Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux. *Invent. Math.*, 65(3):379–409, 1981/82.
- [7] A. Genestier and V. Lafforgue. L’isomorphisme des deux tours. Une autre approche en caractéristique positive. *Ce Volume*.
- [8] M.J. Hopkins and B.H. Gross. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [9] W. Messing. The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes. *Lecture Notes in Mathematics*, 264, 1972.
- [10] M. Rapoport, Th. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*. Number 141 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [11] M. Raynaud. Schémas en groupes de type (p, \dots, p) . *Bull. Soc. Math. France*, 102:241–280, 1974.
- [12] Takeshi Tsuji. p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. *Invent. Math.*, 137(2):233–411, 1999.
- [13] J.P. Wintenberger. Torseurs pour les motifs et pour les représentations p -adiques potentiellement de type CM. *Math. Ann.*, 288(1):1–8.

Chapitre III

L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld: démonstration du résultat principal



Introduction

Dans le premier chapitre on a construit un schéma formel π -adique lié à l'espace de Lubin-Tate "en niveau infini". Dans la première section de cet article on construit un schéma formel π -adique analogue du côté de l'espace de Drinfeld. Sa construction est beaucoup plus simple que celle du premier chapitre. Il s'agit de la limite projective des normalisés du schéma formel de Deligne-Drinfeld $\widehat{\Omega}$ dans les revêtements de sa fibre générique rigide donnés par les structures de niveau sur le \mathcal{O}_D -module formel spécial universel sur $\widehat{\Omega}$ (en fait, étant donné que nous adoptons le point de vue des espace de Rapoport-Zink ([13]), il s'agit d'une union disjointe de tels espaces indexée par \mathbb{Z}).

Le but est maintenant de construire un isomorphisme équivariant entre des éclatements formels admissibles de ces deux schémas formels. Pour cela on construit des morphismes dans les deux directions (Lubin-Tate vers Drinfeld et réciproquement), puis on vérifie qu'ils sont inverses l'un de l'autre.

Avant d'expliquer le principe de la construction introduisons un point-clef: les deux types de périodes vivant sur ces espaces.

Périodes de Hodge De-Rham

Il s'agit des morphismes de périodes étudiés dans le cas de l'espace de Lubin-Tate dans [11] (cf. également la section I.2 du premier chapitre) et définis en toute généralité dans [13]. Il s'agit de l'analogue du plongement $X \hookrightarrow \check{X}$, où X est un espace symétrique hermitien de dual compact \check{X} .

Le principe est le suivant: si R est une $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ -algèbre p -adique et H est un groupe p -divisible sur $\mathrm{Spf}(R)$, il y a une filtration de De-Rham sur l'homologie de De-Rham de H

$$0 \longrightarrow V(H) \longrightarrow \mathrm{Lie} E(H) \longrightarrow \mathrm{Lie} H \longrightarrow 0$$

où $E(H)$ est l'extension vectorielle universelle de H et $V(H)$ sa partie vectorielle. Supposons-nous donnés un groupe p -divisible H_0 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et une quasi-isogénie

$$\rho : H_0 \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} R/pR \longrightarrow H \otimes_R R/pR$$

Celle-ci fournit, grâce à la nature cristalline de l'extension vectorielle universelle ([12]) couplée aux puissances divisées sur l'idéal pR , une rigidification de l'homologie de De-Rham

$$\rho_* : \mathbb{D}(H_0) \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)} R[\frac{1}{p}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie} E(H)[\frac{1}{p}]$$

où $\mathbb{D}(-)$ désigne le module de Dieudonné covariant. Et donc la suite précédente donne, après inversion de p , un morphisme de $\mathrm{Spec}(R[\frac{1}{p}])$ vers une Grassmannienne associée à l'espace $\mathbb{D}(H_0)[\frac{1}{p}]$.

Périodes de Hodge-Tate

Reprenons les notations précédentes. Il y a un morphisme

$$\alpha_H : \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, H) \longrightarrow \omega_{H^D}$$

où H^D désigne le dual de Cartier de H . À $\chi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow H$, on associe $(\chi^D)^* \frac{dT}{T}$, où $\chi^D : H^D \longrightarrow \mu_{p^\infty}$ et $(\chi^D)^* : R \cdot \frac{dT}{T} = \omega_{\mu_{p^\infty}} \longrightarrow \omega_{H^D}$. Notons $T_p(H) = \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, H)$, qui, si R est sans p -torsion intégralement fermé dans $R[\frac{1}{p}]$, s'identifie à $\text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, H \otimes_R R[\frac{1}{p}])$ et ne dépend donc que du groupe étale fibre générique $H \otimes_R R[\frac{1}{p}]$. Supposons de plus que $\mu_{p^\infty}(\overline{\mathbb{Q}_p}) \subset R$. Il y a alors un accouplement parfait

$$T_p(H) \times T_p(H^D) \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1)$$

et l'on a donc une suite

$$0 \longrightarrow \omega_H^*(1) \xrightarrow{t\alpha_{H^D}(1)} T_p(H) \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \xrightarrow{\alpha_H} \omega_{H^D} \longrightarrow 0$$

Sous certaines hypothèses (et c'est là une des difficultés majeures de ce chapitre), on peut rendre cette suite exacte après inversion de p . Si maintenant on se donne une rigidification du module de Tate $\mathbb{Z}_p^n \xrightarrow{\sim} T_p(H)$, on obtient une suite exacte de Hodge-Tate

$$0 \longrightarrow \omega_H^*[\frac{1}{p}](1) \xrightarrow{t\alpha_{H^D}(1)} R[\frac{1}{p}]^n \xrightarrow{\alpha_H} \omega_{H^D}[\frac{1}{p}] \longrightarrow 0$$

qui fournit donc un morphisme de $\text{Spec}(R[\frac{1}{p}])$ vers une Grassmannienne associée à l'espace vectoriel \mathbb{Q}_p^n .

Plan de la démonstration

Le principe général est le même dans les deux sens. On note \mathfrak{X}_∞ le schéma formel associé à l'espace de Lubin-Tate construit dans le premier chapitre (section I.10).

- On construit un morphisme de périodes de Hodge-Tate d'un espace en niveau infini vers l'espace des périodes de Hodge-De-Rham de l'autre espace, le principe étant que, via l'isomorphisme entre les deux tours, les périodes de Hodge-De-Rham et de Hodge-Tate sont permutées.

L'espace des périodes de Hodge-De-Rham associé à l'espace de Drinfeld $\widehat{\Omega}$ est l'espace de Drinfeld lui-même: l'application des périodes de Hodge-De-Rham est un isomorphisme sur son image pour cet espace (et possède donc un modèle entier (i.e., sans inverser p) donné par l'identité).

Ainsi dans la section 2, on construit un morphisme de périodes de Hodge-Tate (noté (A) dans la figure III.1) de l'espace de Lubin-Tate "en niveau infini" éclaté $\widetilde{\mathfrak{X}}_\infty$ vers l'espace de Drinfeld $\widehat{\Omega}$. Pour définir ce morphisme nous avons besoin d'éclater (et normaliser) le schéma formel \mathfrak{X}_∞ construit dans le premier chapitre, pour deux raisons:

- La première est que l'on doit platifier par éclatements l'image d'une certaine application de Hodge-Tate afin de définir une version entière de celle-ci (la suite de Hodge-Tate précédente ne peut être exacte qu'après inversion de p).
- La seconde vient du fait qu'une fois qu'on a platifié la suite de Hodge-Tate, on a un morphisme d'un certain éclaté de \mathfrak{X}_∞ vers un espace projectif, mais $\widehat{\Omega}$ est lui-même obtenu par éclatement de l'espace projectif. Il faut donc tirer en arrière de tels éclatements vers \mathfrak{X}_∞ afin de relever le morphisme défini vers l'espace projectif à $\widehat{\Omega}$. Cela est rendu nécessaire par le fait que la décomposition cellulaire de \mathfrak{X}_∞ , construite dans le chapitre I est indexée par un immeuble de Bruhat-Tits, ne correspond pas à la décomposition cellulaire usuelle de $\widehat{\Omega}$ associée à l'immeuble du groupe linéaire. En effet, on montre dans [9] que l'image du domaine fondamental de Gross-Hopkins (qui vit dans l'espace de Lubin-Tate) dans Ω est un domaine polyédral qui n'apparaît pas dans la structure simpliciale de l'immeuble, et donc n'apparaît pas dans la fibre spéciale de $\widehat{\Omega}$.

L'espace des périodes de Hodge-De-Rham associé à l'espace de Lubin-Tate est le schéma formel $\widehat{\mathbb{P}}^{n-1}$. De la même façon que précédemment, on définit dans la section III.4 un morphisme de périodes de Hodge-Tate (noté (B)) d'un éclaté $\widetilde{\mathcal{Y}}_\infty$ du schéma formel associé à l'espace de Drinfeld en niveau infini, noté \mathcal{Y}_∞ , vers l'espace des périodes de Hodge-De-Rham de l'espace Lubin-Tate $\widehat{\mathbb{P}}^{n-1}$. L'éclatement sert à platifier la suite de Hodge-Tate.

- Après avoir construit ces deux morphismes de périodes de Hodge-Tate on les relève aux espaces de modules sans structure de niveau.
 - Dans le cas de l'espace de Drinfeld, c'est immédiat, puisque l'application des périodes est l'identité (ou plutôt la projection $\coprod_{\mathbb{Z}} \widehat{\Omega} \longrightarrow \widehat{\Omega}$ puisque l'on considère les espaces de Rapoport-Zink). On peut donc relever le morphisme noté précédemment (A) en un morphisme $\widetilde{\mathfrak{X}}_\infty \longrightarrow \coprod_{\mathbb{Z}} \widehat{\Omega}$.
 - Dans le cas de l'espace de Lubin-Tate, cela s'avère plus complexe. Commençons par rappeler que le schéma formel \mathfrak{X}_∞ a été construit comme recollement de cellules (des schémas formels π -adiques affines) "en niveau infini" $\mathbb{D}_{a,\infty}$, où l'indice a varie dans les sommets d'un immeuble de Bruhat-Tits. La cellule $\mathbb{D}_{a,\infty}$ est au-dessus d'une cellule sans niveau \mathbb{D}_a . On utilise le fait ([11], ou bien le théorème I.4.1) que l'application des périodes rigides $\mathbb{D}_a^{\text{rig}} \longrightarrow (\mathbb{P}^{n-1})^{\text{rig}}$ est un isomorphisme sur son image, un ouvert admissible dans $(\mathbb{P}^{n-1})^{\text{rig}}$. Quitte à former un éclatement formel admissible $\widetilde{\widehat{\mathbb{P}}^{n-1}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{P}}^{n-1}$, on peut faire apparaître cet ouvert dans la fibre spéciale de $\widetilde{\widehat{\mathbb{P}}^{n-1}}$. Alors, l'application des périodes de Hodge-De-Rham devient entière sur \mathbb{D}_a et induit un isomorphisme entre \mathbb{D}_a et cet ouvert. Tirant en arrière l'éclatement $\widetilde{\widehat{\mathbb{P}}^{n-1}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{P}}^{n-1}$ sur $\widetilde{\mathcal{Y}}_\infty$, on

obtient un éclatement $\widetilde{\mathcal{Y}}_\infty \rightarrow \mathcal{Y}_\infty$ tel que sur cet éclaté le morphisme de périodes de Hodge-Tate (B) s'étende en un morphisme noté (C) vers $\widehat{\mathbb{P}^{n-1}}$. Grâce au fait que le morphisme des périodes est un isomorphisme entre \mathbb{D}_a et un ouvert de $\widehat{\mathbb{P}^{n-1}}$, on a une section sur cet ouvert qui permet de relever le morphisme (C) (c'est un peu plus compliqué que cela car la section n'existe que sur un ouvert...) de $\widetilde{\mathcal{Y}}_\infty$ vers la cellule sans niveau \mathbb{D}_a . Tout cela est fait dans la section III.5.

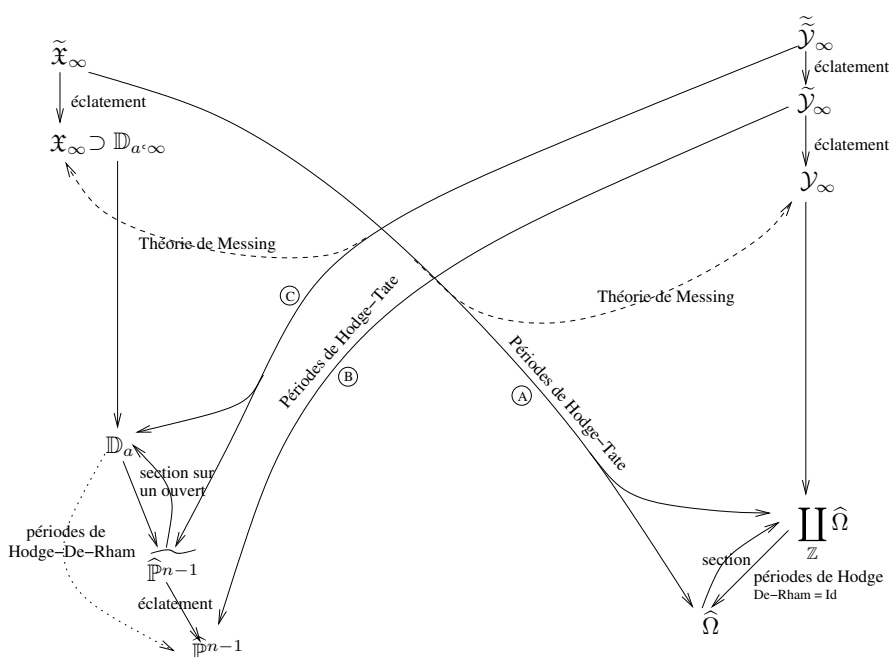


FIG. III.1: Le schéma de la démonstration

- Il reste maintenant à relever nos deux morphismes, dont le but est un des schémas formels sans niveau, vers le schéma formel en niveau infini. Pour cela il faut construire des éléments dans le module de Tate de l'image réciproque par notre morphisme du groupe p -divisible universel sur l'espace au but du morphisme. On utilise pour cela la théorie de Messing. Celle-ci permet de transférer des éléments du module de Tate d'un groupe p -divisible vers un autre en les transférant modulo p puis en utilisant le critère de relèvement de Messing (le fait qu'un morphisme induit au niveau des cristaux est compatible aux filtrations de Hodge). Cela est fait dans la section III.3 pour le morphisme de Lubin-Tate vers Drinfeld et dans la section III.6 dans l'autre sens.

- Enfin dans la section III.7 on éclate de nouveaux idéaux (et normalise) afin de construire les deux schémas formels finaux éclatés isomorphes. Pour cela on développe dans l'appendice une théorie des éclatements formels admissibles et normalisation dans la fibre générique pour des schémas formels π -adiques ne satisfaisant aucune condition de finitude. Les résultats de l'appendice permettent également de voir que les éclatements/normalisation effectués durant la démonstration peuvent se faire directement en niveau infini.

Prérequis: La lecture des chapitres I et II est indispensable puisque cet article leur fait suite. Par contre, nous n'utiliserons quasiment pas l'article [9] (nous l'utilisons dans la section III.2.2, cependant la section II.2.2 du chapitre II serait suffisante mais donnerait lieu à des éclatements supplémentaires). Nous utilisons la théorie de [8] des "strict \mathcal{O} -actions" afin de "simplifier" les notations. Le lecteur ne connaissant pas [8] pourra supposer $F = \mathbb{Q}_p$. Outre la connaissance des diverses références déjà citées dans les prérequis des deux premiers chapitres le lecteur doit être familier avec la théorie de Raynaud des éclatements formels admissibles telle qu'exposée dans [3]. Bien qu'elle n'apparaisse pas dans les démonstrations, la théorie de Fontaine est au coeur de cet isomorphisme et a toujours été présente à l'esprit de l'auteur (cf. chapitre II).

Notations

On fixe F une extension de degré fini de \mathbb{Q}_p . On note \mathcal{O} son anneau des entiers et \mathbb{F}_q son corps résiduel. Enfin, on fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de \mathbb{F}_q et l'on note $\check{\mathcal{O}} = W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$.

Fixons \mathcal{LT} un groupe de Lubin-Tate de hauteur 1 relativement à l'extension $F|\mathbb{Q}_p$ sur $\check{\mathcal{O}}$. On note alors $F/\mathcal{O}_F(1) = \mathcal{LT}[\pi^\infty](\mathcal{O}_{\overline{F}})$ et $\mathcal{O}_F(1) = T_p(\mathcal{LT})$ son module de Tate. Enfin on fixe un générateur $\beta_{\mathcal{LT}}$ du $\check{\mathcal{O}}$ -module de rang un $\omega_{\mathcal{LT}}$ des formes différentielles invariantes sur \mathcal{LT} .

Soit \mathbb{H} un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension 1 et hauteur n sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. Soit D une algèbre à division d'invariant $1/n$ sur F . On identifie alors \mathcal{O}_D à $\text{End}(\mathbb{H})$. On fixe un \mathcal{O}_D -module π -divisible formel spécial \mathbb{G} de hauteur n^2 sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ muni d'une isogénie \mathcal{O}_D -équivariante

$$\Delta : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{G}$$

(on renvoie à la section II.3). On note $\mathbb{D}(\mathbb{H})$, resp. $\mathbb{D}(\mathbb{G})$, les modules de Dieudonné covariants de \mathbb{H} , resp. \mathbb{G} , relativement à l'extension $F|\mathbb{Q}_p$ (on renvoie à l'appendice B du premier chapitre où on les note $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(-)$). Ce sont des $\check{\mathcal{O}}$ -modules de rang n , resp. n^2 , munis d'un endomorphisme σ^{-1} -linéaire V , le Verschiebung, où σ désigne le Frobenius de $W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$.

Soit Π une uniformisante de \mathcal{O}_D . Soit F_n une extension non-ramifiée de degré n de F dans D . La bijection $\mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} \text{End}(\mathbb{H})$ induit un morphisme $\mathcal{O}_{F_n} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_q$

par action de \mathcal{O}_{F_n} sur l'algèbre de Lie de \mathbb{H} . Cela permet d'identifier le corps résiduel de F_n à \mathbb{F}_{q^n} et fournit un plongement $F_n \hookrightarrow \check{F}$.

Fixons un isomorphisme

$$F \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi}$$

où $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}$ désigne le facteur direct de $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$, où $\mathcal{O}_{F_n} \subset \mathcal{O}_D = \text{End}(\mathbb{H})$ agit via le plongement $F_n \hookrightarrow \check{F}$.

Via Δ , cela induit un isomorphisme

$$F^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi}$$

Cela nous permet d'identifier

$$\text{End}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} = \text{End}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}, V) = \text{End}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi}) = M_n(F)$$

Pour un groupe M , on note \underline{M} le faisceau constant associé.

III.1 La bestiole du côté Drinfeld

Dans le premier chapitre on a construit un schéma formel p -adique \mathfrak{X}_{∞} sur $\text{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ muni d'une action de $\text{GL}_n(F) \times D^{\times}$. Nous construisons maintenant son équivalent du côté Drinfeld.

Rappelons qu'un schéma formel localement de type fini plat sur $\text{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ est un schéma formel localement de la forme $\text{Spf}(A)$ où A est une $\check{\mathcal{O}}$ -algèbre π -adiquement complète topologiquement de type fini sans π -torsion c'est-à-dire un quotient sans π -torsion d'une algèbre du type $\check{\mathcal{O}}\langle T_1, \dots, T_n \rangle$, les séries formelles π -adiquement convergentes. Rappelons également que pour ce type de schémas formels, on a une bonne notion de schéma formel normal, ainsi que de normalisé (on renvoie à l'appendice A du chapitre I).

Rappelons également qu'on appelle schéma formel π -adique (sous-entendu sur $\text{Spf}(\check{\mathcal{O}})$) un schéma formel \mathfrak{Z} pour lequel $\pi\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ est un idéal de définition. La catégorie des schémas formels π -adiques est donc équivalente à la limite projective de la catégorie des schémas sur $(\text{Spec}(\check{\mathcal{O}}/\pi^k\check{\mathcal{O}}))_{k \geq 1}$, c'est-à-dire les familles $(Z_k)_{k \geq 1}$ munies de données de réduction, où Z_k est un schéma sur $\text{Spec}(\check{\mathcal{O}}/\pi^k\check{\mathcal{O}})$ et la donnée de réduction est un ensemble d'isomorphismes $Z_{k+1} \otimes \check{\mathcal{O}}/\pi^k\check{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} Z_k$ satisfaisant des conditions de cocycles évidentes.

Enfin tous les schémas formels considérés seront quasi-séparés.

Lemme III.1.1. *Soit K un sous-groupe ouvert de \mathcal{O}_D^{\times} . Le foncteur défini sur la catégorie des schémas formels localement de type fini sur $\text{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ plats et normaux qui à \mathfrak{Z} associe l'ensemble des classes d'isomorphismes de triplets (G, ρ, η) où*

- G est un \mathcal{O}_D -module formel spécial sur \mathfrak{Z}

- $\rho : \mathbb{G} \times_{\overline{\mathbb{F}}_q} (\mathfrak{Z} \bmod \pi) \longrightarrow G \times_{\mathfrak{Z}} (\mathfrak{Z} \bmod \pi)$ est une quasi-isogénie \mathcal{O}_D -équivariante
- $\eta : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} T_p(G^{\text{rig}})[K]$ est une structure de niveau K sur $\mathfrak{Z}^{\text{rig}}$,

est représentable.

Démonstration. Si $K = \mathcal{O}_D^\times$, le foncteur classe les couples (G, ρ) modulo isomorphisme. On sait alors qu'il est représentable (non-canoniquement) par le schéma formel

$$\coprod_{\mathbb{Z}} \widehat{\Omega}$$

où $\widehat{\Omega}$ est le schéma formel de Deligne-Drinfeld sur $\text{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ et la composante indexée par l'entier h dans l'union disjointe sur \mathbb{Z} classe les couples (G, ρ) avec $\text{ht } \rho = nh$ (par hauteur, on entend hauteur au sens des \mathcal{O} -modules π -divisibles).

Pour K général, l'espace classifiant des structures de niveau K sur l'espace rigide fibre générique de l'espace précédent est un espace rigide

$$\coprod_{\mathbb{Z}} \Omega_K$$

étale fini au-dessus de

$$\coprod_{\mathbb{Z}} \widehat{\Omega}^{\text{rig}}$$

D'après l'appendice A.3 du premier chapitre, le foncteur de l'énoncé est donc représentable par le normalisé de $\coprod_{\mathbb{Z}} \widehat{\Omega}$ dans $\coprod_{\mathbb{Z}} \Omega_K$. \square

Remarque III.1.2. Avec les notations de la démonstration précédente rappelons que si

$$\Pi_K : \Omega_K \longrightarrow \widehat{\Omega}^{\text{rig}}$$

est le morphisme d'oubli de la structure de niveau,

$$\text{sp} : \widehat{\Omega}^{\text{rig}} \longrightarrow \widehat{\Omega}$$

le morphisme de topos annelés de "spécialisation" et $\mathcal{O}_{\Omega_K}^0 \subset \mathcal{O}_{\Omega_K}$ le sous-faisceau des fonctions rigides

$$\mathcal{O}_{\Omega_K}^0 = \{f \in \mathcal{O}_{\Omega_K} \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$$

alors $\text{sp}_* \Pi_{K*} \mathcal{O}_{\Omega_K}^0$ est une $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}}$ -algèbre cohérente et si

$$\widehat{\Omega}_K = \text{Spf}(\text{sp}_* \Pi_{K*} \mathcal{O}_{\Omega_K}^0)$$

alors $\widehat{\Omega}_K$ est un schéma formel localement de type fini sur $\text{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ et $\coprod_{\mathbb{Z}} \widehat{\Omega}_K$ représente le schéma formel du lemme précédent.

Définition III.1.3. On note \mathcal{Y}_K le schéma formel précédent. On obtient ainsi une tour de schémas formels π -adiques, dont les morphismes de transition sont finis et qui est munie d'une action de $\mathrm{GL}_n(F) \times \mathcal{O}_D^\times$, via

$$\forall (g, d) \in \mathrm{GL}_n(F) \times \mathcal{O}_D^\times, (g, d) : \mathcal{Y}_K \longrightarrow \mathcal{Y}_{dKd^{-1}}$$

où $\mathrm{GL}_n(F)$ agit à gauche et \mathcal{O}_D^\times à droite. Cette action est définie en posant

$$(g, d).(G, \rho, \eta) = (G, \rho \circ g^{-1}, \eta \circ d^{-1})$$

où

$$\begin{aligned} d^{-1} : \mathcal{O}_D &\longrightarrow \mathcal{O}_D \\ d' &\longmapsto d'd^{-1} \end{aligned}$$

et on utilise l'identification de $\mathrm{GL}_n(F)$ à $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}_{\mathbb{Q}})^\times$.

Lemme III.1.4. L'action de $\mathrm{GL}_n(F) \times \mathcal{O}_D^\times$ s'étend en une action de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$.

Démonstration. Pour $(G, \rho, \eta) \in \mathcal{Y}_K$ et $(g, d) \in \mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$, posons

$$(g, d).(G, \rho, \eta) = (G', \rho', \eta'),$$

où

- si $d \in \mathcal{O}_D, d \in \Pi^a \mathcal{O}_D^\times$, alors

$$G' = G/G[\Pi^a]$$

et si φ est l'isogénie $\varphi : G \rightarrow G/G[\Pi^a]$, alors

$$\rho' = \varphi \circ \rho \circ g^{-1}$$

et η' fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_D & \xrightarrow[\simeq]{\eta} & T_p(G^{\mathrm{rig}}) \quad [K] \\ \downarrow \bullet d & & \downarrow \varphi_* \\ \mathcal{O}_D & \xrightarrow[\simeq]{\eta'} & T_p(G'^{\mathrm{rig}}) \quad [dKd^{-1}] \end{array}$$

- pour d général, on pose

$$(g, d).(G, \rho, \eta) = (\pi^b g, \pi^b d).(G, \rho, \eta)$$

avec $b \gg 0$.

On vérifie que cela définit bien une action pour laquelle $\forall x \in F^\times, (x, x) \in \mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ agit trivialement. \square

Remarque III.1.5. Le fait que l'action de \mathcal{O}_D^\times s'étende en une action de D^\times au normalisé résulte en fait de ce que le sous-groupe compact maximal \mathcal{O}_D^\times est distingué dans D^\times . Cela est faux en général pour un espace de Rapoport-Zink quelconque.

Définition III.1.6. On note \mathcal{Y}_∞ le schéma formel π -adique $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariant sur $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ limite projective dans la catégorie des schémas formels π -adiques des $(\mathcal{Y}_K)_{K \subset \mathcal{O}_D^\times}$.

Remarque III.1.7. Dans le premier chapitre, on a construit le schéma formel \mathfrak{X}_∞ du côté Lubin-Tate par recollement de cellules (des schémas formels) indexées par les sommets d'un immeuble de Bruhat-Tits. Le schéma formel \mathcal{Y}_∞ admet une telle décomposition cellulaire, puisque c'est le cas de $\hat{\Omega}$. Cependant, pour \mathcal{Y}_∞ les cellules sont indexées par les simplexes de l'immeuble. La raison en est que, via l'isomorphisme entre les deux tours, le domaine fondamental de Gross-Hopkins dans l'espace de Lubin-Tate n'est pas envoyé sur un simplexe de l'immeuble du côté Drinfeld mais sur un sous-ensemble plus petit (il s'agit d'un domaine fondamental pour toutes les correspondances de Hecke sphériques alors qu'un simplexe maximal est un domaine fondamental pour les correspondances de degré un multiple de n , cf. [9]). Les deux décompositions cellulaires de \mathfrak{X}_∞ et \mathcal{Y}_∞ ne se correspondent donc pas directement. C'est une des raisons pour lesquelles on devra éclater le schéma formel \mathcal{Y}_∞ pour faire apparaître cet ensemble plus petit que le simplexe qui n'apparaît pas dans la fibre spéciale de $\hat{\Omega}$.

III.2 Construction du morphisme $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty \longrightarrow \hat{\Omega}$

Le but de ce chapitre est de construire un morphisme équivariant d'un certain éclaté de \mathfrak{X}_∞ vers le schéma formel de Deligne-Drinfeld $\hat{\Omega}$.

III.2.1 Définition de l'application de Hodge-Tate sur une cellule de \mathfrak{X}_∞

On reprend les notations du premier chapitre. Soit $a = [\Lambda, M]$ un sommet de l'immeuble \mathcal{I} de $(\mathrm{GL}_{n/F} \times D^\times)/\mathcal{G}_m$. Soit

$$\mathbb{D}_{a,\infty} = \varprojlim_{K \subset \mathrm{GL}(\Lambda)} \mathbb{D}_{a,K}$$

le schéma formel affine π -adique sur $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ construit dans la section I.8 (la cellule associée au sommet a , cf. définition I.8.15). Afin d'alléger les notations nous noterons momentanément

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &:= \mathbb{D}_{a,\mathrm{GL}(\Lambda)} \\ \forall k \geq 1, \mathbb{D}_k &:= \mathbb{D}_{a,Id + \pi^k \mathrm{End}(\Lambda)} \\ \text{et } \mathbb{D}_\infty &:= \varprojlim_k \mathbb{D}_k \end{aligned}$$

Fait admis: On admettra que $\forall k \geq 1$, $\mathcal{O}_F/\pi^k \mathcal{O}_F(1)$ est trivial sur \mathbb{D}_k , c'est-à-dire $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}$ contient les points de π^k -torsion d'un groupe de Lubin-Tate de hauteur 1 (si $F = \mathbb{Q}_p$, $\mathbb{D}_k \rightarrow \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^k}])$). Cela se déduit de la construction d'une application déterminant construite en utilisant les théorèmes de comparaison relatifs de [7]. On peut également le déduire de l'existence de l'application déterminant de Deligne ([5]) appliquée aux variétés de Shimura de [10].

Soit H le \mathcal{O} -module π -divisible universel sur \mathbb{D} . On note H^\vee son dual strict au sens de Faltings ([8]). D'après la remarque I.8.2, pour tout entier $k \geq 1$, le groupe H est muni d'une structure de niveau de Drinfeld de niveau k sur \mathbb{D}_k

$$\eta : \pi^{-k} \Lambda / \Lambda \longrightarrow H[\pi^k](\mathbb{D}_k)$$

Rappelons qu'étant donnée que \mathbb{D}_k est normal, l'application fibre générique induit une bijection entre ensembles finis

$$\pi_0(\mathbb{D}_k) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathbb{D}_k^{\mathrm{rig}})$$

Si \mathfrak{Z} est une composante connexe de \mathbb{D}_k , alors η induit une bijection

$$\eta : \pi^{-k} \Lambda / \Lambda \xrightarrow{\sim} H[\pi^k](\mathfrak{Z})$$

En effet, le schéma formel \mathfrak{Z} étant normal et $H[\pi^k]$ un groupe plat fini, on a

$$H[\pi^k](\mathfrak{Z}) = H[\pi^k]^{\mathrm{rig}}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{rig}})$$

et par définition d'une structure de niveau sur la fibre fibre générique, un tel η doit induire un isomorphisme en fibre générique sur chaque composante connexe. De plus, pour une telle composante connexe, l'accouplement de dualité

$$H[\pi^k](\mathfrak{Z}) \times H[\pi^k]^\vee(\mathfrak{Z}) \longrightarrow F/\mathcal{O}_F(1)$$

est parfait, puisque c'est le cas en fibre générique. L'isomorphisme η induit donc, pour chaque composante connexe \mathfrak{Z} de \mathbb{D}_k , un isomorphisme

$$\eta^\vee : \Lambda^* / \pi^k \Lambda^*(1) \xrightarrow{\sim} H[\pi^k]^\vee(\mathfrak{Z})$$

Rappelons que l'inclusion $H[\pi^k] \hookrightarrow H$ induit un isomorphisme

$$\omega_H / \pi^k \omega_H \xrightarrow{\sim} \omega_{H[\pi^k]}$$

Pour tout \mathbb{D} -schéma formel \mathfrak{Z} , il y a une application de Hodge-Tate modulo π^k

$$\begin{aligned} H[\pi^k]^\vee(\mathfrak{Z}) &\longrightarrow \omega_{H[\pi^k]} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} = \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \\ x &\longmapsto (x^\vee)^* \beta_{\mathcal{L}\mathcal{T}} \end{aligned}$$

où, si $x \in H[\pi^k]^\vee(\mathfrak{Z})$, x correspond à un morphisme strict

$$x^\vee : H[\pi^k] \times_{\mathbb{D}} \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathcal{L}\mathcal{T}[\pi^k]$$

et $(x^\vee)^*$ est le morphisme induit au niveau des formes différentielles invariants.

En particulier, appliquant cela pour \mathfrak{z} variant parmi les composantes connexes de \mathbb{D}_k et utilisant la rigidification η^\vee , on obtient une application de Hodge-Tate

$$\alpha_{H^\vee[\pi^k]} : \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}(1) \longrightarrow \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}$$

Ces différentes applications sont compatibles lorsque k varie:

$$\alpha_{H^\vee[\pi^{k+1}]} \bmod \pi^k \equiv \alpha_{H^\vee[\pi^k]} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}} \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{k+1}}$$

On en déduit un morphisme de Hodge-Tate

$$\boxed{\alpha_{H^\vee} : \Lambda^* \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}(1) \longrightarrow \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}}$$

vérifiant

$$\forall k, \alpha_{H^\vee} \bmod \pi^k \equiv \alpha_{H^\vee[\pi^k]} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}} \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}$$

III.2.2 Rappels de quelques résultats de [9] sur l'application de Hodge-Tate dans le cas d'un point

Nous utilisons ici un résultat de [9]. Néanmoins cela n'est pas strictement nécessaire. Par exemple, pour construire l'application de Hodge-Tate dans l'autre sens, de la tour de Drinfeld en niveau infini vers l'espace des périodes de Hodge-de-Rham de la tour de Lubin-Tate (cf. section III.4), nous n'utiliserons pas de résultat analogue à celui-ci. Cependant ce résultat permet de simplifier la construction des éclatements. On aurait également pu utiliser la proposition moins précise II.2.6, dont la démonstration est plus élémentaire.

Proposition III.2.1. *Soit $K|F$ un corps valué complet pour une valuation v à valeurs dans \mathbb{R} étendant celle de F . Soit H un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension 1 sur \mathcal{O}_K et*

$$\alpha_{H^\vee} : T_p(H^\vee) \longrightarrow \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

l'application de Hodge-Tate de H^\vee . Supposons que le polygone de Newton de la multiplication par π associé à H soit dans le domaine fondamental de Gross-Hopkins. Alors

$$\forall w \in T_p(H^\vee) \setminus \pi T_p(H^\vee), \quad \alpha_{H^\vee}(w) \notin \pi^2 \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 1 de [9]. En effet, d'après celui-ci, puisque le polygone de Newton de la multiplication par π de H est dans le domaine fondamental de Gross-Hopkins (donc dans le "simplexe fondamental"), si \mathcal{P} désigne le polygone de Newton

$$v(\alpha_{H^\vee}(w)) = \frac{q}{q-1} (1 - (\mathcal{P}(q^{i-1}) - \mathcal{P}(q^i)))$$

pour un i tel que $1 \leq i \leq n$. □

Citons également la proposition suivante qui résulte immédiatement de [9].

Proposition III.2.2. *Reprenons les hypothèses de la proposition précédente. Soit $\Omega(\widehat{K}) \subset \mathbb{P}(V_p(H^\vee))(\widehat{K})$ l'espace de Drinfeld et \mathcal{I} l'immeuble de $PGL(V_p(H^\vee))$. Soit $\lambda : \Omega(\widehat{K}) \rightarrow |\mathcal{I}|$ la rétraction sur la réalisation géométrique de l'immeuble. Soit E l'étoile du sommet $[T_p(H^\vee)]$ dans \mathcal{I} et $|E|$ sa réalisation géométrique,*

$$|E| = \bigcup_{\substack{\sigma \text{ simplexe de } \mathcal{I} \\ [T_p(H^\vee)] \in \sigma}} |\sigma|$$

Alors si $x \in \hat{\Omega}(\widehat{K})$ est le point correspondant à α_{H^\vee} ,

$$\lambda(x) \in \text{Intérieur}(|E|)$$

et un petit calcul permet de conclure.

III.2.3 Quelques rappels sur le schéma formel de Deligne-Drinfeld

III.2.3.1 L'ouvert associé à un simplexe. Soit σ un simplexe de l'immeuble de $PGL_{n/F}$ représenté par une suite de réseaux

$$\pi\Lambda_1 \subsetneq \Lambda_r \subsetneq \cdots \subsetneq \Lambda_1$$

On note alors $\hat{\Omega}_\sigma$ le schéma formel classifiant les diagrammes

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda_{r+1} = \pi\Lambda_1 & \hookrightarrow & \Lambda_r & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & \Lambda_i & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & \Lambda_1 \\ \downarrow u_1 \pi^{-1} & & \downarrow u_r & & & & \downarrow u_i & & & & \downarrow u_1 \\ \mathcal{L}_1 & \longrightarrow & \mathcal{L}_r & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{L}_i & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{L}_1 \\ & & & & & & \searrow & & & & \nearrow \\ & & & & & & & \times \pi & & & \end{array}$$

sur un \mathcal{O}_F -schéma S sur lequel π est nilpotent, où les \mathcal{L}_i , $1 \leq i \leq r$, sont des fibrés en droites, les applications u_i sont \mathcal{O}_F -linéaires et $\forall i$, $1 \leq i \leq r$, $\forall x \in S$

$$\ker(\Lambda_i/\pi\Lambda_i \rightarrow \mathcal{L}_i \otimes k(x)) \subset \Lambda_{i+1}/\pi\Lambda_i$$

On remarquera en particulier que $\forall i$, les sections $u_i(\Lambda_i)$ engendrent le fibré \mathcal{L}_i .

Soit maintenant $\hat{\mathbb{P}}(\Lambda_1)$ le schéma formel complété π -adique de l'espace projectif $\mathbb{P}(\Lambda_1)$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_F)$. Le simplexe définit un drapeau de variétés linéaires dans la fibre spéciale de $\hat{\mathbb{P}}(\Lambda_1)$

$$\mathbb{P}(\Lambda_1/\Lambda_2) \subsetneq \mathbb{P}(\Lambda_1/\Lambda_3) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{P}(\Lambda_1/\Lambda_r) \subsetneq \mathbb{P}(\Lambda_1/\pi\Lambda_1) = \hat{\mathbb{P}}(\Lambda_1) \times_{\text{Spf}(\mathcal{O}_F)} \text{Spec}(\mathbb{F}_q)$$

Notons \widehat{W}_σ l'éclatement formel admissible de toutes ces variétés de la fibre spéciale. Si

$$u : \Lambda_1 \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}}(\Lambda_1)} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}}(\Lambda_1)}(1)$$

désigne le morphisme universel sur $\widehat{\mathbb{P}}(\Lambda_1)$ et si

$$\forall 1 \leq i \leq r, \quad \mathcal{I}_{\Lambda_i} = u(\Lambda_i \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}}(\Lambda_1)})(-1) \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}}(\Lambda_1)}$$

est l'idéal cohérent définissant $\mathbb{P}(\Lambda_1/\Lambda_i) \hookrightarrow \widehat{\mathbb{P}}(\Lambda_1)$, alors W_σ est l'éclatement formel admissible de l'idéal

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \mathcal{I}_{\Lambda_i}$$

Ainsi, sur \widehat{W}_σ , l'image par u des Λ_i devient localement libre de rang 1 et \widehat{W}_σ classe les diagrammes

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda_{r+1} = \pi\Lambda_1 & \hookrightarrow & \Lambda_r & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \Lambda_i & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \Lambda_1 \\ \downarrow u_1 \pi^{-1} & & \downarrow u_r & & & & \downarrow u_i & & & & \downarrow u_1 \\ \mathcal{L}_1 & \longrightarrow & \mathcal{L}_r & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{L}_i & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{L}_1 \\ & & & & & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\times \pi} & & & & \end{array}$$

sur un \mathcal{O}_F -schéma S sur lequel π est nilpotent, où les \mathcal{L}_i sont des fibrés en droites et $\forall i, u_i(\Lambda_i)$ engendre \mathcal{L}_i , ou encore de façon équivalente, $\forall x \in S$, l'application $\Lambda_i/\pi\Lambda_i \longrightarrow \mathcal{L}_i \otimes k(x)$ est non nulle.

Il résulte de cette description que

$$\widehat{\Omega}_\sigma \subset \widehat{W}_\sigma$$

est un sous-schéma formel ouvert.

Exemple III.2.3. Lorsque $n = 2$, \widehat{W}_σ est le schéma formel stable dont la fibre spéciale est l'union d'une droite projective D sur \mathbb{F}_q et de droites projectives $(L_x)_{x \in D(\mathbb{F}_q)}$ telles que la droite L_x intersecte D en x . Le schéma formel $\widehat{\Omega}_\sigma$ est l'ouvert obtenu en retirant les points sur \mathbb{F}_q des droites projectives $(L_x)_x$, excepté le point $\{x\} = L_x \cap D$.

Remarque III.2.4. Une autre définition de \widehat{W}_σ consisterait à éclater $\mathbb{P}(\Lambda_1)$ le long de $\mathbb{P}(\Lambda_1/\Lambda_2)$, puis éclater le transformé strict de $\mathbb{P}(\Lambda_1/\Lambda_3)$, puis le transformé strict de $\mathbb{P}(\Lambda_1/\Lambda_4)$ et ainsi de suite, puis de prendre le complété p -adique du schéma obtenu. On peut vérifier que ces deux définitions coïncident (utiliser le fait que les sous-variétés de la fibre spéciale que l'on éclate sont définies par des suites régulières).

Si $\sigma' \subset \sigma$ est un sous-simplexe, il y a alors une immersion ouverte naturelle $\widehat{\Omega}_{\sigma'} \subset \widehat{\Omega}_\sigma$ et le schéma formel de Deligne-Drinfeld $\widehat{\Omega}$ est ainsi obtenu par recollement des $\widehat{\Omega}_\sigma$ en utilisant les relations de faces données par l'immeuble.

III.2.3.2 L'ouvert associé à l'étoile d'un sommet. Fixons maintenant un réseau Λ . Soit $E(\Lambda)$ l'étoile de Λ dans l'immeuble c'est-à-dire

$$E(\Lambda) = \bigcup_{\substack{\sigma \text{ simplexe} \\ [\Lambda] \in \sigma}} \sigma$$

Intéressons-nous à

$$\widehat{\Omega}_{E(\Lambda)} = \bigcup_{[\Lambda] \in \sigma} \widehat{\Omega}_\sigma \subset \widehat{\Omega}$$

Soit $\widehat{W}_{E(\Lambda)}$ le schéma formel suivant. Partons de $\widehat{\mathbb{P}}(\Lambda)$ et considérons la famille de sous-variétés linéaires de sa fibre spéciale

$$\{\mathbb{P}(\Lambda/\Lambda') \mid \pi\Lambda \subsetneq \Lambda' \subsetneq \Lambda\}$$

Définissons $\widehat{W}_{E(\Lambda)}$ comme l'éclaté formel admissible de cette famille de sous-variétés. Plus précisément, si

$$u : \Lambda \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}}(\Lambda)} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}}(\Lambda)}(1)$$

désigne le morphisme universel sur $\widehat{\mathbb{P}}(\Lambda)$, alors $\widehat{W}_{E(\Lambda)}$ est l'éclaté formel admissible du produit des idéaux $u(\Lambda' \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}}(\Lambda)})(-1)$ pour $\pi\Lambda \subsetneq \Lambda' \subsetneq \Lambda$.

Alors

$$\widehat{\Omega}_{E(\Lambda)} \subset \widehat{W}_{E(\Lambda)}$$

est un sous-schéma formel ouvert. Pour tout schéma formel π -adique sans π -torsion \mathfrak{Z} sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_F)$ l'ensemble $\widehat{W}_{E(\Lambda)}(\mathfrak{Z})$ est (fonctoriellement en \mathfrak{Z}) l'ensemble des classes d'isomorphismes

$$[u : \Lambda \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathcal{L}] \in \widehat{\mathbb{P}}(\Lambda)(\mathfrak{Z})$$

telles que $\forall \Lambda', \pi\Lambda \subsetneq \Lambda' \subsetneq \Lambda$, $u(\Lambda' \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})$ soit localement libre de rang 1 (si \mathfrak{Z} a de la π -torsion c'est-à-dire n'est pas plat sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_F)$, alors la description de $\widehat{W}_{E(\Lambda)}(\mathfrak{Z})$ est plus complexe).

Soit maintenant le domaine analytique fermé associé dans l'espace de Berkovich fibre générique

$$\widehat{\Omega}_{E(\Lambda)}^{an} \subset \widehat{W}_{E(\Lambda)}^{an} = \mathbb{P}(\Lambda)^{an} = (\mathbb{P}^{n-1})^{an}$$

Si $\lambda : \Omega \rightarrow |\mathcal{I}|$ désigne l'application vers la réalisation géométrique de l'immeuble \mathcal{I} alors

$$\widehat{\Omega}_{E(\Lambda)}^{an} = \lambda^{-1}(|E(\Lambda)|)$$

Nous aurons besoin du lemme suivant qui dit que sur l'ouvert $\widehat{\Omega}_{E(\Lambda)}$ de $\widehat{W}_{E(\Lambda)}$ il est inutile d'éclater de nouveaux réseaux.

Lemme III.2.5. *Soit \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique sans π -torsion sur $\mathrm{Spf}(O)$. Soit \mathcal{L} un fibré en droites sur \mathfrak{Z} et $u : \Lambda \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathcal{L}$ un morphisme donnant naissance à un morphisme $\mathfrak{Z} \rightarrow \widehat{\Omega}_{E(\Lambda)}$. Alors, pour tout réseau $\Lambda' \subset \Lambda$, $u(\Lambda' \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}) \subset \mathcal{L}$ est localement libre de rang 1.*

Démonstration. Il suffit de le montrer pour $\mathfrak{Z} = \widehat{\Omega}_{\sigma}$, où σ est un simplexe maximal possédant $[\Lambda]$ comme sommet. Soit donc σ un simplexe maximal associé à une chaîne $\Lambda_{n+1} = \pi\Lambda \subsetneq \Lambda_n \subsetneq \dots \subsetneq \Lambda_2 \subsetneq \Lambda_1 = \Lambda$. Soit

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda_{n+1} = \pi\Lambda_1 & \hookrightarrow & \Lambda_n & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \Lambda_i & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \Lambda_1 \\ \downarrow u_1 \pi^{-1} & & \downarrow u_n & & & & \downarrow u_i & & & & \downarrow u_1 \\ \mathcal{L}_1 & \longrightarrow & \mathcal{L}_n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{L}_i & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{L}_1 \\ & & & & & & \searrow & & & & \nearrow \\ & & & & & & & \times \pi & & & \end{array}$$

le diagramme universel sur $\widehat{\Omega}_{\sigma}$. Deux simplexes de l'immeuble sont contenus dans un même appartement. Il existe donc une base (e_1, \dots, e_n) de Λ telle que

$$\forall i \geq 2, \Lambda_i = \langle \pi e_1, \dots, \pi e_{i-1}, e_i, \dots, e_n \rangle$$

et des entiers $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $\Lambda' = \langle \pi^{a_1} e_1, \dots, \pi^{a_n} e_n \rangle$.

Pour tout i , par définition de $\widehat{\Omega}_{\sigma}$,

$$\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\sigma}} \cdot u(e_i) = \mathcal{L}_i$$

Soit donc $\alpha = \inf\{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ et $i_0 = \inf\{i \mid a_i = \alpha\}$. Alors

$$u(\Lambda' \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\sigma}}) = \pi^{\alpha} \mathcal{L}_{i_0} \quad \square$$

III.2.3.3 Recollement des morphismes vers $\widehat{\Omega}$. L'idée de cette sous-section repose sur l'analogie suivante. Soit S un schéma et Y un S -schéma séparé. Soit X un schéma muni d'un ouvert $U \subset X$ schématiquement dense (par exemple U dense et X réduit). Soient deux S -morphisms $X \rightrightarrows Y$ coïncidant sur l'ouvert U . Alors ces deux morphismes sont égaux. L'analogie sera faite avec X , un schéma formel π -adique sans π -torsion, U "l'ouvert $\pi \neq 0$ " et $Y = \widehat{\Omega}$.

Sur l'espace annelé $(\widehat{\Omega}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}}[\frac{1}{\pi}])$ vit un $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}}[\frac{1}{\pi}]$ -module localement libre de rang 1 \mathcal{L} ainsi qu'un morphisme injectif

$$u : F^n \hookrightarrow \mathcal{L}$$

induisant un épimorphisme $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}}[\frac{1}{\pi}]^n \twoheadrightarrow \mathcal{L}$. Cet objet est construit de la façon suivante. Soit σ un simplexe de l'immeuble associé à une chaîne de réseaux $\pi\Lambda_1 \subsetneq$

$\Lambda_r \subsetneq \dots \subsetneq \Lambda_1$. Soit $\widehat{\Omega}_\sigma \subset \widehat{\Omega}$ l'ouvert correspondant. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda_{r+1} = \pi\Lambda_1 & \hookrightarrow & \Lambda_r & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \Lambda_i & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \Lambda_1 \\ \downarrow u_1\pi^{-1} & & \downarrow u_r & & & & \downarrow u_i & & & & \downarrow u_1 \\ \mathcal{L}_1 & \longrightarrow & \mathcal{L}_r & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{L}_i & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{L}_1 \\ & & & & & & \searrow & & & & \nearrow \\ & & & & & & & \times\pi & & & \end{array}$$

sur $\widehat{\Omega}_\sigma$ devient après inversion de π , c'est-à-dire sur l'espace annelé $(\widehat{\Omega}_\sigma, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_\sigma}[\frac{1}{\pi}])$,

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda_{r+1}[\frac{1}{\pi}] = \pi\Lambda_1[\frac{1}{\pi}] & = & \Lambda_r[\frac{1}{\pi}] & = & \dots & = & \Lambda_i[\frac{1}{\pi}] & = & \dots & = & \Lambda_1[\frac{1}{\pi}] & = & F^n \\ \downarrow u_1\pi^{-1} & & \downarrow u_r & & & & \downarrow u_i & & & & \downarrow u_1 & & \\ \mathcal{L}_1[\frac{1}{\pi}] & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{L}_r[\frac{1}{\pi}] & \xrightarrow{\sim} & \dots & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{L}_i[\frac{1}{\pi}] & \xrightarrow{\sim} & \dots & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{L}_1[\frac{1}{\pi}] & & \end{array}$$

et fournit donc l'objet voulu sur $\widehat{\Omega}_\sigma$. On vérifie aussitôt que ces différents objets se recollent sur $\widehat{\Omega}$. En fait, le $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}}[\frac{1}{\pi}]$ -module \mathcal{L} est libre de rang 1 isomorphe à $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}}[\frac{1}{\pi}]$ mais nous ne fixons pas d'isomorphisme entre \mathcal{L} et $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}}[\frac{1}{\pi}]$. Lorsque Λ varie parmi les réseaux dans F^n , les sous- $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}}$ -modules $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}}.u(\Lambda) \subset \mathcal{L}$ forment une chaîne de fibrés en droites

$$(\mathcal{L}_i)_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}_{i+1} \subset \mathcal{L}_i \quad \text{et} \quad \pi\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{i+n}$$

Si \underline{F}^n désigne le faisceau constant alors si

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \eta_i = u^{-1}(\mathcal{L}_i) \subset \underline{F}^n$$

la chaîne de sous-faisceaux $(\eta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ vérifie $\eta_{i+1} \subset \eta_i$ et $\pi\eta_i = \eta_{i+1}$ (ce sont les faisceaux constructibles associés à $\widehat{\Omega}$ par Drinfeld, cf. [6], [4]). Et si σ est un simplexe associé à une chaîne périodique de réseaux $(\Lambda_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, alors

$$\widehat{\Omega}_\sigma = \{x \in \widehat{\Omega} \mid \forall i, \eta_{i,x} \in \{\Lambda_j \mid j \in \mathbb{Z}\}\}$$

Remarque III.2.6. Si \mathfrak{Z} est un schéma formel quasi-séparé π -adique sans π -torsion, $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}]$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{U} \mapsto \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})[\frac{1}{\pi}]$. Ainsi, sur un ouvert quasicompact \mathcal{U} , on a $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}]) = \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})[\frac{1}{\pi}]$, mais cela est faux en général. Par exemple sur $\widehat{\Omega}$, les n sections de \mathcal{L} associées à $F^n \rightarrow \mathcal{L}$ ne sont pas associées à des sections entières provenant d'un fibré en droites sur $\widehat{\Omega}$; lorsque l'on sort de tout ouvert quasicompact de $\widehat{\Omega}$ les puissances de π dans les dénominateurs de ces n sections tendent vers l'infini.

Sur la fibre générique rigide, via le morphisme de topos annelés

$$sp : (\widehat{\Omega}^{\text{rig}}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}^{\text{rig}}}) \longrightarrow (\widehat{\Omega}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}}[\frac{1}{\pi}]),$$

$sp^*[F^n \hookrightarrow \mathcal{L}]$ induit le plongement $\widehat{\Omega}^{\text{rig}} \hookrightarrow (\mathbb{P}^n)^{\text{rig}}$.

Lemme III.2.7. *Soit \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique sans π -torsion sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_F)$. Soient deux morphismes $\mathfrak{Z} \rightrightarrows \widehat{\Omega}$ et $F^n \rightarrow \mathcal{L}$, resp. $F^n \rightarrow \mathcal{L}'$, les objets associés sur $(\mathfrak{Z}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}])$. Ces deux morphismes sont égaux ssi il existe un isomorphisme α faisant commuter le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{L} \\ & \nearrow & \downarrow \alpha \\ F^n & & \simeq \\ & \searrow & \downarrow \alpha \\ & & \mathcal{L}' \end{array}$$

Démonstration. Il résulte des considérations précédentes que le morphisme $F^n \rightarrow \mathcal{L}$ permet de reconstruire les chaînes de faisceaux $(\mathcal{L}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ainsi que $(\eta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Le résultat s'en déduit facilement. \square

III.2.4 Sur le conoyau de l'application de Hodge-Tate

Proposition III.2.8. *Soit l'application de Hodge-Tate tordue*

$$\alpha_{H^\vee}(-1) : \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty} \rightarrow \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}(-1)$$

Alors

$$\forall w \in \Lambda^* \setminus \pi \Lambda^*, \quad \pi^2 \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}(-1) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty} \cdot \alpha_{H^\vee}(w \otimes 1)$$

De même

$$\forall k \geq 3, \quad \pi^2 \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}(-1) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} \cdot \alpha_{H^\vee}[\pi^k](w \otimes 1)$$

Démonstration. Afin de ne pas alourdir les notations, oublions la torsion à la Tate $F(-1)$ dans cette démonstration. Choisissons un générateur $t \in \Gamma(\mathbb{D}, \omega_H)$ de ω_H ,

$$\omega_H = \mathcal{O}_{\mathbb{D}} \cdot t$$

Soit $f \in \Gamma(\mathbb{D}_3, \mathcal{O}_{\mathbb{D}_3})$ tel que

$$\alpha_{H^\vee}(w \otimes 1) \equiv \alpha_{H^\vee}[\pi^3](w \otimes 1) \equiv ft \pmod{\pi^3 \mathcal{O}_{\mathbb{D}_3}}$$

Pour tout point $x \in \mathbb{D}_3^{\mathrm{rig}}(\overline{F})$, $x : \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K) \rightarrow \mathbb{D}_3$, avec $K|\check{F}$ de degré fini,

$$x^* \alpha_{H^\vee}(w \otimes 1) = \alpha_{(x^* H)^\vee}(w \otimes 1) \equiv f(x) \cdot x^* t \pmod{\pi^3 \mathcal{O}_{C_p}}$$

où $x^* H$ est un groupe p -divisible sur \mathcal{O}_K et $\omega_{x^* H} = \mathcal{O}_K \cdot x^* t$. D'après la proposition III.2.1

$$\alpha_{(x^* H)^\vee}(w \otimes 1) \notin \pi^2 \mathcal{O}_{C_p} \cdot x^* t$$

Donc

$$\left| \frac{\pi^2}{f(x)} \right| \leq 1$$

La fonction rigide $\frac{\pi^2}{f} \in \Gamma(\mathbb{D}_3^{\text{rig}}, \mathcal{O}_{\mathbb{D}_3}^{\text{rig}})$ vérifie donc

$$\left\| \frac{\pi^2}{f} \right\|_\infty \leq 1 \implies \frac{\pi^2}{f} \in \Gamma(\mathbb{D}_3, \mathcal{O}_{\mathbb{D}_3})$$

puisque \mathbb{D}_3 est normal (cf. appendice A du premier chapitre). De cela on déduit que

$$\pi^2 t \in \mathcal{O}_{\mathbb{D}_3} \cdot \alpha_{H^\vee}(w \otimes 1) + \pi^3 \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty} \cdot t$$

et donc, \mathbb{D}_∞ étant π -adique,

$$\pi^2 t \in \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty} \cdot \alpha_{H^\vee}(w \otimes 1)$$

De même, pour tout $k \geq 3$,

$$\pi^2 t \in \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} \cdot \alpha_{H^\vee[\pi^k]}(w \otimes 1) + \pi^3 \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} \cdot t$$

et on conclut comme précédemment. \square

III.2.5 Éclatement de la cellule et construction du morphisme de la cellule éclatée vers $\widehat{\Omega}$

On identifie $(F^n)^*$ et F^n via la base duale de la base canonique de F^n . Rappelons que $\Lambda \subset F^n$ et donc Λ^* est un réseau de F^n .

Pour tout réseau Λ' vérifiant $\pi\Lambda \subsetneq \Lambda' \subset \Lambda^*$ et tout entier $k \geq 3$, soit l'idéal cohérent

$$\mathcal{I}_{\Lambda', k} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}$$

tel que $\pi^k \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} \subset \mathcal{I}_{\Lambda', k}$ et

$$\alpha_{H^\vee[\pi^k]}(\Lambda' \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}) = \omega_H \otimes \mathcal{I}_{\Lambda', k} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k}$$

D'après la proposition III.2.8,

$$\pi^2 \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} \subset \mathcal{I}_{\Lambda', k}$$

et si $k \geq 3$ et $\Pi_{k,3} : \mathbb{D}_k \longrightarrow \mathbb{D}_3$, alors

$$\mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} \cdot \Pi_{k,3}^{-1}(\mathcal{I}_{\Lambda', 3}) = \mathcal{I}_{\Lambda', k}$$

Définition III.2.9. Pour tout entier $k \geq 3$, on note $\widetilde{\mathbb{D}}_k$ le normalisé de l'éclatement formel admissible de \mathbb{D}_k relativement aux idéaux $\mathcal{I}_{\Lambda', k}$, où $\pi\Lambda \subsetneq \Lambda' \subset \Lambda^*$.

Il résulte de la propriété énoncée précédemment, $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} \cdot \Pi_{k,3}^{-1}(\mathcal{I}_{\Lambda', 3}) = \mathcal{I}_{\Lambda', k}$, que $\widetilde{\mathbb{D}}_k$ est le normalisé du transformé strict de $\mathbb{D}_k \longrightarrow \mathbb{D}_3$ relativement à l'éclatement $\widetilde{\mathbb{D}}_3 \longrightarrow \mathbb{D}_3$ (cf. section D.7.3 de l'appendice) et donc les morphismes de transition $\widetilde{\mathbb{D}}_l \longrightarrow \widetilde{\mathbb{D}}_k$, pour $l \geq k \geq 3$, sont finis.

Définition III.2.10. On note $\tilde{\mathbb{D}}_\infty = \varprojlim_{k \geq 3} \tilde{\mathbb{D}}_k$, dans la catégorie des schémas formels

π -adiques.

Remarque III.2.11. D'après les résultats de l'appendice, on peut construire $\tilde{\mathbb{D}}_\infty$ directement en niveau infini comme le normalisé dans sa fibre générique de l'éclatement formel admissible des idéaux $\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty} \cdot \Pi_{\infty,3}^{-1} \mathcal{I}_{\Lambda',3}$, cf. corollaire D.7.11 de l'appendice.

Avec les notations de la section III.2.3 et d'après les rappels de cette même section, l'application de Hodge-Tate tordue

$$\alpha_{H^\vee}(-1) : \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty} \longrightarrow \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty}(-1)$$

induit un morphisme

$$\tilde{\mathbb{D}}_\infty \longrightarrow \widehat{W}_{E(\Lambda^*)} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{\check{F}}$$

Notons désormais $\widehat{W}_{E(\Lambda^*)}$ pour $\widehat{W}_{E(\Lambda^*)} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{\check{F}}$ et $\widehat{\Omega}$ pour $\widehat{\Omega} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\check{F}}}$.

Proposition III.2.12. *Le morphisme $\tilde{\mathbb{D}}_\infty \longrightarrow \widehat{W}_{E(\Lambda^*)}$ se factorise par l'ouvert $\widehat{\Omega}_{E(\Lambda^*)} \subset \widehat{W}_{E(\Lambda^*)}$ et définit donc un morphisme $\tilde{\mathbb{D}}_\infty \longrightarrow \widehat{\Omega}$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier qu'au niveau des fibres spéciales le morphisme

$$\tilde{\mathbb{D}}_\infty \otimes \overline{\mathbb{F}}_q \longrightarrow \widehat{W}_{E(\Lambda^*)} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$$

se factorise via l'ouvert $\widehat{\Omega}_{E(\Lambda^*)} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$.

Le schéma $\widehat{W}_{E(\Lambda^*)} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$ étant de présentation finie sur $\text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ et $\tilde{\mathbb{D}}_\infty = \varprojlim_k \tilde{\mathbb{D}}_k \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$, $\exists k \geq 3$ et une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{D}}_\infty \otimes \overline{\mathbb{F}}_q & \longrightarrow & \widehat{W}_{E(\Lambda^*)} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q \\ \downarrow & \nearrow & \\ \tilde{\mathbb{D}}_k \otimes \overline{\mathbb{F}}_q & & \end{array}$$

Il suffit alors de montrer que l'image du morphisme $\tilde{\mathbb{D}}_k \otimes \overline{\mathbb{F}}_q \longrightarrow \widehat{W}_{E(\Lambda^*)} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$ est contenue dans l'ouvert $\widehat{\Omega}_{E(\Lambda^*)} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$.

Soit $|\tilde{\mathbb{D}}_k^{an}| = |\mathbb{D}_k^{an}|$ l'espace analytique de Berkovich fibre générique de $\tilde{\mathbb{D}}_k$. D'après la proposition 2.4.4. page 36 de [1], et puisque $\tilde{\mathbb{D}}_k$ est normal, le morphisme de spécialisation

$$sp : |\tilde{\mathbb{D}}_k^{an}| \longrightarrow |\tilde{\mathbb{D}}_k \otimes \overline{\mathbb{F}}_q|$$

est surjectif. Soit donc $x \in |\tilde{\mathbb{D}}_k \otimes \overline{\mathbb{F}}_q|$ et $y \in |\tilde{\mathbb{D}}_k^{an}|$ tel que $sp(y) = x$. Soit $K|\check{F}$ une extension valuée complète telle que y provienne du point $z \in \tilde{\mathbb{D}}_k^{an}(K) = \tilde{\mathbb{D}}_k(\mathcal{O}_K)$,

$z : \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K) \rightarrow \widetilde{\mathbb{D}}_k$. On peut de plus supposer que $K = \widehat{K}$. Dès lors, $\exists z' \in \widetilde{\mathbb{D}}_\infty(K)$ tel que $z' \mapsto z$, via $\widetilde{\mathbb{D}}_\infty \rightarrow \widetilde{\mathbb{D}}_k$. D'après la proposition III.2.2, l'image de z' dans $\widehat{W}_{E(\Lambda^*)}(\mathcal{O}_K)$ est contenue dans $\widehat{\Omega}_{E(\Lambda^*)}(\mathcal{O}_K) = \widehat{\Omega}_{E(\Lambda^*)}^{an}(K) \subset \widehat{W}_{E(\Lambda^*)}^{an}(K) = \mathbb{P}^n(K)$. Il en est donc de même de l'image de z . Le morphisme de spécialisation s'inscrit dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} |\widetilde{\mathbb{D}}_k^{an}| & \longrightarrow & |\widehat{W}_{E(\Lambda^*)}^{an}| \\ \downarrow sp & & \downarrow sp \\ |\widetilde{\mathbb{D}}_k \otimes \overline{\mathbb{F}}_q| & \longrightarrow & |\widehat{W}_{E(\Lambda^*)} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q| \end{array}$$

on en déduit que l'image de x dans $\widehat{W}_{E(\Lambda^*)} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$ est dans l'ouvert $\widehat{\Omega}_{E(\Lambda^*)} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$. \square

III.2.6 Recollement des morphismes sur les cellules

III.2.6.1 Recollement des cellules éclatées. Soit $a = [\Lambda, M]$ un sommet de l'immeuble et $\forall k \geq 3$, $\widetilde{\mathbb{D}}_{a,k}$ la cellule éclatée définie dans les sections précédentes en niveau $Id + \pi^k \mathrm{End}(\Lambda) \subset \mathrm{GL}(\Lambda)$. Soit $a \rightarrow a'$ une arête de l'immeuble (cf. I.5), où $a' = [\Lambda', M']$, avec

$$\Lambda \subsetneq \Lambda' \subsetneq \pi^{-1}\Lambda \quad \text{et} \quad M' = \Pi^{-[\Lambda:\Lambda']}M$$

On a défini en I.8.1.3 un ouvert Zariski $\mathbb{D}_{a \rightarrow a',k} \subset \mathbb{D}_{a,k}$. On note $\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a',k}$ son image réciproque à $\widetilde{\mathbb{D}}_{a,k}$.

Rappelons que H est le groupe p -divisible universel sur \mathbb{D}_a . Sur $\mathbb{D}_{a \rightarrow a'}$, il y a un sous-groupe plat fini $C \subset H[\pi] \times_{\mathbb{D}_a} \mathbb{D}_{a \rightarrow a',k}$ tel que η induise un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-k}\Lambda/\Lambda & \xrightarrow{\eta} & H[\pi^k] \times_{\mathbb{D}_a} \mathbb{D}_{a \rightarrow a',k} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Lambda'/\Lambda & \longrightarrow & C \end{array}$$

et η induise une rigidification en fibre générique $\eta^{\mathrm{rig}} : \underline{\Lambda}/\underline{\Lambda} \xrightarrow{\sim} C^{\mathrm{rig}}$. Le groupe C est un sous-groupe canonique "généralisé". Si $H' = H/C$, alors H' , couplé à la déformation universelle sur $\mathbb{D}_{a \rightarrow a',k}$, et η fournissent un morphisme

$$\mathbb{D}_{a \rightarrow a',k} \longrightarrow \mathbb{D}_{a' \rightarrow a,k-1}$$

Proposition III.2.13. *Supposons $k \geq 4$. Alors l'application de recollement s'étend à la cellule éclatée. Plus précisément, il y a alors un morphisme α faisant commuter*

le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k} & \xrightarrow{\alpha} & \widetilde{\mathbb{D}}_{a' \rightarrow a, k-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}_{a \rightarrow a', k} & \longrightarrow & \mathbb{D}_{a' \rightarrow a, k-1} \end{array}$$

et induisant le morphisme de recollement des sections I.6.6 et I.6.7 en fibre générique.

Démonstration. Il s'agit de voir que par l'application de Hodge-Tate associée à $H'[\pi^{k-1}]$ sur $\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}$ l'image des réseaux Λ'' vérifiant $\pi\Lambda'^* \subsetneq \Lambda'' \subset \Lambda'^*$ est localement libre de rang 1. Pour cela on va utiliser le lemme III.2.5. Dans cette démonstration, on oublie une fois de plus les torsions à la Tate afin de ne pas alourdir les notations.

Pour G un groupe plat fini muni d'une action stricte de \mathcal{O} , le morphisme

$$\alpha_{G^\vee} : G^\vee \longrightarrow \omega_G$$

est fonctoriel en G . Le morphisme $H[\pi^{k-1}] \longrightarrow H'[\pi^{k-1}]$ sur $\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}$ induit donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda'^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}} / \pi^{k-1} \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}} & \xrightarrow{\alpha_{H'^\vee[\pi^{k-1}]}} & \omega_{H'} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}} / \pi^{k-1} \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}} / \pi^{k-1} \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}} & \xrightarrow{\alpha_{H^\vee[\pi^{k-1}]}} & \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}} / \pi^{k-1} \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}} \end{array}$$

ou la flèche verticale de gauche est induite par l'inclusion $\Lambda'^* \subset \Lambda^*$. Fixons des relèvements β , resp. β' , de $\alpha_{H^\vee[\pi^{k-1}]}$, resp. $\alpha_{H'^\vee[\pi^{k-1}]}$, fournissant un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda'^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}} & \xrightarrow{\beta'} & \omega_{H'} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}} & \xrightarrow{\beta} & \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}} \end{array}$$

qui commute modulo π^{k-1} .  tant donné que $k \geq 4$, pour tout réseau Λ_0 vérifiant $\pi\Lambda^* \subsetneq \Lambda_0 \subsetneq \Lambda^*$, puisque $\pi^2 \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a, k}} \subset \mathcal{I}_{\Lambda_0, k}$ et d'après les propriétés de compatibilité du système des idéaux $\mathcal{I}_{\Lambda_0, k}$ lorsque k varie, on a

$$\beta(\Lambda_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}}) = \omega_H \otimes (\mathcal{I}_{\Lambda_0, k})|_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}}$$

Le morphisme $\beta \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}}} \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}}$ définit donc un morphisme

$$\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k} \longrightarrow \widehat{W}_{E(\Lambda^*)}$$

Ce morphisme est congru modulo π au morphisme défini précédemment en niveau infini $\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', \infty} \longrightarrow \widehat{\Omega}_{E(\Lambda^*)}$. Il se factorise donc en un morphisme

$$\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k} \longrightarrow \widehat{\Omega}_{E(\Lambda^*)}$$

Il résulte alors du lemme III.2.5 que $\forall \Lambda''$ vérifiant $\pi \Lambda'^* \subsetneq \Lambda'' \subset \Lambda'^*$, on a

$$\beta(\Lambda'' \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}}) = \omega_H \otimes \mathcal{J}$$

où \mathcal{J} est un idéal localement libre de rang 1 dans $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}}$. Fixons un tel Λ'' .

De la même façon que précédemment pour β , β' vérifie

$$\beta'(\Lambda'' \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}}) = \omega_{H'} \otimes \mathcal{J}'$$

où \mathcal{J}' est un idéal vérifiant $\pi^2 \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}} \subset \mathcal{J}'$ (utiliser la proposition III.2.8 appliquée à $\mathbb{D}_{a', k-1}$ et l'application de Hodge-Tate de $H'^\vee[\pi^{k-1}]$, puis restreinte à $\mathbb{D}_{a' \rightarrow a, k-1}$ et enfin tirée en arrière via l'application $\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k} \longrightarrow \mathbb{D}_{a' \rightarrow a, k-1}$).

La congruence de β et β' modulo π^{k-1} implique que, dans $\omega_H \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}}$ on a

$$\omega_{H'} \otimes \mathcal{J}' + \pi^{k-1} \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}} = \omega_H \otimes \mathcal{J} + \pi^{k-1} \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}}$$

Mais étant donné que $(\pi^2) \subset \mathcal{I}$, $(\pi^2) \subset \mathcal{I}'$, que $\pi \omega_H \subset \omega_{H'}$ (car C est inclus dans les points de π -torsion de H) et que $k \geq 4$, on en déduit

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}'$$

De tout cela on déduit que l'application

$$\begin{aligned} \alpha_{H'^\vee[\pi^{k-1}]} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}} : \Lambda'^* \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}} / \pi^{k-1} \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}} \\ \longrightarrow \omega_{H'} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}} / \pi^{k-1} \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}} \end{aligned}$$

vérifie que $\forall \Lambda''$ tel que $\pi \Lambda'^* \subsetneq \Lambda'' \subset \Lambda'^*$,

$$\alpha_{H'^\vee[\pi^{k-1}]}(\Lambda'' \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}} / \pi^{k-1} \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}}) = \omega_H \otimes \mathcal{K} / \pi^{k-1} \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}}$$

où \mathcal{K} est un idéal localement libre de rang 1 contenant $\pi^2 \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}}$. D'où l'existence de la factorisation annoncée. \square

De plus, $\forall k \geq 5$, les applications de recollement composées

$$\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{D}}_{a' \rightarrow a, k-1} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k-2}$$

sont les morphismes de changement de niveau. Elles induisent donc des isomorphismes en niveau infini

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', \infty} & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{\mathbb{D}}_{a' \rightarrow a, \infty} & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', \infty} \\ & & \text{Id} & & \end{array}$$

On vérifie aisément que l'action de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ est naturellement compatible aux éclatements: $\forall (g, d) \in \mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ et tout entier $k \geq 3$, l'isomorphisme naturel

$$(g, d) : \mathbb{D}_{a, Id+\pi^k \mathrm{End}(\Lambda)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{(g,d).a, Id+\pi^k \mathrm{End}(g^{-1}\Lambda)}$$

s'étend en un isomorphisme

$$(g, d) : \tilde{\mathbb{D}}_{a, Id+\pi^k \mathrm{End}(\Lambda)} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathbb{D}}_{(g,d).a, Id+\pi^k \mathrm{End}(g^{-1}\Lambda)}$$

et induit donc un isomorphisme en niveau infini en passant à la limite projective.

Définition III.2.14. On note $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty$ le schéma formel $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariant défini par le diagramme de recollement

$$\coprod_{a \rightarrow a'} \tilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', \infty} \rightrightarrows \coprod_a \tilde{\mathbb{D}}_{a, \infty} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{X}}_\infty$$

où $\forall a \rightarrow a'$, les applications de recollement sont $\tilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', \infty} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{D}}_{a, \infty}$, l'inclusion naturelle et $\tilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', \infty} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathbb{D}}_{a' \rightarrow a, \infty} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{D}}_{a', \infty}$, l'application de recollement précédente composée avec l'inclusion naturelle.

III.2.6.2 Recollement des morphismes vers $\hat{\Omega}$

Proposition III.2.15. Les morphismes construits précédemment $\tilde{\mathbb{D}}_{a, \infty} \longrightarrow \hat{\Omega}$ pour des sommets a de l'immeuble se recollent en un morphisme

$$\tilde{\mathfrak{X}}_\infty \longrightarrow \hat{\Omega}$$

L'action à droite de $\mathrm{GL}_n(F)$ sur $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty$ et celle à gauche sur $\hat{\Omega}$ se correspondent via $g \mapsto {}^t g$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que pour toute arête $a \rightarrow a'$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\mathbb{D}}_{a, \infty} & \\ \nearrow & & \searrow \\ \tilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', \infty} & & \hat{\Omega} \\ \searrow & & \nearrow \\ & \tilde{\mathbb{D}}_{a', \infty} & \end{array}$$

Cela découle de la functorialité de l'application de Hodge-Tate rappelée précédemment appliquée à l'isogénie "quotient par un sous-groupe canonique" sur le bord des cellules. Plus précisément, avec les notations de la démonstration précédente

il y a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda'^* \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', \infty}} & \xrightarrow{\alpha_{H'^\vee}} & \omega_{H'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', \infty}} & \xrightarrow{\alpha_{H^\vee}} & \omega_H \end{array}$$

où H' est le quotient de $H \times_{\mathbb{D}_a} \times \tilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', \infty}$ par le sous-groupe canonique défini par $\eta(\Lambda'/\Lambda)$. La proposition est donc une conséquence du lemme III.2.7 \square

Remarque III.2.16. Le morphisme construit est invariant par l'action de D^\times , puisque construit à partir de l'application de Hodge-Tate du groupe de Lubin-Tate universel qui ne dépend pas de la rigidification modulo p (la déformation notée ρ).

III.3 Construction du morphisme $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty \longrightarrow \mathcal{Y}_\infty$

Le but de ce chapitre est de relever le morphisme $\mathrm{GL}_n(F)$ -équivariant défini précédemment $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty \longrightarrow \hat{\Omega}$ en un morphisme $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariant $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty \longrightarrow \mathcal{Y}_\infty$.

III.3.1 Étude des normalisés de $\hat{\Omega}$ dans la tour de Drinfeld

Soit G le \mathcal{O}_D -module formel spécial universel sur $\hat{\Omega}$. On note pour tout sous-groupe ouvert $K \subset \mathcal{O}_D^\times$

$$\Omega_K \longrightarrow \hat{\Omega}^{\mathrm{rig}}$$

le revêtement étale fini classifiant les structures de niveau K sur

$$G^{\mathrm{rig}} = \varinjlim_{k \geq 1} G[\pi^k]^{\mathrm{rig}}.$$

On note $\hat{\Omega}_K$ le normalisé de $\hat{\Omega}$ dans Ω_K . Rappelons que $\hat{\Omega}_K \subset \mathcal{Y}_K$ est la composante où la quasi-isogénie universelle est de hauteur nulle. Rappelons également les deux faits suivants:

- Soit \mathfrak{Z} un schéma formel localement de type fini sans π -torsion sur $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$. Supposons \mathfrak{Z} normal. Alors, l'application, qui à un ouvert \mathcal{U} de \mathfrak{Z} associe l'ouvert admissible $\mathcal{U}^{\mathrm{rig}}$ de $\mathfrak{Z}^{\mathrm{rig}}$, induit une bijection entre les parties ouvertes/fermées de \mathfrak{Z} et celles de $\mathfrak{Z}^{\mathrm{rig}}$.
- Soit $X \xrightarrow{\varphi} Y$ un morphisme étale fini d'espaces rigides et $Y \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_2} \end{array} X$ deux sections de φ . Alors l'espace rigide $\{s_1 \neq s_2\}$ est un ouvert/fermé de Y .

Lemme III.3.1. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha \in G[\Pi^m]^{\text{rig}}(G[\Pi^m]^{\text{rig}})$ la section identité et e la section neutre. Soit U l'ouvert/fermé de $G[\Pi^m]^{\text{rig}}$, où $\Pi^{m-1}(\alpha) \neq e$ c'est-à-dire $U = (\Pi^{m-1})^{-1}(G[\Pi]^{\text{rig}} \setminus \{e\})$ avec $\Pi^{m-1} : G[\Pi^m]^{\text{rig}} \rightarrow G[\Pi]^{\text{rig}}$. Alors $\Omega_{1+\Pi^m\mathcal{O}_D} = U$.*

Démonstration. L'espace $\Omega_{1+\Pi^m\mathcal{O}_D}$ est le foncteur au-dessus de Ω défini par

$$\forall Y \rightarrow \Omega, \quad \Omega_{1+\Pi^m\mathcal{O}_D}(Y) = \{\eta : \underline{\Pi^{-m}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D} \xrightarrow{\sim} G[\Pi^m]^{\text{rig}} \times_{\Omega} Y\}$$

où η est \mathcal{O}_D -linéaire et $\underline{\Pi^{-m}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D}$ désigne le groupe étale constant. Se donner un morphisme η \mathcal{O}_D -équivant comme ci-dessus sur Y est équivalent à se donner la section $\eta(1) \in G[\Pi^m]^{\text{rig}}(Y)$. La condition que η soit un isomorphisme est équivalente à ce que pour toute composante connexe W de Y , $\Pi^{m-1}(\eta(1))|_W \neq 0$. Cela est encore équivalent à ce que le morphisme $Y \rightarrow G[\Pi^m]^{\text{rig}}$ se factorise par l'ouvert/fermé U . \square

Corollaire III.3.2. *Soit $\widetilde{G}[\Pi^m]$ le normalisé de $G[\Pi^m]$ dans $G[\Pi^m]^{\text{rig}}$ (un $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel localement de type fini). Alors $\widehat{\Omega}_{1+\Pi^m\mathcal{O}_D}$ est l'ouvert/fermé de $\widetilde{G}[\Pi^m]$ induisant l'ouvert/fermé U du lemme précédent en fibre générique.*

Corollaire III.3.3. *Soit $V = \text{Spf}(A) \subset \widehat{\Omega}$ un ouvert affine et*

$$G[\Pi^m]|_V = \text{Spf}(B_m) \rightarrow \text{Spf}(A).$$

Soit $W \subset \text{Spec}(B_m[\frac{1}{\pi}])$ l'ouvert/fermé $\{\Pi^{m-1} \neq e\}$ et \widetilde{B}_m le normalisé de B_m . Alors si $\text{Spec}(A_m)$ est l'adhérence schématique de W dans $\text{Spec}(\widetilde{B}_m)$ le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{array}{ccc} \text{Spf}(A_m) & \hookrightarrow & \widehat{\Omega}_{1+\Pi^m\mathcal{O}_D} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spf}(A) & \hookrightarrow & \widehat{\Omega} \end{array}$$

Exemple III.3.4. Pour illustrer les constructions précédentes considérons l'espace de module obtenu en mettant des points de torsion sur μ_{p^∞} sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ (ce qui correspond au cas $n = 1$ et $F = \mathbb{Q}_p$). On a $\mu_{p^n} = \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[T]/(T^{p^n} - 1))$. De plus, $\mathbb{Z}_p[T]/(T^{p^n} - 1) = \mathbb{Z}_p[T]/(\prod_{i=0}^{n-1} \Phi_{p^i}(T))$, où Φ_k désigne le k -ième polynôme cyclotomique. Alors le normalisé de μ_{p^n} s'écrit

$$\widehat{\mu_{p^n}} = \prod_{i=0}^{n-1} \text{Spec} \left(\underbrace{\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^i}]}_{\mathbb{Z}_p[T]/(\Phi_{p^i})} \right)$$

L'ouvert $T^{p^{n-1}} \neq 1$ est $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^n}])$, car $\mathbb{Z}_p[T]/(\Phi_{p^i}) \left[\frac{1}{T^{p^{n-1}} - 1} \right] = 0$ si $i < n$, puisqu'alors $\Phi_{p^i} | T^{p^{n-1}} - 1$.

Proposition III.3.5. *Soit \mathfrak{Z} un $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel π -adique sans π -torsion tel que $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ soit intégralement fermé dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}]$ (cela ne signifie rien d'autre que pour tout ouvert affine \mathcal{U} de \mathfrak{Z} , l'anneau $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})$ est intégralement clos dans $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})[\frac{1}{\pi}]$, cf. section D.5 de l'appendice). Se donner un morphisme*

$$\mathfrak{Z} \longrightarrow \widehat{\Omega}_{1+\Pi^m \mathcal{O}_D}$$

est équivalent à se donner un triplet (G', ρ', s) à isomorphisme-près, où

- $(G', \rho') \in \widehat{\Omega}(\mathfrak{Z})$
- $s \in G'[\Pi^m](\mathfrak{Z})$ est une section telle qu'il existe un recouvrement affine $(\mathrm{Spf}(A_i))_i$ de \mathfrak{Z} , tel que si G'_i désigne le groupe p -divisible sur $\mathrm{Spec}(A_i)$ associé au groupe p -divisible $G' \times_{\mathfrak{Z}} \mathrm{Spf}(A_i)$, alors sur $\mathrm{Spec}(A_i[\frac{1}{\pi}])$ la section s induit un isomorphisme

$$\underline{\Pi^{-m} \mathcal{O}_D / \mathcal{O}_D} \xrightarrow{\sim} G'_i[\Pi^m] \times_{\mathrm{Spec}(A_i)} \mathrm{Spec}(A_i[\frac{1}{\pi}])$$

Démonstration. Rappelons que G désigne le \mathcal{O}_D -module formel universel sur $\widehat{\Omega}$. Le triplet (G', ρ') fournit un morphisme

$$\varphi_1 : \mathfrak{Z} \longrightarrow \widehat{\Omega}$$

par lequel l'image réciproque de G est isomorphe à G' . La section s relève ce morphisme en un morphisme φ_2

$$\begin{array}{ccc} & G[\Pi^m] & \\ \varphi_2 \nearrow & \downarrow & \\ \mathfrak{Z} & \xrightarrow{\varphi_1} & \widehat{\Omega} \end{array}$$

Celui-ci s'étend de façon unique en un morphisme φ_3

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{G[\Pi^m]} & \\ \varphi_3 \nearrow & \downarrow & \\ \mathfrak{Z} & \xrightarrow{\varphi_2} & G[\Pi^m] \end{array}$$

En effet, $\widetilde{G[\Pi^m]} = \mathrm{Spf}(\mathcal{A})$, où \mathcal{A} est une $\mathcal{O}_{G[\Pi^m]}$ -algèbre cohérente vérifiant $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_{G[\Pi^m]}[\frac{1}{\pi}]$ et toute section de \mathcal{A} sur un ouvert quasicompact est entière sur $\mathcal{O}_{G[\Pi^m]}$. Il y a donc d'après l'hypothèse faite sur \mathfrak{Z} une unique factorisation

$$\begin{array}{ccc} \varphi_2^{-1} \mathcal{O}_{G[\Pi^m]} & \xrightarrow{\varphi_2^*} & \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \varphi_2^{-1} \mathcal{A} & & \end{array}$$

qui fournit le morphisme cherché $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathrm{Spf}(\mathcal{A})$.

On vérifie alors localement sur \mathfrak{Z} que ce morphisme se factorise à travers l'ouvert/fermé de $\widehat{G[\Pi^m]}$ égal à $\widehat{\Omega}_{1+\Pi^m \mathcal{O}_D}$. \square

III.3.2 Définition modulaire de \mathcal{Y}_∞

Lemme III.3.6 (Pureté du π_0). *Soit R une $\check{\mathcal{O}}$ -algèbre π -adique sans π -torsion telle que R soit intégralement fermé dans $R[\frac{1}{\pi}]$. Alors*

$$\mathrm{Spec}(R/\pi R) \text{ connexe} \iff \mathrm{Spec}(R) \text{ connexe} \iff \mathrm{Spec}(R[\frac{1}{\pi}]) \text{ connexe}$$

Rappelons également que pour \mathfrak{Z} un $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel localement de type fini sans π -torsion et normal, on a \mathfrak{Z} connexe $\iff \mathfrak{Z}^{\mathrm{rig}}$ l'est.

Proposition III.3.7. *Soit \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique sans π -torsion sur $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ tel que $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ soit intégralement fermé dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}]$. Supposons que pour tout ouvert quasicompact \mathcal{U} de \mathfrak{Z} , $\pi_0(\mathcal{U})$ est fini, c'est-à-dire les composantes connexes de \mathcal{U} sont ouvertes. Il y a alors une bijection D^\times -équivariante entre l'ensemble des morphismes $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathcal{Y}_\infty$ et les triplets (G', ρ', η) , à isomorphisme-près, où $(G', \rho') \in \widehat{\Omega}(\mathfrak{Z})$ et $\eta \in \Gamma(\mathfrak{Z}, \underline{\mathrm{Hom}}(F/\mathcal{O}_F, G')[\frac{1}{\pi}])$ est tel que pour tout ouvert \mathcal{U} de \mathfrak{Z} , $\eta|_{\mathcal{U}} \neq 0$. Dans cette bijection, l'action de D^\times sur les triplets se fait via $\forall d \in D^\times$, $d.(G', \rho', \eta) = (G', \rho', d^{-1} \circ \eta)$, où $d^{-1} \in \mathrm{Hom}(G', G')[\frac{1}{\pi}]$.*

Démonstration. Construisons un morphisme $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathcal{Y}_\infty$ à partir d'un triplet (G', ρ', η) . Soit $\mathrm{Spf}(R) \subset \mathfrak{Z}$ un ouvert affine connexe. Notons G'' le groupe p -divisible sur $\mathrm{Spec}(R)$ associé au groupe p -divisible $G' \times_{\mathfrak{Z}} \mathrm{Spf}(R)$ sur $\mathrm{Spf}(R)$. L'élément η induit un élément

$$\begin{aligned} \alpha &\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(D/\mathcal{O}_D, G'')[\frac{1}{\pi}] \setminus \{0\} \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(D/\mathcal{O}_D, G'' \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(R[\frac{1}{\pi}]))[\frac{1}{\pi}] \setminus \{0\} \end{aligned}$$

l'égalité résultant de ce que R est intégralement fermé dans $R[\frac{1}{\pi}]$. Le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(D/\mathcal{O}_D, G'' \otimes_R R[\frac{1}{\pi}])[\frac{1}{\pi}]$ est muni d'une structure de D -module via l'action de D à droite sur D/\mathcal{O}_D . On pose $(d.f)(\bullet) = f(\bullet d)$. D'après le lemme III.3.6, $\mathrm{Spec}(R[\frac{1}{\pi}])$ est connexe et donc ce D -module est de rang 1.

Soit $N \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\Pi^N . \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(D/\mathcal{O}_D, G'') \setminus \Pi . \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(D/\mathcal{O}_D, G'')$$

Toujours parce que $\mathrm{Spec}(R[\frac{1}{\pi}])$ est connexe, $\Pi^N . \alpha$ induit un isomorphisme

$$\Pi^N . \alpha : D/\mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} G \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(R[\frac{1}{\pi}])$$

Donc, d'après la proposition III.3.5 le système compatible

$$((\Pi^N . \alpha)(\bar{\Pi}^{-m}))_{m \geq 1} \in (G[\Pi^m](R))_{m \geq 1}$$

induit un système compatible de morphismes

$$\begin{array}{ccc}
 & & \vdots \\
 & & \downarrow \\
 & \nearrow & \mathcal{Y}_{1+\Pi^{m+1}\mathcal{O}_D} \\
 \text{Spf}(R) & \longrightarrow & \mathcal{Y}_{1+\Pi^m\mathcal{O}_D} \\
 & & \downarrow \\
 & & \vdots
 \end{array}$$

D'où, puisque $\mathcal{Y}_\infty = \varprojlim^m \mathcal{Y}_{1+\Pi^m\mathcal{O}_D}$ dans la catégorie des schémas formels π -adiques, un morphisme $\varphi : \text{Spf}(R) \longrightarrow \mathcal{Y}_\infty$. On associe alors à (G', ρ', x) le morphisme composé

$$\text{Spf}(R) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Y}_\infty \xrightarrow{\Pi^{-N}} \mathcal{Y}_\infty$$

Soient maintenant $\text{Spf}(R')$ et $\text{Spf}(R'') \neq \emptyset$ deux autres ouverts affines connexes tels que $\text{Spf}(R'') \subset \text{Spf}(R) \cap \text{Spf}(R')$. Il y a un diagramme de morphismes

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{Spec}(R) \\
 & \nearrow & \\
 \text{Spec}(R'') & & \\
 & \searrow & \\
 & & \text{Spec}(R')
 \end{array}$$

Le groupe p -divisible sur $\text{Spec}(R')$ associé au groupe p -divisible $G' \times_{\mathfrak{z}} \text{Spf}(R'')$ est égal à $G'' \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(R'')$. On en déduit que l'entier $N \in \mathbb{Z}$ associé précédemment à R est le même pour R, R' et R'' . On conclut aisément que les différents morphismes sur les ouverts affines connexes se recollent en un morphisme

$$\mathfrak{z} \longrightarrow \mathcal{Y}_\infty$$

Le fait que cela donne une bijection entre $\mathcal{Y}_\infty(\mathfrak{z})$ est les classes d'isomorphismes de triplets (G', ρ', η) est laissé au lecteur. \square

III.3.3 Sur la suite de Hodge-Tate en niveau infini

Reprenons les notations de la section III.2. Soit $a = [\Lambda, M]$ un sommet de l'immeuble paramétrant les cellules de $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty$. Soit $\mathbb{D}_{a,\infty} = \varprojlim_k \mathbb{D}_{a,k}$ la cellule associée en niveau infini où $\mathbb{D}_{a,k} := \mathbb{D}_{a, Id + \pi^k \text{End}(\Lambda)}$. Dans la section III.2, on a défini une application de Hodge-Tate

$$\alpha_{H^\vee} : \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}}(1) \longrightarrow \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}}$$

On définit de même

$$\alpha_H : \Lambda \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}} \longrightarrow \omega_{H^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}}$$

(le module ω_{H^\vee} est celui noté $\tilde{\omega}_{H^D}$ dans l'appendice B du premier chapitre).

Proposition III.3.8. *Dans la suite de Hodge-Tate*

$$\omega_{H^\vee}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}}(1) \xrightarrow{t\alpha_H(1)} \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}}(1) \xrightarrow{\alpha_{H^\vee}} \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}}$$

on a $\alpha_{H^\vee} \circ t\alpha_H(1) = 0$.

Démonstration. On utilisera le résultat suivant (cf. chapitre II). Si H_0 est un \mathcal{O} -module π -divisible sur \mathcal{O}_K , où $K|\check{F}$ est une extension de degré fini, alors dans la suite de Hodge-Tate usuelle

$$\omega_{H_0}^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}(1) \xrightarrow{t\alpha_{H_0^\vee}(1)} T_p(H_0) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\alpha_{H_0}} \omega_{H_0^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

on a $\alpha_{H_0} \circ t\alpha_{H_0^\vee}(1) = 0$.

Revenons à l'énoncé. Il suffit de montrer que

$$\forall k \geq 1, \quad \alpha_{H^\vee} \circ t\alpha_H(1) \equiv 0 \pmod{\pi^k}$$

Mais $\forall k \geq 1$, la suite de Hodge-Tate modulo π^k provient du niveau fini $\mathbb{D}_{a,k}$ pour le groupe plat fini $H^\vee[\pi^k]$

$$\begin{aligned} & \left[\omega_{H^\vee}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}}(1) \xrightarrow{t\alpha_H(1)} \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}}(1) \xrightarrow{\alpha_{H^\vee}} \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}} \right] \pmod{\pi^k} \\ = & \left[\omega_{H^\vee}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,k}}/\pi^k(1) \xrightarrow{t\alpha_{H[\pi^k]}(1)} \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,k}}/\pi^k(1) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \downarrow \alpha_{H^\vee[\pi^k]} \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,k}}/\pi^k \right] \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}}/\pi^k \end{aligned}$$

où, pour abrégier, on a noté $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}}/\pi^k := \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}}/\pi^k \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}}$. De plus, d'après le rappel précédent, $\forall x \in \mathbb{D}_{a,k}^{\text{rig}}(\overline{\check{F}})$, $x : \text{Spf}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathbb{D}_k$, où $K|\check{F}$ est de degré fini, $x^* t\alpha_{H[\pi^k]}(1)$ et $x^* \alpha_{H^\vee[\pi^k]}$ sont congrus modulo π^k , après extension des scalaires de \mathcal{O}_K à $\mathcal{O}_{\widehat{K}}$, à $t\alpha_{x^*H}(1)$ et $\alpha_{x^*H^\vee}$, où x^*H est un \mathcal{O} -module π -divisible sur \mathcal{O}_K . Donc, d'après le rappel du début de la démonstration,

$$x^*(\alpha_{H^\vee[\pi^k]} \circ t\alpha_{H[\pi^k]}(1)) = 0$$

Soit t un générateur de ω_H , $\omega_H = \mathcal{O}_{\mathbb{D}_a}.t$. Cela étant vrai pour tout x , on en déduit que pour $v \in \omega_{H^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,k}}(1)$, si $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,k}}$ est tel que $(\alpha_{H^\vee[\pi^k]} \circ t\alpha_{H[\pi^k]}(1))(v) \equiv f.t$, alors

$$\forall x \in \mathbb{D}_k^{\text{rig}}(\overline{\check{F}}) \quad \left\| \frac{f}{\pi^k} \right\|_\infty \leq 1$$

et que donc, \mathbb{D}_k étant normal, on a

$$f \in \pi^k \mathcal{O}_{\mathbb{D}_k} \quad \square$$

III.3.4 Construction d'éléments dans le module de Tate du \mathcal{O}_D -module formel spécial tiré en arrière sur $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty$

On a construit dans le chapitre précédent un morphisme $\mathrm{GL}_n(F)$ -équivariant

$$\tilde{\mathfrak{X}}_\infty \longrightarrow \widehat{\Omega}$$

à partir de l'application de Hodge-Tate de H^\vee , où H est un groupe p -divisible universel sur une cellule de $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty$.

Soit G le \mathcal{O}_D -module formel spécial universel sur $\widehat{\Omega}$ muni de sa rigidification, une quasi-isogénie de hauteur 0

$$\rho_G : \mathbb{G} \times_{\overline{\mathbb{F}}_q} (\widehat{\Omega} \bmod \pi) \longrightarrow G \times_{\widehat{\Omega}} (\widehat{\Omega} \bmod \pi)$$

Soit $a = [\Lambda, M]$ un sommet de l'immeuble associé à \mathfrak{X}_∞ et

$$f_a : \tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty} \longrightarrow \widehat{\Omega}$$

le morphisme défini précédemment. Nous considérerons le \mathcal{O}_D -module formel spécial f_a^*G sur $\tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty}$.

Soit H le \mathcal{O} -module π -divisible universel sur \mathbb{D}_a muni de sa rigidification

$$\rho_H : \mathbb{H} \times_{\overline{\mathbb{F}}_q} (\mathbb{D}_a \bmod \pi) \longrightarrow H \times_{\mathbb{D}_a} (\mathbb{D}_a \bmod \pi)$$

La rigidification η induit pour tout $k \geq 1$,

$$\eta : \pi^{-k}\Lambda/\Lambda \longrightarrow H \times_{\mathbb{D}_a} \mathbb{D}_{a,k}$$

Elle fournit donc un élément de

$$\mathrm{Hom}(\Lambda \otimes F/\Lambda, H \times_{\mathbb{D}_a} \tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty})$$

où $\Lambda \otimes F/\Lambda$ désigne le groupe π -divisible étale constant $\varinjlim_i \pi^{-i}\Lambda/\Lambda$. L'inclusion $\Lambda \subset F^n$ induit une quasi-isogénie $(F/\mathcal{O}_F)^n \longrightarrow \Lambda \otimes F/\Lambda$. Il y a donc une égalité

$$\mathrm{Hom}(\Lambda[\frac{1}{\pi}]/\Lambda, H \times_{\mathbb{D}_a} \tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty})[\frac{1}{\pi}] = \mathrm{Hom}((F/\mathcal{O}_F)^n, H \times_{\mathbb{D}_a} \tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty})[\frac{1}{\pi}]$$

et η fournit donc n éléments

$$\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathrm{Hom}(F/\mathcal{O}_F, H \times_{\mathbb{D}_a} \tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty})[\frac{1}{\pi}]$$

Considérons le composé

$$\begin{array}{ccc} F/\mathcal{O}_F & \xrightarrow{(\zeta_1, \dots, \zeta_n)} & H^n \times (\tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty} \bmod \pi) \xrightarrow{\rho_H^{-1}} \mathbb{H}^n \times (\tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty} \bmod \pi) \\ & & \downarrow \Delta \\ & & \mathbb{G} \times (\tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty} \bmod \pi) \xrightarrow{f_a^* \rho_G} f_a^* G \bmod \pi \end{array}$$

qui définit un élément

$$\chi \in \mathrm{Hom} \left(F/\mathcal{O}_F, f_a^* G \times_{\tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty}} (\tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty} \bmod \pi) \right) \left[\frac{1}{\pi} \right]$$

L'application de réduction modulo π induit une injection

$$\mathrm{Hom} (F/\mathcal{O}_F, f_a^* G) \left[\frac{1}{\pi} \right] \hookrightarrow \mathrm{Hom} \left(F/\mathcal{O}_F, f_a^* G \times_{\tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty}} (\tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty} \bmod \pi) \right) \left[\frac{1}{\pi} \right]$$

dont l'image est caractérisée par la théorie de la déformation de Messing relativement à l'idéal (π) qui est muni de \mathcal{O} -puissances divisées (cf. [12], ainsi que l'appendice B du chapitre I).

Théorème III.3.9. *Le morphisme χ se relève en caractéristique 0 via l'application de réduction modulo π précédente:*

$$\chi \in \mathrm{Hom} (F/\mathcal{O}_F, f_a^* G) \left[\frac{1}{\pi} \right]$$

Démonstration. Rappelons le critère de relèvement de Messing. Soit \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique sur $\mathrm{Spf}(\hat{\mathcal{O}})$. Soient H_1 et H_2 deux \mathcal{O} -modules π -divisibles sur \mathfrak{Z} . On s'intéresse à l'image de l'injection

$$\mathrm{Hom}(H_1, H_2) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(H_1 \bmod \pi, H_2 \bmod \pi)$$

Soit $H \mapsto \mathrm{Lie} E(H)$ le foncteur algèbre de Lie de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle (appendice B) muni de sa partie vectorielle $\mathrm{Fil} \mathrm{Lie} E(H)$. D'après la nature cristalline de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle, il y a un morphisme

$$\mathrm{Hom}(H_1 \bmod \pi, H_2 \bmod \pi) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_3} (\mathrm{Lie} E(H_1), \mathrm{Lie} E(H_2))$$

Alors, le critère de relèvement dit que le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(H_1, H_2) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(H_1 \bmod \pi, H_2 \bmod \pi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_3\text{-modules filtrés}} (\mathrm{Lie} E(H_1), \mathrm{Lie} E(H_2)) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_3} (\mathrm{Lie} E(H_1), \mathrm{Lie} E(H_2)) \end{array}$$

Pour le groupe F/\mathcal{O}_F on a $\mathrm{Lie} E(F/\mathcal{O}_F) = \mathrm{Fil} \mathrm{Lie}(F/\mathcal{O}_F) = \mathcal{O}_3$.

Revenons à la démonstration. Il s'agit de montrer que via la composée

$$f_a^* \rho_G \circ \Delta \circ \rho_H^{-1} \circ (\zeta_1, \dots, \zeta_n) : F/\mathcal{O}_F \longrightarrow f_a^* G \bmod \pi$$

le morphisme induit au niveau de l'évaluation des cristaux sur l'épaississement $\tilde{\mathbb{D}}_\infty \bmod \pi \hookrightarrow \tilde{\mathbb{D}}_\infty$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] & \longrightarrow & f_a^* \mathrm{Lie} E(G) \left[\frac{1}{\pi} \right] \\ 1 & \longmapsto & x \end{array}$$

vérifie $x \in f_a^* (\mathrm{Fil} \mathrm{Lie} E(G)) \left[\frac{1}{\pi} \right]$.

La quasi-isogénie $f_a^* \rho_G$ induit un isomorphisme

$$\mathbb{D}(\mathbb{G}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty}[\frac{1}{\pi}] \xrightarrow{\sim} f_a^* \text{Lie } E(G)[\frac{1}{\pi}]$$

Alors, via cet isomorphisme

$$x \in \mathbb{D}(\mathbb{G}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty}[\frac{1}{\pi}] = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},j} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty}[\frac{1}{\pi}]$$

La filtration définissant le morphisme $\tilde{\mathbb{D}}_\infty \longrightarrow \hat{\Omega}$ (où $\hat{\Omega}$ est l'espace de Drinfeld associé à l'espace vectoriel $\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi}$) est une filtration localement facteur direct $\text{Fil} \subset \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty}[\frac{1}{\pi}]$ et, via l'isomorphisme précédent,

$$f_a^*(\text{Fil Lie } E(G))[\frac{1}{\pi}] = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \Pi^j \text{Fil}$$

Rappelons qu'on a fixé un isomorphisme $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \simeq \check{F}$ et que, via l'isogénie Δ , cela nous a permis d'identifier

$$\check{F}^n \simeq \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \xrightarrow[\simeq]{\Delta^*} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}$$

Donc le morphisme définissant $f_a : \tilde{\mathbb{D}}_\infty \longrightarrow \hat{\Omega}$ (où maintenant il s'agit de l'espace $\hat{\Omega}$ associé à l'espace vectoriel F^n) est donné par une filtration

$$\text{Fil}' \subset \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty}[\frac{1}{\pi}] \simeq \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty}[\frac{1}{\pi}]^n$$

et il s'agit de voir que le morphisme composé

$$F/\mathcal{O}_F \xrightarrow{(\zeta_1, \dots, \zeta_n)} H^n \times (\tilde{\mathbb{D}}_\infty \bmod \pi) \longrightarrow \mathbb{H}^n \times (\tilde{\mathbb{D}}_\infty \bmod \pi)$$

induit au niveau de l'évaluation des cristaux un morphisme tel que

$$1 \longmapsto X \in \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \Pi^j \text{Fil}' \subset \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty}[\frac{1}{\pi}]$$

Si α_H désigne l'application de Hodge-Tate de H alors

$$X = (\alpha_H(\zeta_i))_{1 \leq i \leq n} \in \omega_{H^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty}[\frac{1}{\pi}]^n \subset \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty}[\frac{1}{\pi}]^n$$

et

$$X = (X_{ij})_{1 \leq i \leq n, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \in M_n(\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty}[\frac{1}{\pi}])$$

via

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j}^n \xrightarrow[\simeq]{\sum \Pi^{-j}} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \simeq \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \check{F}^n$$

Rappelons maintenant qu'on a identifié F^n à $(F^n)^*$ et qu'alors $\text{Fil}' \subset \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}[\frac{1}{\pi}]^n$ est le noyau de $\alpha_{H^\vee}(-1)$. On vérifie alors que via l'isomorphisme

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}[\frac{1}{\pi}] \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}[\frac{1}{\pi}]^n \simeq \left(\mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}[\frac{1}{\pi}]^n \right)^*$$

on a

$$\forall j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad (X_{ij})_{1 \leq i \leq n} = {}^t \alpha_H(\varphi_j)$$

où $\varphi_j \in \omega_{H^\vee}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}[\frac{1}{\pi}]$ est la forme linéaire composée

$$\begin{array}{ccc} \varphi_j : \omega_{H^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}[\frac{1}{\pi}] \hookrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}[\frac{1}{\pi}] & \rightarrow & \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}[\frac{1}{\pi}] \\ & & \downarrow \Pi^{-j} \\ & & \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}[\frac{1}{\pi}] \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{D}_\infty}[\frac{1}{\pi}] \end{array}$$

Le théorème est donc une conséquence de la proposition III.3.8. \square

Proposition III.3.10. *Soit $f : \tilde{\mathfrak{X}}_\infty \rightarrow \tilde{\Omega}$. Les morphismes χ définis sur les différentes cellules se recollent en un*

$$\chi \in \Gamma(\tilde{\mathfrak{X}}_\infty, \underline{\text{Hom}}(F/\mathcal{O}_F, f^*G)[\frac{1}{\pi}])$$

au sens où $\forall \mathcal{U}$ ouvert quasicompact dans $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty$, $\chi \in \text{Hom}(F/\mathcal{O}_F, f^*G|_{\mathcal{U}})[\frac{1}{\pi}]$. Pour tout ouvert quasicompact $\mathcal{U} \subset \tilde{\mathfrak{X}}_\infty$, $\chi|_{\mathcal{U}} \neq 0$. Pour tout $g \in \text{GL}_n(F)$ via l'égalité $g^*f^*G = f^*G$, où $g : \tilde{\mathfrak{X}}_\infty \rightarrow \tilde{\mathfrak{X}}_\infty$, on a $g^*\chi = \chi$.

Démonstration. Les assertions concernant le recollement et l'équivariance " $g^*\chi = \chi$ " ne posent pas de problème; il suffit de les vérifier dans le groupe $\underline{\text{Hom}}(F/\mathcal{O}_F, f^*G \bmod \pi)[\frac{1}{\pi}]$. De même l'assertion $\chi|_{\mathcal{U}} \neq 0$ se vérifie modulo π où, avec les notations de la démonstration précédente, puisque ρ_H, ρ_G et Δ sont inversibles, elle est équivalente à

$$\forall a = [\Lambda, M], \forall \mathcal{U} \subset \tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty}, (\zeta_1, \dots, \zeta_n) : F/\mathcal{O}_F \rightarrow H^n \times_{\tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty}} (\mathcal{U} \bmod \pi)$$

est non nul.

Cette assertion est claire puisque sur \mathcal{U} , $\forall k \geq 1$, $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ définissent une structure de niveau de Drinfeld $\pi^{-k}\Lambda/\Lambda \rightarrow H[\pi^k] \times \mathcal{U}$, mais \mathcal{U} étant sans π -torsion une telle structure de niveau de Drinfeld est non-triviale après inversion de π et est donc non-triviale. \square

III.3.5 Construction du morphisme

III.3.5.1 Un canular. La remarque qui suit justifie que nous devons procéder à quelques vérifications concernant les composantes connexes des revêtements de la tour de Lubin-Tate.

Plaçons-nous dans le cas $n = 1$ et $F = \mathbb{Q}_p$ et, afin de simplifier les notations, travaillons sur F et non \check{F} . Soit R une \mathbb{Z}_p -algèbre p -adique sans p -torsion telle que $\text{Spec}(R[\frac{1}{p}])$ soit connexe. Soit $x \in \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mu_{p^\infty})[\frac{1}{p}]$ tel que $x \neq 0$. On a vu dans la proposition III.3.7 qu'un tel x induit un morphisme

$$\text{Spf}(R) \longrightarrow \mathcal{Y}_\infty = \coprod_{\mathbb{Z}} \text{Spf}(\widehat{\mathbb{Z}_p^{\text{ab}}})$$

Rappelons en effet qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p^n x : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mu_{p^\infty/R[\frac{1}{p}]}$$

et alors $\forall k \geq 1$, $p^n x : p^{-k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_{p^k/R[\frac{1}{p}]}$, d'où

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{Y}_\infty \\ & \nearrow \alpha & \vdots \\ & & \mathcal{Y}_{k+1} \\ \text{Spf}(R) & \longrightarrow & \mathcal{Y}_k \\ & & \downarrow \end{array}$$

et on définit alors le morphisme cherché par

$$\text{Spf}(R) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{Y}_\infty \xrightarrow{p^{-n}} \mathcal{Y}_\infty$$

où l'action de $p^\mathbb{Z}$ sur \mathcal{Y}_∞ se fait par translation des composantes de $\coprod_{\mathbb{Z}} \text{Spf}(\widehat{\mathbb{Z}_p^{\text{ab}}})$.

Considérons maintenant l'exemple suivant. Soit

$$\text{Spf}(R) = \varprojlim_n \coprod_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \text{Spf}(\widehat{\mathbb{Z}_p^{\text{ab}}})$$

dans la catégorie des schémas formels p -adiques, c'est-à-dire

$$R = \left(\varprojlim_n \coprod_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}_p^{\text{ab}}} \right)^\wedge = \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \widehat{\mathbb{Z}_p^{\text{ab}}})$$

les fonctions continues de \mathbb{Z}_p dans $\widehat{\mathbb{Z}_p^{\text{ab}}}$. Fixons $(\zeta_{p^k})_{k \geq 1} \in \mu_{p^\infty}(\widehat{\mathbb{Z}_p^{\text{ab}}})$ un générateur de $T_p(\mu_{p^\infty})$, c'est-à-dire tel que $\zeta_p \neq 1$. Soit $x : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mu_{p^\infty/R}$ défini par $x = (x_k)_{k \geq 1}$, $x_k \in \mu_{p^k}(R)$, et x_k est la fonction continue

$$\forall t \in \mathbb{Z}_p \quad x_k(t) = \zeta_{p^k}^t$$

Alors, pour tout ouvert \mathcal{U} de $\text{Spf}(R)$, $x|_{\mathcal{U}} \neq 1$. Mais il n'existe pas de morphisme associé $\text{Spf}(R) \rightarrow \mathcal{Y}_\infty$, car les composantes connexes de $\text{Spec}(R)$ ne sont pas ouvertes (les "diracs" comme fonctions de \mathbb{Z}_p à valeurs dans $\widehat{\mathbb{Z}_p^{\text{ab}}}$ ne sont pas des fonctions continues). On a $\pi_0(\text{Spec}(R)) \simeq \mathbb{Z}_p$.

III.3.6 Un remède au canular

Proposition III.3.11. *Soit \mathfrak{X} l'espace de Lubin-Tate sans niveau sur $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ et pour $C \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ un sous-groupe ouvert $\mathfrak{X}_C^{\mathrm{rig}}$, l'espace de Lubin-Tate rigide en niveau C . Soit H le groupe p -divisible universel sur \mathfrak{X} . Soit $U \subset \mathfrak{X}_C^{\mathrm{rig}}$ un ouvert admissible connexe. Soit $s \in U(\overline{F})$ un point géométrique et*

$$\rho : \pi_1(U, s) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathcal{O}_F}(T_p(H^{\mathrm{rig}}))$$

la représentation de monodromie associée. Alors l'image de ρ est ouverte. En d'autres termes, si $(U_{C'})_{C' \subset C}$ désigne l'image réciproque de U dans les revêtements de la tour de Lubin-Tate en niveaux $C' \subset C$, alors

$$\lim_{\substack{\longleftarrow \\ C' \subset C}} \pi_0(U_{C'})$$

est un ensemble fini (pour $C'' \subset C'$ avec $C' \subset C$ suffisamment petit $\pi_0(U_{C''}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(U_{C'})$).

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe une extension de degré fini $K|\check{F}$ ainsi qu'un point $x \in U(K)$ tel que si H_x désigne le groupe de Lubin-Tate sur \mathcal{O}_K spécialisé en x alors l'image de

$$\rho_x : \mathrm{Gal}(\overline{K}|K) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathcal{O}_F}(T_p(H_x))$$

est ouverte. Du point de vue des composantes connexes, cela exprime que si $x' \in U$ désigne le point "du spectre maximal" associé à x , l'ensemble $\lim_{\substack{\longleftarrow \\ k}} \Pi_{C', C}^{-1}(x')$ est

fini, où $\Pi_{C', C}$ est l'application de l'espace de Lubin-Tate en niveau C' vers celui en niveau C . Il suffit de le faire pour $C = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$, puisque l'image de U dans $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ par l'application d'oubli du niveau est un ouvert admissible. Supposons donc $C = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$.

Si $K|\check{F}$ est finie et $x \in \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}(K)$, soit $\mathrm{Fil}_x \subset \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\check{F}} K$, $\mathrm{Fil}_x \in \mathbb{P}^{n-1}(K)$, la filtration de Hodge associée dans l'espace des périodes. Alors

$$\mathrm{End}(H_x)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)}(V_p(H_x)) \simeq \mathrm{End}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}, \varphi, \mathrm{Fil}_x) \simeq \mathrm{Stab}_D(\mathrm{Fil}_x)$$

qui est un corps commutatif $E|F$ tel que $E \subset D$ (le fait que E est commutatif résulte de ce qu'étant donné que H_x est un groupe formel l'application qui à un endomorphisme associe l'endomorphisme tangent sur l'algèbre de Lie est injective, mais ici l'algèbre de Lie de H_x est de dimension 1).

Supposons $E = F$. Alors, puisque l'isocristal de H_x est simple, la représentation cristalline $V_p(H_x)$ est irréductible et le reste comme représentation $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K')$, pour toute extension de degré fini K' de K . De plus, pour toute extension de degré fini $K'|K$, $\mathrm{End}_{\mathrm{Gal}(\overline{K}|K')}(V_p(H_x)) = F$. Cela implique, par la théorie de Sen (cf.

par exemple le théorème 5 de [14] où le cas $F = \mathbb{Q}_p$ est traité, le cas F général étant identique), que l'algèbre de Lie de l'image de $\text{Gal}(\overline{K}|K)$ est $\text{End}(V_p(H_x))$ et que donc l'image est ouverte.

Reste donc à voir que si $\tilde{\pi} : \mathfrak{X}^{\text{rig}} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ désigne l'application des périodes alors

$$\exists x \in U \quad \text{Stab}_{D^\times}(\tilde{\pi}(x)) = F^\times$$

Mais le morphisme des périodes étant étale, $\tilde{\pi}(U)$ contient un ouvert admissible de \mathbb{P}^{n-1} . Or les sous-variétés "de type Hodge" associées aux corps E tels que $F \subset E \subset D$ sont les points fixes de E^\times agissant sur \mathbb{P}^{n-1} via $E^\times \subset D^\times$. Lorsque E varie, elles forment une union finie de D^\times -orbites de sous-variétés algébriques dans \mathbb{P}^{n-1} . Ces D^\times -orbites sont en bijection avec les classes de conjugaison de tores non-triviaux du groupe algébrique associé à D^\times . Donc, d'après la proposition qui suit, $\tilde{\pi}(U)$ (ou plutôt ses points "classiques") n'est pas contenu dans l'union de ces sous-variétés. \square

Proposition III.3.12. *Soit L un corps valué complet pour une valuation discrète. Soit X un L -espace analytique de Berkovich lisse équidimensionnel. Soit H un groupe topologique compact agissant continûment sur X , au sens où l'application $H \times |X| \longrightarrow |X|$ est continue. Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble compact tel que tout $x \in X$ possède un voisinage U tel que $U \cap Z$ soit un sous-ensemble analytique Zariski fermé dans U de dimension $< \dim X$. Alors, pour tout domaine analytique $V \subset X$ non-vide, $V(\overline{L}) \setminus H.Z(\overline{L}) \neq \emptyset$.*

Démonstration. L'ensemble $H.Z$ étant compact dans $|X|$, $V \setminus H.Z$ est ouvert dans V . Or, l'image de $V(\overline{L})$ par l'application $V(\overline{L}) \longrightarrow |V|$ est dense dans $|V|$. Il suffit donc de montrer que $V \setminus H.Z \neq \emptyset$. Soit $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset V$ un domaine affinoïde. Puisque la valuation de L est discrète, la \mathcal{O}_L -algèbre des éléments topologiquement bornés \mathcal{A}^0 dans \mathcal{A} est une \mathcal{O}_L -algèbre telle que si $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^0/\mathcal{A}^{00} = (\mathcal{A}^0/\pi_L \mathcal{A}^0)_{\text{red}}$ désigne sa fibre spéciale réduite, on ait

$$\dim \mathcal{A} = \dim \tilde{\mathcal{A}}$$

(cf. le lemme III.3.13). Soit $\text{sp} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \longrightarrow \text{Spec}(\tilde{\mathcal{A}})$ l'application de spécialisation. Soit ξ un point générique d'une composante irréductible de $\text{Spec}(\tilde{\mathcal{A}})$ de dimension $\dim X$. D'après la proposition 2.4.4. page 36 de [1], il existe $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tel que $\text{sp}(x) = \xi$. De plus, d'après le lemme III.3.13 qui suit, pour un tel x , le corps résiduel du corps valué complet $\mathcal{K}(x)$ a pour degré de transcendance $\dim X$ sur le corps résiduel de L . De cela, on déduit que $x \notin H.Z$, puisque, toujours d'après le lemme qui suit, $\forall z \in Z, \quad \text{deg.tr} \widetilde{\mathcal{K}(z)} < \dim X$. \square

Lemme III.3.13. *Soit L un corps valué complet pour une valuation discrète de corps résiduel k . Soit \mathcal{A} une L -algèbre affinoïde. Soit $\mathcal{A}^0 = \{f \in \mathcal{A} \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$, $\mathcal{A}^{00} = \{f \in \mathcal{A} \mid \|f\|_\infty < 1\}$ et $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathcal{A}^0$. Alors $\tilde{\mathcal{A}}$ est une k -algèbre de type fini. De plus*

$$\dim \mathcal{A} = \dim \tilde{\mathcal{A}}$$

Soit $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'espace de Berkovich associé à \mathcal{A} et $\forall x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $\mathcal{K}(x)$ le corps résiduel de x (ou son complété). Alors

$$\forall x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), \quad \text{deg.tr.}_k \widetilde{\mathcal{K}(x)} \leq \dim \mathcal{A}$$

Si de plus, $sp(x)$ est un point générique d'une composante irréductible de dimension $\dim \widetilde{\mathcal{A}}$, alors

$$\text{deg.tr.}_k \widetilde{\mathcal{K}(x)} = \dim \mathcal{A}$$

Démonstration. D'après [2], théorème 1 section 6.3.5, un morphisme d'algèbres affinoïdes $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ est fini ssi le morphisme induit $\widetilde{\mathcal{B}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}$ l'est. On en déduit que $\widetilde{\mathcal{A}}$ est une k -algèbre de type fini, puisque c'est le cas de $\mathcal{A} = L \langle T_1, \dots, T_n \rangle$ pour tout n .

D'après le théorème de normalisation de Noether, il existe un morphisme injectif fini $\varphi : L \langle T_1, \dots, T_n \rangle \hookrightarrow \mathcal{A}$, où $n = \dim \mathcal{A}$. Le morphisme φ étant fini injectif, c'est une isométrie (lemme 6 p.170 de [2]). Donc, $\widetilde{\varphi} : k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}}$ est injectif fini, ce qui implique que $\dim \widetilde{\mathcal{A}} = n = \dim \mathcal{A}$.

Maintenant si $\varphi^* : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{B}^n$ désigne le morphisme d'espaces de Berkovich associé à un φ , comme précédemment, $\forall x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ si $y = \varphi^*(x)$, alors $\mathcal{K}(x)|\mathcal{K}(y)$ est une extension de degré fini. Donc l'extension de corps résiduels $\widetilde{\mathcal{K}(x)}|\widetilde{\mathcal{K}(y)}$ est algébrique. On est alors ramené à montrer que $\forall y \in \mathbb{B}^n$, le degré de transcendance sur k de $\widetilde{\mathcal{K}(y)}$ est plus petit que n . On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ ne pose pas de problème, car on a une description complète de $\mathcal{M}(L \langle T \rangle)$ (section 1.4.4 p. 18 de [1]). La récurrence se fait alors en utilisant le cas $n = 1$ pour d'autres corps que L et la projection $pr : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^{n-1}$ qui à (x_1, \dots, x_n) associe (x_1, \dots, x_{n-1}) . En effet, pour $z \in \mathbb{B}^n$, la fibre au-dessus de $pr(z)$ de pr est isomorphe à $\mathbb{B}^1 \widehat{\otimes}_L \mathcal{K}(pr(z)) \ni z$.

Supposons maintenant que $sp(x)$ est un point générique d'une composante irréductible de $\widetilde{\mathcal{A}}$ de dimension maximale. Alors, étant donné que $\text{deg.tr.}_k \widetilde{\mathcal{K}(x)} \leq \dim \mathcal{A}$ et que $\widetilde{\mathcal{K}(x)}|k(sp(x))$, on a égalité des deux degrés de transcendance. \square

Remarque III.3.14. Le principe des démonstrations précédentes consiste à vérifier que le "groupe de Mumford-Tate p -adique" est génériquement le plus gros possible, où "génériquement" signifie que tout ouvert admissible possède un point où ce groupe est maximal.

III.3.7 Construction du morphisme

Lemme III.3.15. Soit $R_\infty = \varinjlim_{m \geq 1} R_m$, où $\forall m$, R_m est une \check{O} -algèbre π -adique sans

π -torsion intégralement fermée dans $R_m[\frac{1}{\pi}]$. Alors \widehat{R}_∞ est intégralement fermé dans $\widehat{R}_\infty[\frac{1}{\pi}]$.

Démonstration. On vérifie successivement que pour les anneaux sans π -torsion la propriété d'être intégralement fermé dans sa fibre générique (i.e., après inversion de π) est stable par limite inductive et complétion π -adique. \square

Lemme III.3.16. *Tout ouvert quasicompact de $\tilde{\mathcal{X}}_\infty$ possède un nombre fini de composantes connexes et $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}_\infty}$ est intégralement fermé dans $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}_\infty}[\frac{1}{\pi}]$.*

Démonstration. Soit $k_0 \geq 4$. Soit $\mathcal{U}_\infty \subset \tilde{\mathcal{X}}_\infty$ un ouvert affine de la forme

$$\mathcal{U}_\infty = \varprojlim_{k \geq k_0} \mathcal{U}_k$$

où $\mathcal{U}_k \subset \tilde{\mathbb{D}}_{a,k}$, pour un $a = [\Lambda, M]$, et $\forall k$ \mathcal{U}_{k+1} est l'image réciproque de \mathcal{U}_k via le morphisme de changement de niveau. Les \mathcal{U}_k sont des schémas formels admissibles sur $\check{\mathcal{O}}$. De plus les $(\mathcal{U}_k^{\text{rig}})_k$ forment un revêtement pro-galoisien de groupe $K = Id + \pi^{k_0} \text{End}(\Lambda) \subset \text{GL}_n(F)$. Rappelons que les \mathcal{U}_k étant normaux, $\forall k$, $\pi_0(\mathcal{U}_k) = \pi_0(\mathcal{U}_k^{\text{rig}})$. Écrivons $\mathcal{U}_k = \text{Spf}(R_k)$, $\mathcal{U}_\infty = \text{Spf}(R_\infty)$, avec $R_\infty = \varinjlim_k R_k$. Alors, d'après la proposition III.3.11,

$$\exists k_1 \geq k_0, \forall k \geq k_1, \quad \pi_0(\text{Spec}(R_\infty)) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\text{Spec}(R_k))$$

qui est un ensemble fini et donc les composantes connexes de $\text{Spec}(R_\infty)$ sont ouvertes. Maintenant, si $f \in R_\infty/\pi R_\infty$ et si $D(f) \subset \text{Spf}(R_\infty)$ est l'ouvert associé, alors $\exists k'$ tel que f provienne d'un élément de $R_{k'}/\pi R_{k'}$ et donc l'ouvert $D(f)$ également. De cela on déduit, d'après l'analyse précédente appliquée à $D(f)$, que $D(f)$ possède un nombre fini de composantes connexes. Donc $\tilde{\mathcal{X}}_\infty$ possède une base d'ouverts ayant un nombre fini de composantes connexes duquel on déduit que tout ouvert quasicompact possède un nombre fini de composantes connexes.

D'après le lemme précédent, on obtient également ainsi la seconde assertion (cf. plus généralement la proposition D.6.1 de l'appendice). \square

L'élément χ de la proposition III.3.10 fournit alors, d'après la proposition III.3.7, un morphisme $\text{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariant

$$\tilde{\mathcal{X}}_\infty \longrightarrow \mathcal{Y}_\infty$$

où "équivariant" signifie que l'action de $(g, d) \in \text{GL}_n(F) \times D^\times$ est transformée en celle de $({}^t g, d^{-1})$.

III.4 Construction du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \widehat{\mathbb{P}}^{n-1}$

Dans cette section, nous entamons la construction du morphisme de la tour de Drinfeld vers celle de Lubin-Tate en construisant un morphisme d'un éclaté de \mathcal{Y}_∞ vers l'espace des périodes associé à l'espace de Lubin-Tate.

III.4.1 Applications de Hodge-Tate

Soit comme précédemment G le \mathcal{O}_D -module formel spécial universel sur \mathcal{Y} . Notons $\forall k$, $\mathcal{Y}_k = \mathcal{Y}_{1+\pi^k\mathcal{O}_D}$. Les schémas formels \mathcal{Y}_k étant normaux, la structure de niveau en fibre générique induit des morphismes

$$\forall k \geq 1 \quad \underline{\pi^{-k}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D} \longrightarrow G[\pi^k] \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{Y}_k$$

qui induisent des isomorphismes sur $\mathcal{Y}_k^{\text{rig}}$.

Fait admis: Comme pour la tour de Lubin-Tate on admettra que $\mathcal{O}_F/\pi^k\mathcal{O}_F(1)$ devient trivial sur \mathcal{Y}_k . Cela résulte soit de l'existence d'une application déterminant construite à l'aide des théorèmes de comparaison de [7] ou bien de l'existence de l'application déterminant pour des variétés de Shimura uniformisées par $\mathcal{Y}_k^{\text{rig}}$.

Comme dans la section III.2.1, on construit à partir de ces morphismes des applications de Hodge-Tate

$$\forall k \geq 1, \alpha_{G^\vee[\pi^k]}(-1) : \text{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_F) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_k} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_k} \longrightarrow \omega_G \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_k} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_k}(-1)$$

Ces morphismes satisfont une condition de compatibilité naturelle et induisent alors une application de Hodge-Tate en niveau infini

$$\alpha_{G^\vee}(-1) : \text{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_F) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\infty} \longrightarrow \omega_G \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\infty}(-1)$$

L'action à gauche de \mathcal{O}_D sur G induit une action à droite de \mathcal{O}_D sur G^\vee , c'est-à-dire un morphisme $\mathcal{O}_D \longrightarrow \text{End}(G^\vee)^{\text{opp}}$. Le module de Tate de G^\vee est donc un \mathcal{O}_D -module à droite et via sa rigidification, ce module est le \mathcal{O}_D -module $\text{Hom}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_F)(1)$, où $\forall d \in \mathcal{O}_D, \forall h \in \text{Hom}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_F)(1)$, $h.d(\bullet) = h(d\bullet)$. De même ω_G est un \mathcal{O}_D -module à droite. Les morphismes de Hodge-Tate précédentes sont \mathcal{O}_D -équivariantes pour les actions précédentes.

Rappelons que pour un $\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_F} \check{\mathcal{O}}$ -module M , on note $M = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} M_j$ sa décomposition en facteurs directs, où $\mathcal{O}_{F_n} \subset \mathcal{O}_D$ agit sur le facteur M_j via $\sigma^{-j} : F_n \hookrightarrow \check{F}$.

On a donc des décompositions

$$\alpha_{G^\vee[\pi^k]}(-1) : \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n}, \sigma^{-j}}(\mathcal{O}_D, \check{\mathcal{O}}) \otimes_{\check{\mathcal{O}}} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_k} / \pi^k \xrightarrow{\bigoplus_j \alpha_{G^\vee[\pi^k], j}} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \omega_{G, j} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_k} / \pi^k$$

$$\alpha_{G^\vee}(-1) : \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n}, \sigma^{-j}}(\mathcal{O}_D, \check{\mathcal{O}}) \otimes_{\check{\mathcal{O}}} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\infty} \xrightarrow{\bigoplus_j \alpha_{G^\vee, j}} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \omega_{G, j} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\infty}(-1)$$

sur lesquelles Π agit avec $\text{deg } \Pi = -1$.

III.4.2 Éclatements et conoyau de l'application de Hodge-Tate

Nous utiliserons le lemme-clef suivant, variante du lemme de Nakayama.

Lemme III.4.1. *Soient M et N deux \mathcal{O}_F -modules π -adiquement complets, $u : M \longrightarrow N$, N' un sous-module de N tel que $\pi N \subset N'$ et $\text{Im}(u) + \pi^2 N = N'$. Alors $\text{Im}(u) = N'$.*

De plus, nous utiliserons le résultat suivant dont la démonstration est similaire à celle du théorème II.1.1, en remplaçant p par π et les anneaux de Fontaine usuels par leurs équivalents relatifs associés à $F|\mathbb{Q}_p$. En fait, pour ce dont nous avons besoin nous pourrions utiliser le théorème II.1.1. Cependant l'utilisation du théorème II.1.1 conduirait à remplacer π par $\pi^{e_{F|\mathbb{Q}_p}}$, ce qui n'est guère agréable, mais les arguments seraient essentiellement les mêmes.

Théorème III.4.2. *Soit $K|F$ un corps valué complet pour une valuation à valeurs dans \mathbb{R} . Soit H un \mathcal{O} -module π -divisible sur \mathcal{O}_K . Alors le conoyau de l'application de Hodge-Tate*

$$\alpha_H : T_p(H) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow \omega_{H^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

est annulé par π .

Remarque III.4.3. En fait, nous n'utiliserons le résultat précédent que pour des extensions K de \bar{F} de degré fini.

Considérons maintenant pour tout j , $0 \leq j \leq n-1$,

$$\alpha_{G^\vee[\pi^2],j}(-1) : \text{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n}, \sigma^{-j}}(\mathcal{O}_D, \check{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_2}/\pi^2 \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_2} \longrightarrow \omega_{G,j} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_2}/\pi^2 \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_2}(-1)$$

Soit \mathcal{I}_j l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_2}$ tel que $\pi^2 \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_2} \subset \mathcal{I}_j$ et

$$\text{Im}(\alpha_{G^\vee[\pi^2],j}) = \omega_{G,j} \otimes \mathcal{I}_j/\pi^2 \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_2}$$

Définition III.4.4. Pour tout $k \geq 2$, on note $\tilde{\mathcal{Y}}_k$ le normalisé de l'éclatement formel admissible des idéaux $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_k} \cdot \Pi_{k,2}^{-1} \mathcal{I}_j$, $0 \leq j \leq n-1$, où $\Pi_{k,2} : \mathcal{Y}_k \longrightarrow \mathcal{Y}_2$.

Ainsi $\tilde{\mathcal{Y}}_k$ est le normalisé du transformé strict de $\mathcal{Y}_k \longrightarrow \mathcal{Y}_2$ relativement à l'éclatement $\tilde{\mathcal{Y}}_2 \longrightarrow \mathcal{Y}_2$ (cf. section D.7.3 de l'appendice). En particulier les morphismes $\tilde{\mathcal{Y}}_{k+1} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}_k$ sont finis.

Définition III.4.5. On note $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty = \varprojlim_k \tilde{\mathcal{Y}}_k$ dans la catégorie des schémas formels

π -adiques sur $\text{Spf}(\check{\mathcal{O}})$.

Remarque III.4.6. D'après le corollaire D.7.11 de l'appendice, on peut construire $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$ directement en niveau infini.

Proposition III.4.7. *Pour tout $k \geq 2$ et j , $0 \leq j \leq n-1$, le morphisme de Hodge-Tate sur l'éclaté $\tilde{\mathcal{Y}}_k$*

$$\alpha_{G^\vee[\pi^k],j}(-1) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n}, \sigma^{-j}}(\mathcal{O}_D, \check{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_k} / \pi^k \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_k} \longrightarrow \omega_{G,j} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_k} / \pi^k \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_k}(-1)$$

a un conoyau annulé par π et son image est de la forme $\omega_{G,j} \otimes \mathcal{J}_{j,k} / \pi^k \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_k}(-1)$ où $\mathcal{J}_{j,k}$ est un idéal localement libre de rang 1 vérifiant $\mathcal{J}_{j,k} = \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_k} \cdot \Pi_{k,2}^{-1} \mathcal{J}_{j,2}$ avec $\Pi_{k,2} : \tilde{\mathcal{Y}}_k \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}_2$.

En niveau infini l'image de

$$\alpha_{G^\vee,j}(-1) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n}, \sigma^{-j}}(\mathcal{O}_D, \check{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \longrightarrow \omega_{G,j} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty}(-1)$$

est localement libre de rang 1, égale à $\omega_{G,0} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \cdot \Pi_{\infty,2}^{-1} \mathcal{J}_{j,2}(-1)$.

Démonstration. Oublions les torsions à la Tate dans cette démonstration. Fixons l'entier j . Par définition de $\tilde{\mathcal{Y}}_2$, le morphisme

$$\alpha_{G^\vee[\pi^2],j} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n}, \sigma^{-j}}(\mathcal{O}_D, \check{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_2} / \pi^2 \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_2} \longrightarrow \omega_{G,j} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_2} / \pi^2 \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_2}$$

vérifie $\mathrm{Im} \alpha_{G^\vee[\pi^2],j} = \omega_{G,j} \otimes \mathcal{J}_{j,2} / \pi^2 \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_2}$, où $\mathcal{J}_{j,2}$ est localement libre de rang 1. Montrons que $\pi \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_2} \subset \mathcal{J}_{j,2}$. Il suffit de le vérifier localement sur $\tilde{\mathcal{Y}}_2$. Soit donc, localement sur $\tilde{\mathcal{Y}}_2$, $t \in \omega_{G,j}$ une section engendrant $\omega_{G,j}$ et écrivons

$$\mathrm{Im}(\alpha_{G^\vee[\pi^2],j}) = t \otimes \bar{f}$$

où $f \in \mathcal{J}_{j,2}$. Pour tout $x \in \tilde{\mathcal{Y}}_2^{\mathrm{rig}}$, $x : \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}_2$ pour $K|\check{F}$ finie, on a $x^* \alpha_{G^\vee[\pi^2]} = \alpha_{(x^*G)^\vee[\pi^2]}$, où x^*G vit sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$. Du théorème III.4.2, on déduit $|\frac{\pi}{f}(x)| \leq 1$. Donc la fonction rigide $\frac{\pi}{f}$ vérifie

$$\left\| \frac{\pi}{f} \right\|_\infty \leq 1$$

ce qui implique, $\tilde{\mathcal{Y}}_2$ étant normal, que $\pi/f \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_2}$.

On déduit le reste de la proposition en utilisant le lemme III.4.1. \square

Remarque III.4.8. Le lecteur attentif aura remarqué que contrairement au cas des espaces de Lubin-Tate, c'est-à-dire le cas de la section III.2.4, on doit d'abord éclater/normaliser avant d'avoir des renseignements sur le conoyau de l'application de Hodge-Tate. La raison en est que la proposition III.2.1 est plus précise que le théorème III.4.2.

Lemme III.4.9. *L'action de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ sur \mathcal{Y}_∞ s'étend en une action de $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$.*

Démonstration. En ce qui concerne l'action de $\mathrm{GL}_n(F) \times \mathcal{O}_D^\times$, le résultat est clair puisque ce groupe laisse invariant les idéaux \mathcal{I}_j . Reste à voir que $\forall i$, $0 \leq i \leq n-1$, l'action de $\Pi^i \in D^\times$ s'étend (puisque $\pi \in D^\times$ agit comme $\pi \in \mathrm{GL}_n(F)$) l'action

de $\Pi^{\mathbb{Z}}$ s'étend ssi c'est le cas pour les Π^i , $0 \leq i \leq n-1$). Le module de Tate de $(G/G[\Pi^i])^\vee$ est égal à $\text{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_F) \cdot \Pi^i \subset \text{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_F)$. Il suffit de voir que pour $k \geq 3$, l'image de ce sous-module par l'application $\alpha_{G^\vee[\pi^k]}$ est somme directe de modules localement libres. Mais cela résulte de

$$\alpha_{G^\vee[\pi^k]}(\text{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_F) \cdot \Pi^i \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_k} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_k}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \text{Im}(\alpha_{G^\vee[\pi^k], j+i}) \cdot \Pi^j$$

et de ce qu'étant donné que $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$ n'a pas de π -torsion et que $\forall j$, Π^j possède un inverse après inversion de π alors l'image par Π^j d'un module localement libre de rang 1 est localement libre de rang 1. \square

Remarque III.4.10. Nous n'utiliserons que $\alpha_{G^\vee, n-1}$ pour définir le morphisme de $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$ vers l'espace des périodes de Lubin-Tate. Mais la raison pour laquelle nous avons rendu localement libre l'image de tous les $(\alpha_{G^\vee, j})_{0 \leq j \leq n-1}$ provient du lemme précédent, afin de pouvoir relever l'action de $\Pi^{\mathbb{Z}}$ à $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$. On aurait également pu rendre l'image de $\alpha_{G^\vee, n-1}$ localement libre de rang 1 après éclatement/normalisation des idéaux $(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_k} \cdot \Pi_{k,2}^{-1} \mathcal{I}_0)_{k \geq 2}$, puis remarquer qu'étant donné un idéal $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_D^\times \times \text{GL}_n(F)$ -invariant, l'idéal $\prod_{0 \leq j \leq n-1} \Pi^{j*} \mathcal{K}$ est $D^\times \times \text{GL}_n(F)$ -invariant et qu'on peut donc l'éclater/normaliser de nouveau afin d'obtenir un schéma formel éclaté/normalisé $D^\times \times \text{GL}_n(F)$ -invariant.

III.4.3 Construction du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$

III.4.3.1 Une identification. Rappelons (section II.3.1) qu'avec les choix faits, il y a un isomorphisme

$$\mathbb{D}(\mathbb{H}) \simeq \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}} \check{\mathcal{O}}$$

où si V désigne le Verschiebung et $\iota : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} \text{End}(\mathbb{D}(\mathbb{H}), V)$

$$\begin{aligned} \forall d \otimes \lambda \in \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}} \check{\mathcal{O}}, \quad V(d \otimes \lambda) &= d\Pi \otimes \lambda^{\sigma^{-1}} \\ \forall d' \in \mathcal{O}_D, \quad \iota(d')(d \otimes \lambda) &= d'd \otimes \lambda \end{aligned}$$

Avec ces notations,

$$\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}} \check{\mathcal{O}} = \bigoplus_{0 \leq j \leq n-1} \underbrace{\Pi^j \otimes 1}_{\mathbb{D}(\mathbb{H})_j} \cdot \check{\mathcal{O}}$$

et donc $\forall j$, $0 \leq j \leq n-1$, $\iota(\Pi^j) : \mathbb{D}(\mathbb{H})_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{H})_j$ est un isomorphisme. De cela on déduit le lemme suivant

Lemme III.4.11. *L'application*

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathcal{O}_D, \mathbb{D}(\mathbb{H})) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n}}(\mathcal{O}_D, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1})$$

où $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}$ est muni de l'action de \mathcal{O}_{F_n} dérivant de celle de \mathcal{O}_D sur $\mathbb{D}(\mathbb{H})$, qui à $h : \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})$ associe h composé avec la projection $\mathbb{D}(\mathbb{H}) \twoheadrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}$, est une bijection.

Il y a donc une bijection

$$\mathbb{D}(\mathbb{H}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n}}(\mathcal{O}_D, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1})$$

qui à $x = \sum_{j=0}^{n-1} \Pi^{j-n+1} \cdot x_j \in \mathbb{D}(\mathbb{H})$, où $\forall j \ x_j \in \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}$, associe le morphisme de \mathcal{O}_D vers $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}$, qui à Π^{n-1-j} associe x_j . Réciproquement, à $h \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n}}(\mathcal{O}_D, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1})$, on associe $\sum_{j=0}^{n-1} \Pi^{j-n+1} \cdot h(\Pi^{n-1-j}) \in \mathbb{D}(\mathbb{H})$.

Remarque III.4.12. Via l'isomorphisme $\mathbb{D}(\mathbb{H}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n}}(\mathcal{O}_D, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1})$ fixé précédemment, l'action de \mathcal{O}_D sur $\mathbb{D}(\mathbb{H})$ se fait via

$$\forall d \in \mathcal{O}_D, \forall h \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n}}(\mathcal{O}_D, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}) \quad (d.h)(\bullet) = h(\bullet d)$$

Au final, on a donc une identification

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_D, \check{\mathcal{O}}_{n-1} \otimes_{\check{\mathcal{O}}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n, \sigma}}(\mathcal{O}_D, \check{\mathcal{O}}) \otimes_{\check{\mathcal{O}}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1} \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n}}(\mathcal{O}_D, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}) \\ &= \mathbb{D}(\mathbb{H}) \end{aligned}$$

Remarque III.4.13. Plus généralement, considérons le foncteur qui à un $\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_F} \check{\mathcal{O}}$ -module M associe le $\check{\mathcal{O}}$ -module $\text{Hom}_{\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_F} \check{\mathcal{O}}}(M, \mathbb{D}(\mathbb{H}))$. Il y a alors un isomorphisme naturel en M

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_F} \check{\mathcal{O}}}(M, \mathbb{D}(\mathbb{H})) \xrightarrow{\sim} M_{n-1}^* \otimes_{\check{\mathcal{O}}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}$$

où $M^* = \text{Hom}_{\check{\mathcal{O}}}(M, \check{\mathcal{O}})$, et donc $M \mapsto M_{n-1}^*$, est le foncteur

$$M \mapsto \text{Hom}_{(\mathcal{O}_{F_n, \sigma}, \check{\mathcal{O}})}(M, \check{\mathcal{O}}).$$

III.4.3.2 Construction du morphisme. Considérons maintenant le morphisme

$$\alpha_{G^\vee, n-1}(-1) \otimes_{\check{\mathcal{O}}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}$$

entre les espaces suivants

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{F_n, \sigma}}(\mathcal{O}_D, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}) \otimes_{\check{\mathcal{O}}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \longrightarrow \omega_{G, n-1} \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty}(-1)$$

D'après l'identification précédente, il définit un morphisme

$$\mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes_{\check{\mathcal{O}}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \longrightarrow \omega_{G, n-1} \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty}(-1)$$

qui fournit donc un morphisme

$$\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$$

Définition III.4.14. On munit $\widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$ de l'action à gauche de \mathcal{O}_D^\times , définie par l'action l'action à droite de \mathcal{O}_D^\times sur $\mathbb{D}(\mathbb{H})$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_D^\times &\longrightarrow \mathcal{O}_D^\times \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{D}(\mathbb{H})) \\ d &\longmapsto d^{-1} \end{aligned}$$

Lemme III.4.15. *Le morphisme précédent de $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$ vers $\widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$ est \mathcal{O}_D^\times -équivariant, au sens où l'action à droite de $d \in \mathcal{O}_D^\times$ sur $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$ est transformée en celle à gauche de d^{-1} sur $\widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la remarque III.4.12 couplée à la définition de l'action de \mathcal{O}_D^\times sur la rigidification du module de Tate du \mathcal{O}_D -module formel spécial universel, donnée dans la définition III.1.3. \square

III.5 Relèvement du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \widehat{\mathbb{P}}^{n-1}$ vers une cellule de l'espace de Lubin-Tate

III.5.1 Éclatement équivariant de l'espace projectif formel

Il est aisé de voir qu'après un éclatement formel admissible, l'action de \mathcal{O}_D^\times sur $\widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$ s'étend en une action de D^\times . En effet, il suffit d'éclater les idéaux

$$u(\Pi^j \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))})(-1), \quad 1 \leq j \leq n-1$$

où

$$u : \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))}}(1)$$

est l'application universelle.

Fixons maintenant une cellule $a = [\Lambda, M]$ dans l'immeuble paramétrant les cellules de \mathfrak{X}_∞ . La cellule \mathbb{D}_a ne dépend que de M dans le couple $[\Lambda, M]$ et non de \mathcal{O}_F^n . Rappelons que d'après le théorème de Gross-Hopkins ([11], théorème I.4.1) le morphisme des périodes de Hodge De-Rham

$$\tilde{\pi} : \mathbb{D}_a^{\text{rig}} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})^{\text{rig}}$$

est un isomorphisme sur son image et que l'ouvert admissible $\tilde{\pi}(\mathbb{D}_a^{\text{rig}})$ vérifie

$$\mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})^{\text{rig}} = \bigcup_{0 \leq j \leq n-1} \Pi^j \cdot \tilde{\pi}(\mathbb{D}_a^{\text{rig}})$$

où $\Pi^j \cdot \tilde{\pi}(\mathbb{D}_a^{\text{rig}}) = \tilde{\pi}(\mathbb{D}_{\Pi^j \cdot a}^{\text{rig}})$. Il existe donc un éclatement formel admissible

$$\tilde{\widehat{\mathbb{P}}}(\mathbb{D}(\mathbb{H})) \longrightarrow \widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$$

muni d'un ouvert $\mathcal{W} \subset \tilde{\widehat{\mathbb{P}}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$ tels que l'action de D^\times sur $\mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})^{\text{rig}}$ se prolonge à $\tilde{\widehat{\mathbb{P}}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$,

$$\tilde{\widehat{\mathbb{P}}}(\mathbb{D}(\mathbb{H})) = \bigcup_{0 \leq j \leq n-1} \Pi^j \cdot \mathcal{W}$$

et il y a un isomorphisme

$$\psi_a : \mathbb{D}_a \xrightarrow{\sim} \Pi^j \cdot \mathcal{W}$$

où si $a = [\Lambda, M]$, $M = \Pi^k \mathcal{O}_D$, $k \equiv j \pmod{n}$, et induisant en fibre générique le morphisme des périodes (utiliser également le fait que \mathbb{D}_a est normal pour voir qu'il existe un \mathcal{W} ; un isomorphisme $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ entre algèbres affinoïdes induit un isomorphisme $\mathcal{A}^0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}^0$ entre leurs boules unité pour la norme infini). Cette dernière assertion signifie que si $\text{Fil} \subset \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))}$ désigne la filtration localement facteur direct de rang $n - 1$ définissant l'espace projectif alors

$$\psi_a^* \text{Fil}_{|\Pi^j \cdot \mathcal{W}} = \text{Fil } \mathbb{D}(\mathbb{H})[\frac{1}{\pi}]$$

où, si (H_a, ρ_{H_a}) désigne la déformation universelle sur \mathbb{D}_a ,

$$\rho_{H_a} : \mathbb{H} \times_{\overline{\mathbb{F}}_q} (\mathbb{D}_a \bmod \pi) \longrightarrow H_a \times_{\mathbb{D}_a} (\mathbb{D}_a \bmod \pi)$$

$\text{Fil } \mathbb{D}(\mathbb{H})[\frac{1}{\pi}] = (\rho_{H_a^*})^{-1} V(H_a)[\frac{1}{\pi}]$, où $\rho_{H_a^*}$ est l'isomorphisme

$$\mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{D}_a}[\frac{1}{\pi}] \xrightarrow{\sim} \text{Lie } E(H_a)[\frac{1}{\pi}]$$

induit par ρ_{H_a} via l'évaluation des cristaux sur l'épaississement $(\mathbb{D}_a \bmod \pi) \hookrightarrow \mathbb{D}_a$ et où $E(H_a)$ désigne la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle de H_a et $V(H_a)$ sa partie vectorielle.

III.5.2 Tiré en arrière de l'éclatement de l'espace projectif vers $\widetilde{\mathcal{Y}}_\infty$

Soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))}$ l'idéal admissible définissant l'éclatement précédent. Soit $h : \widetilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$ le morphisme défini précédemment. L'idéal

$$\mathcal{K}' = \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{Y}}_\infty} \cdot h^{-1} \mathcal{K}$$

vérifie

$$\exists N, \quad \pi^N \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{Y}}_\infty} \subset \mathcal{K}' \subset \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{Y}}_\infty}$$

Quitte à remplacer \mathcal{K}' par $\prod_{j=0}^{n-1} \Pi^j \mathcal{K}'$, on peut de plus supposer que \mathcal{K}' est tel que $\Pi^* \mathcal{K}' = \mathcal{K}'$. En effet, $\pi \in D^\times$ agit sur \mathcal{Y}_∞ comme $\pi \in \text{GL}_n(F)$, or \mathcal{K}' est $\text{GL}_n(F)$ -invariant. On fera cette hypothèse. De plus, le morphisme h étant $\text{GL}_n(F)$ -invariant cet idéal l'est. L'idéal \mathcal{K} étant cohérent et " $\text{GL}_n(F) \backslash \widetilde{\mathcal{Y}}_\infty$ " quasicompact au sens où $\exists \mathcal{V} \subset \widetilde{\mathcal{Y}}_\infty$ un ouvert quasicompact tel que $\widetilde{\mathcal{Y}}_\infty = \text{GL}_n(F) \cdot \mathcal{V}$, on en déduit

$$\exists k_0 \geq 2, \quad \exists \mathcal{K}'', \quad \pi^N \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{Y}}_{k_0}} \subset \mathcal{K}'' \subset \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{Y}}_{k_0}} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}' = \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{Y}}_\infty} \cdot \Pi_{\infty, k_0}^{-1} \mathcal{K}$$

où $\Pi_{\infty, k_0} : \widetilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \widetilde{\mathcal{Y}}_{k_0}$ et, de plus, on peut supposer que \mathcal{K}'' est $\text{GL}_n(F) \times D^\times$ -invariant.

Définition III.5.1. Pour tout $k \geq k_0$, on note $\tilde{\mathcal{Y}}_k$ le normalisé de l'éclatement formel admissible de l'idéal $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_k} \cdot \Pi_{k,k_0}^{-1} \mathcal{K}''$. On note

$$\tilde{\mathcal{Y}}_\infty = \varprojlim_{k \geq k_0} \tilde{\mathcal{Y}}_k$$

dans la catégorie des schémas formels π -adiques sur $\mathrm{Spf}(\hat{\mathcal{O}})$.

D'après les propriétés des idéaux données précédemment, l'action de

$$\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$$

s'étend à $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$. De plus, il y a un morphisme D^\times -équivariant et $\mathrm{GL}_n(F)$ -invariant

$$\xi : \tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \tilde{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$$

où D^\times -équivariant signifie que l'action à droite de D^\times à la source est transformée en l'action à gauche au but via $d \mapsto d^{-1}$.

Remarque III.5.2. D'après les résultats de l'appendice, on peut construire $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$ directement comme le normalisé dans sa fibre générique de l'éclatement formel admissible de l'idéal \mathcal{K}' dans $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$. Cela évite d'avoir à repasser en niveau fini, passage qui est donc en quelque sorte artificiel, d'après le corollaire D.7.11.

III.5.3 Relèvement vers la cellule

Pour tout j , $0 \leq j \leq n-1$, si $a = [\Lambda, M]$ est un sommet de l'immeuble tel que $[\mathcal{O}_D : M] \equiv j \pmod{n}$, on a donc un morphisme

$$\psi_a^{-1} \circ \xi : \xi^{-1}(\mathcal{W}) \cdot \Pi^{-j} \longrightarrow \mathbb{D}_a$$

où

$$\tilde{\mathcal{Y}}_\infty = \bigcup_{0 \leq j \leq n-1} \xi^{-1}(\mathcal{W}) \cdot \Pi^{-j}$$

III.6 Construction du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty$

III.6.1 Caractérisation modulaire de \mathfrak{X}_∞

Comme dans la section III.3.1, on montre la proposition suivante.

Proposition III.6.1. Soit $a = [\Lambda, M]$ et \mathbb{D}_a la cellule associée. Soit (H_a, ρ_a) la déformation universelle sur \mathbb{D}_a . Soit $\mathbb{D}_a = \mathrm{Spf}(A)$. On note encore H_a pour le groupe p -divisible sur $\mathrm{Spec}(A)$ associé au groupe p -divisible H_a sur $\mathrm{Spf}(A)$. Soit

Y_k le $\text{Spec}(A)$ -schéma représentant le faisceau $\underline{\text{Hom}}(\pi^{-k}\Lambda/\Lambda, H[\pi^k])$ (après choix d'une base de Λ , ce schéma est isomorphe à $H[\pi^k]^n$). Soit $U_k \subset Y_{k,\eta}$ l'ouvert/fermé du schéma étale fibre générique de Y_k défini par

$$\forall v \in \pi^{-k}\Lambda/\Lambda \setminus \{0\}, \quad \eta(v) \neq 0$$

où $\eta : \pi^{-k}\Lambda/\Lambda \longrightarrow H[\pi^k] \times_{\text{spec}(A)} Y_k$ désigne la section universelle. Alors, si $\text{Spec}(A_k)$ désigne l'adhérence schématique de U_k dans $Y_k^{\text{normalisé}}$, c'est-à-dire l'unique ouvert/fermé de $Y_k^{\text{normalisé}}$ induisant U_k en fibre générique, on a

$$\text{Spf}(A_k) \simeq \mathbb{D}_{a, Id + \pi^k \text{End}(\Lambda)}$$

Proposition III.6.2. Soit \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique sur $\text{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ tel que

- tout ouvert quasicompact de \mathfrak{Z} possède un nombre fini de composantes connexes
- $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ est intégralement fermé dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}]$.

Soit b un sommet de l'immeuble paramétrant les cellules de \mathfrak{X}_{∞} et $f : \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathbb{D}_b$ un morphisme. Soit (H, ρ) la déformation universelle sur \mathbb{D}_b . Soit

$$(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma(\mathfrak{Z}, \underline{\text{Hom}}(F/\mathcal{O}_F, f^*H)[\frac{1}{\pi}]^n)$$

tel que $\forall \mathcal{U} \subset \mathfrak{Z}$ un ouvert quasicompact, la famille (x_1, \dots, x_n) soit linéairement indépendante sur F dans le F -espace vectoriel

$$\Gamma(\mathfrak{Z}, \underline{\text{Hom}}(F/\mathcal{O}_F, f^*H)[\frac{1}{\pi}])$$

On peut alors construire naturellement un morphisme

$$\mathfrak{Z} \longrightarrow \prod_a \mathbb{D}_{a, \infty}$$

Démonstration. Soit $\text{Spf}(R) \subset \mathfrak{Z}$ un ouvert affine connexe. Soit H' le groupe p -divisible sur $\text{Spec}(R)$ associé au groupe p -divisible $f^*H \times_{\mathfrak{Z}} \text{Spf}(R)$. D'après le lemme III.3.6, $\text{Spec}(R[\frac{1}{\pi}])$ est connexe. Le n -uplet (x_1, \dots, x_n) induit donc une quasi-isogénie

$$(F/\mathcal{O}_F)^n \longrightarrow H' \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(R[\frac{1}{\pi}])$$

Il existe donc un unique réseau $\Lambda \subset F^n$ (le “module de Tate” à l'intérieur du “module de Tate rationnel”) tel que la quasi-isogénie composée

$$\delta : \Lambda \otimes F/\Lambda \longrightarrow (F/\mathcal{O}_F)^n \longrightarrow H' \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(R[\frac{1}{\pi}])$$

soit un isomorphisme. Alors δ induit un système compatible d'isomorphismes

$$\underline{\pi^{-k}\Lambda/\Lambda} \xrightarrow{\sim} H'[\pi^k] \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(R[\frac{1}{\pi}])$$

Si $b = [\Lambda_0, M_0]$, posons $a = [\Lambda, M_0]$. Il y a donc, d'après la proposition précédente un système compatible de morphismes

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{D}_{a, Id + \pi^{k+1} \text{End}(\Lambda)} \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 \text{Spf}(R) & \longrightarrow & \mathbb{D}_{a, Id + \pi^k \text{End}(\Lambda)} \\
 & & \downarrow
 \end{array}$$

D'où, puisque $\mathbb{D}_{a, \infty} = \varprojlim_k \mathbb{D}_{a, Id + \pi^k \text{End}(\Lambda)}$ dans la catégorie des schémas formels π -adiques, un morphisme

$$\text{Spf}(R) \longrightarrow \mathbb{D}_{a, \infty}$$

Il est facile de voir que ces différents morphismes se recollent en un morphisme de \mathfrak{Z} vers $\coprod_a \mathbb{D}_{a, \infty}$. \square

III.6.2 Sur la suite de Hodge-Tate en niveau infini

Comme précédemment pour G^\vee , on définit une application de Hodge-Tate pour G

$$\alpha_G : \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\infty} \longrightarrow \omega_{G^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\infty}$$

Proposition III.6.3. *Dans la suite de Hodge-Tate de G^\vee sur $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$*

$$\omega_{G^\vee}^* \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \xrightarrow{t\alpha_G} \text{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_F) \otimes \tilde{\mathcal{Y}}_\infty \xrightarrow{\alpha_{G^\vee}(-1)} \omega_G \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty}(-1)$$

on a $\alpha_{G^\vee}(-1) \circ t\alpha_G = 0$.

Démonstration. De la même façon que l'on a une décomposition

$$\alpha_{G^\vee} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \alpha_{G^\vee, j},$$

on a une décomposition

$$\alpha_G = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \alpha_{G, j}.$$

Il suffit alors de montrer que $\forall j, \alpha_{G^\vee, j}(-1) \circ t\alpha_{G, j} = 0$. La démonstration est alors identique à celle de la proposition III.3.8. \square

III.6.3 Construction d'éléments dans le module de Tate du groupe de Lubin-Tate universel tiré en arrière sur $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$

Notons pour abrégier $\tilde{\mathbb{P}} := \tilde{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$. Rappelons que pour $a = [\Lambda, M]$, ψ_a désigne le morphisme

$$\psi_a : \mathbb{D}_a \xrightarrow{\sim} \Pi^j \cdot \mathcal{W}$$

où $\mathcal{W} \subset \tilde{\mathbb{P}}$ et $j \equiv [\mathcal{O}_D : M] \bmod n$. Rappelons que l'on note

$$\xi : \tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \tilde{\mathbb{P}}$$

le morphisme construit dans la section III.4.3. Fixons j , $0 \leq j \leq n-1$, et a comme précédemment associé à j . On note

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j} = \xi^{-1}(\mathcal{W}) \cdot \Pi^{-j}$$

et

$$\xi_j : \tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j} \xrightarrow{\xi} \Pi^j \cdot \mathcal{W}$$

On note (H_a, ρ_{H_a}) la déformation universelle sur \mathbb{D}_a , ainsi que (G, ρ_G) celle sur \mathcal{Y} .

Les structures de niveau sur $(\mathcal{Y}_k)_{k \geq 1}$ définissent un morphisme associé à $1 \in \mathcal{O}_D$

$$F/\mathcal{O}_F \longrightarrow G \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{Y}_\infty$$

Notons

$$\mu : F/\mathcal{O}_F \longrightarrow G \times_{\mathcal{Y}} \tilde{\mathcal{Y}}_\infty$$

le morphisme associé sur $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$. Soit maintenant $\kappa \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H}^n)[\frac{1}{\pi}]$. On peut alors considérer le morphisme composé

$$\begin{array}{ccc} F/\mathcal{O}_F & \xrightarrow{\mu \bmod \pi} & G \times (\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j} \bmod \pi) \xrightarrow{\rho_G^{-1} \times Id} & \mathbb{G} \times (\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j} \bmod \pi) \\ & \searrow \nu & & \downarrow \kappa \times Id \\ & & & \mathbb{H}^n \times (\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j} \bmod \pi) \\ & & & \downarrow (\psi_a^{-1} \circ \xi_j)^* \rho_{H_a}^n \\ & & & (\psi_a^{-1} \circ \xi_j)^* H_a^n \bmod \pi \end{array}$$

où $\nu \in \Gamma(\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j}, \underline{\text{Hom}}(F/\mathcal{O}_F, (\psi_a^{-1} \circ \xi_j)^* H_a^n \bmod \pi)[\frac{1}{\pi}])$.

Théorème III.6.4. *Le morphisme ν se relève en caractéristique 0 :*

$$\nu \in \Gamma(\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j}, \underline{\text{Hom}}(F/\mathcal{O}_F, (\psi_a^{-1} \circ \xi_j)^* H_a^n)[\frac{1}{\pi}])$$

Démonstration. Comme dans la démonstration du théorème III.3.9, on applique le critère de relèvement de Messing. Considérons le morphisme composé de \mathcal{O} -modules π -divisibles

$$F/\mathcal{O}_F \xrightarrow{\mu \bmod \pi} G \times (\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \bmod \pi) \xrightarrow{\rho_G^{-1} \times Id} \mathbb{G} \times (\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \bmod \pi) \xrightarrow{\kappa \times Id} \mathbb{H}^n \times (\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \bmod \pi)$$

Le morphisme induit au niveau de l'évaluation des cristaux sur l'épaississement $(\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \bmod \pi \hookrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}_\infty)$ induit un élément

$$1 \longmapsto Y \in \mathbb{D}(\mathbb{H})^n \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right]$$

Soit $\text{Fil} \subset \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}$ la filtration définissant l'espace projectif. Étant donné que ψ_a est un modèle entier de l'application des périodes, on doit vérifier que

$$Y \in (\xi^* \text{Fil} \left[\frac{1}{\pi} \right])^n \subset \mathbb{D}(\mathbb{H})^n \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right]$$

Rappelons que l'application de Hodge-Tate

$$\alpha_G : \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \longrightarrow \omega_{G^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty}$$

est telle que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] & \xrightarrow{\alpha_G} \omega_{G^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] \hookrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] & \xrightarrow{\kappa_* \otimes Id} \mathbb{D}(\mathbb{H})^n \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] \\ 1 \otimes 1 \longmapsto & \xrightarrow{\hspace{15em}} & Y \end{array}$$

Écrivons $Y = (Y_i)_{1 \leq i \leq n}$, $Y_i \in \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right]$. Rappelons qu'on identifie $\mathbb{D}(\mathbb{H})$ à $\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathcal{O}_D, \mathbb{D}(\mathbb{H}))$ (cf. section III.4.3.1) et qu'alors d'après la suite précédente

$$Y_i = {}^t \alpha_G(\gamma_i)$$

où ${}^t \alpha_G$ désigne $\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\alpha_G, \mathbb{D}(\mathbb{H}))$, le transposé relativement à la dualité

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(-, \mathbb{D}(\mathbb{H})),$$

et

$$\begin{array}{ccc} \omega_{G^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] \hookrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] & \xrightarrow{\kappa_* \otimes Id} & \mathbb{D}(\mathbb{H})^n \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] \\ & \searrow \gamma_i & \downarrow pr_i \\ & & \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] \end{array}$$

Donc, d'après la remarque III.4.13, si $\delta_i \in \omega_{G^\vee, n-1}^* \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}$
 $= \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\omega_{G^\vee}, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}) \left[\frac{1}{\pi} \right]$ est la forme linéaire

$$\begin{array}{ccc} \omega_{G^\vee, n-1} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] \hookrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{n-1} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] & \xrightarrow{\kappa_* \otimes Id} & \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}^n \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] \\ & \searrow \delta_i & \downarrow pr_i \\ & & \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] \end{array}$$

on a, avec les notations de la section III.4.3.2,

$$Y_i = (({}^t\alpha_{G,n-1}) \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1})(\delta_i)$$

Le théorème est donc une conséquence de la proposition III.6.3. \square

Proposition III.6.5. *La construction précédente définit un morphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H}^n)[\frac{1}{\pi}] \longrightarrow \Gamma(\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j}, \underline{\mathrm{Hom}}(F/\mathcal{O}_F, (\psi_a^{-1} \circ \xi_j)^* H_a)[\frac{1}{\pi}])^n$$

Si $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ correspond à $\Delta^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H}^n)[\frac{1}{\pi}]$, alors pour tout ouvert quasicompact \mathcal{U} de $\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j}$, les éléments $(\nu_{1|\mathcal{U}}, \dots, \nu_{n|\mathcal{U}})$ sont linéairement indépendants dans le F -espace vectoriel $\mathrm{Hom}(F/\mathcal{O}_F, (\psi_a^{-1} \circ \xi_{j|\mathcal{U}})^* H_a)[\frac{1}{\pi}]$.

Démonstration. Pour démontrer l'indépendance linéaire, on procède par spécialisation afin de se ramener au cas d'un point. Soit donc \mathcal{U} comme dans l'énoncé. On peut supposer $\mathcal{U} = \mathrm{Spf}(R)$. La $\check{\mathcal{O}}$ -algèbre R étant π -adique sans π -torsion, il existe un corps valué complet K pour une valuation de rang 1 étendant celle de \check{F} et un morphisme continu $R \longrightarrow \mathcal{O}_K$ (utiliser le théorème 1.2.1 p.13 de [1] appliqué à l'algèbre de Banach $R[\frac{1}{\pi}]$). Soit $\theta : \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathrm{Spf}(R) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j}$. Il suffit alors de montrer l'indépendance linéaire de $(\theta^*\nu_1, \dots, \theta^*\nu_n)$. Mais cela est fait dans la section II.9.1. \square

III.6.4 Construction du morphisme de $\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty}$ vers \mathfrak{X}_{∞}

Comme dans la section III.3.6 on montre la proposition suivante.

Proposition III.6.6. *Soit G le \mathcal{O}_D -module formel universel sur $\hat{\Omega}$. Soit $C \subset \mathcal{O}_D^{\times}$ un sous-groupe ouvert, $U \subset \Omega_C$ un ouvert admissible non-vide et $\bar{s} \in U(\bar{F})$. Alors le sous-groupe de monodromie arithmétique image de*

$$\pi_1(U, \bar{s}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_D}(T_p(G)) \simeq \mathcal{O}_D^{\mathrm{opp}\times}$$

est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{O}_D^{\mathrm{opp}\times}$. Donc, si $\Pi_{C',C} : \Omega_{C'} \longrightarrow \Omega_C$, l'ensemble $\varprojlim_{C' \subset C} \pi_0(\Pi_{C',C}^{-1}(U))$ est fini.

Corollaire III.6.7. *Tout ouvert quasicompact de $\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty}$ possède un nombre fini de composantes connexes et, de plus, $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty}}$ est intégralement fermé dans $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty}}[\frac{1}{\pi}]$.*

Soit j , $0 \leq j \leq n-1$, et b un sommet de l'immeuble associé à j c'est-à-dire tel que si $b = [\Lambda, \Pi^k \mathcal{O}_D]$, alors $k \equiv j \pmod{n}$. D'après le corollaire précédent, la proposition III.6.5 et la proposition III.6.2, on peut construire un morphisme

$$\omega_j : \tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j} \longrightarrow \prod_a \mathbb{D}_{\infty,a}$$

dont on vérifie aussitôt qu'il ne dépend pas du choix fait de b . Il est également aisé de vérifier que ce morphisme est $\mathrm{GL}_n(F)$ -équivariant, où l'action à gauche de $\mathrm{GL}_n(F)$ sur $\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j}$ est transformée en celle à droite sur $\coprod_a \mathbb{D}_{\infty,a}$, via $g \mapsto {}^t g$.

Proposition III.6.8. *Pour j_1, j_2 , le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
 & \coprod_a \mathbb{D}_{\infty,a} & \\
 \omega_{j_1} \nearrow & & \searrow \\
 \tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j_1} \cap \tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j_2} & & \mathfrak{X}_{\infty} \\
 \omega_{j_2} \searrow & & \nearrow \\
 & \coprod_a \mathbb{D}_{\infty,a} &
 \end{array}$$

Démonstration. Soient $0 \leq j_1 < j_2 \leq n-1$. Avec les notations du premier chapitre, on a pour b_1 associé à j_1 et b_2 associé à j_2

$$\begin{array}{ccc}
 \partial_{j_2-j_1} \mathbb{D}_{b_1} & \xrightarrow{\psi_{b_1}} & \\
 \simeq \searrow & & \Pi^{j_1} \mathcal{W} \cap \Pi^{j_2} \mathcal{W} \\
 \partial_{j_2-j_1} \mathbb{D}_{b_2} & \xrightarrow{\psi_{b_2}} & \\
 \simeq \nearrow & &
 \end{array}$$

Il est aisé d'en déduire qu'il y a des factorisations

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j_1} \cap \tilde{\mathcal{Y}}_{\infty,j_2} & \xrightarrow{\omega_{j_1}} & \coprod_{a \rightarrow a'} \mathbb{D}_{\infty,a \rightarrow a'} & \xrightarrow{\omega_{j_2}} & \coprod_a \mathbb{D}_{\infty,a} \\
 & & & \xrightarrow{\omega_{j_2}} & \\
 & & & \xrightarrow{\omega_{j_1}} &
 \end{array}$$

□

Il y a donc un morphisme $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariant

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{\infty} \longrightarrow \mathfrak{X}_{\infty}$$

où l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ est transformée via $g \mapsto {}^t g$ et celle de D^\times via $d \mapsto d^{-1}$.

III.7 Construction de l'isomorphisme

Nous utiliserons maintenant les résultats de l'appendice afin de ne pas avoir à passer en niveau fini à chaque fois que l'on veut éclater un idéal, ce qui deviendrait rapidement inextricable, comme l'auteur a pu le vérifier en tentant de rédiger cette section sans les résultats de l'appendice.

III.7.1 De nouveaux éclatements

On a construit dans les sections précédentes un diagramme $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariant de morphismes de schémas formels π -adiques sur $\mathrm{Spf}(\hat{\mathcal{O}})$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{X}}_\infty & & \tilde{\mathfrak{Y}}_\infty \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ \mathfrak{X}_\infty & & \mathfrak{Y}_\infty \end{array}$$

Rappelons que $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty$ n'est pas vraiment un éclatement formel admissible d'un idéal de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\infty}$, mais plutôt d'une famille d'idéaux. Plus précisément,

$$\mathfrak{X}_\infty = \bigcup_a \mathbb{D}_{a,\infty}$$

et pour tout a , il y a un idéal admissible $\mathfrak{I}_a \subset \mathcal{O}_{\mathbb{D}_{a,\infty}}$ tel que

- $\forall (g, d) \in \mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$, $(g, d)^* \mathfrak{I}_{(g,d).a} = \mathfrak{I}_a$
- $\forall a, a'$, $\mathfrak{I}_{a'}|_{\mathbb{D}_{a',\infty} \cap \mathbb{D}_{a,\infty}}$ devient localement libre de rang un sur l'éclaté formel admissible de \mathfrak{I}_a dans $\mathbb{D}_{a',\infty} \cap \mathbb{D}_{a,\infty}$ (mais en général $\mathfrak{I}_{a'}|_{\mathbb{D}_{a',\infty} \cap \mathbb{D}_{a,\infty}} \neq \mathfrak{I}_a|_{\mathbb{D}_{a',\infty} \cap \mathbb{D}_{a,\infty}}$)
- $\tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty}$ est le normalisé dans sa fibre générique de l'éclatement formel admissible de \mathfrak{I}_a .

Notons

$$f : \tilde{\mathfrak{Y}}_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty$$

Notons pour tout a

$$\mathcal{V}_a = f^{-1}(\mathbb{D}_{a,\infty}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}_a = \mathcal{O}_{\mathcal{V}_a} \cdot f^{-1} \mathfrak{I}_a$$

un idéal admissible de $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_a}$. Soit $\tilde{\mathcal{V}}_a$ le normalisé dans sa fibre générique de l'éclatement formel admissible de \mathfrak{I}_a . Pour tout couple a, a' , l'idéal $\mathfrak{I}_{a'}|_{\mathcal{V}_{a'} \cap \mathcal{V}_a}$ devient localement libre de rang 1 sur $\tilde{\mathcal{V}}_a$. Les $\tilde{\mathcal{V}}_a$ se recollent donc (utiliser la propriété universelle des normalisations dans la fibre générique/éclatements formels admissibles, cf. appendice) en un schéma formel

$$\tilde{\mathfrak{Y}}_\infty^{(3)} = \bigcup_a \tilde{\mathcal{V}}_a$$

qui est $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariant. De plus, il y a un morphisme équivariant

$$\tilde{\mathfrak{Y}}_\infty^{(3)} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{X}}_\infty$$

Dans l'autre sens, soit

$$h : \tilde{\mathfrak{X}}_\infty \longrightarrow \mathcal{Y}_\infty$$

Il existe un idéal admissible $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -invariant $\mathfrak{J} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\infty}$ tel que $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$ soit le normalisé dans sa fibre générique de l'éclatement formel admissible de \mathfrak{J} dans \mathcal{Y}_∞ . Soit $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty^{(2)}$ le normalisé dans sa fibre générique de l'idéal admissible $\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}_\infty} \cdot f^{-1}\mathfrak{J}$. Il est muni d'une action de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ et il y a, de plus, un morphisme équivariant

$$\tilde{\mathfrak{X}}_\infty^{(2)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}_\infty$$

On a donc un nouveau diagramme au-dessus du précédent

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{X}}_\infty^{(2)} & & \tilde{\mathcal{Y}}_\infty^{(3)} \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \tilde{\mathfrak{X}}_\infty & & \tilde{\mathcal{Y}}_\infty \end{array}$$

Mais, si $h' : \tilde{\mathfrak{X}}_\infty^{(2)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}_\infty^{(3)}$, on a un diagramme pour tout a

$$\begin{array}{ccc} h'^{-1}(\mathcal{V}_a) & & \\ \downarrow & \searrow h' & \\ \tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty} & & \mathcal{V}_a \\ \downarrow & \swarrow f & \\ \mathbb{D}_{a,\infty} & & \end{array}$$

et donc l'image réciproque à $h'^{-1}(\mathcal{V}_a)$ par h' de l'idéal \mathfrak{J}_a , $\mathcal{O}_{h'^{-1}(\mathcal{V}_a)} \cdot h'^{-1}\mathfrak{J}_a$ est localement libre de rang 1 sur $h'^{-1}(\mathcal{V}_a)$, puisque c'est le cas sur $\tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty}$ (on utilise toujours le fait que sur un schéma formel π -adique sans π -torsion, un idéal admissible est localement libre de rang 1 ssi il est localement monogène). Donc, d'après la propriété universelle du "normalisé dans la fibre générique/éclaté", le morphisme h' se relève à $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty^{(3)}$. De la même façon on relève le morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty^{(3)} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{X}}_\infty$ à $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty^{(2)}$.

On obtient donc, au final, un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{X}}_\infty^{(2)} & \rightleftarrows & \tilde{\mathcal{Y}}_\infty^{(3)} \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \tilde{\mathfrak{X}}_\infty & & \tilde{\mathcal{Y}}_\infty \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ \mathfrak{X}_\infty & & \mathcal{Y}_\infty \end{array}$$

Le but des sections qui suivent est maintenant de démontrer le théorème suivant.

Théorème III.7.1. *Les deux morphismes $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty^{(2)} \rightleftarrows \tilde{\mathfrak{Y}}_\infty^{(3)}$ sont inverses l'un de l'autre et fournissent donc un isomorphisme équivariant entre $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty^{(2)}$ et $\tilde{\mathfrak{Y}}_\infty^{(3)}$.*

III.7.2 Retour aux suites de Hodge-Tate en niveau infini

Nous allons améliorer les résultats précédents d'exactitude des suites de Hodge-Tate en niveau infini.

Lemme III.7.2. *Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé et $u : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ un morphisme de \mathcal{O}_X -modules localement libres de rang r . Soit $t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.*

- Si $\text{coker } u$ est annulé par t , alors $\text{coker}(\det u)$ est annulé par t^r
- Si $\text{coker}(\det u)$ est annulé par t , alors $\text{coker } u$ est annulé par t et, localement sur X , il existe un morphisme v

$$\mathcal{E}_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{v} \\ \xrightarrow{u} \end{array} \mathcal{E}_2$$

tel que $u \circ v = t$.

Théorème III.7.3. *Soit $K|F$ un corps valué complet pour une valuation de rang 1 étendant celle de F . Soit H_0 un \mathcal{O} -module π -divisible sur \mathcal{O}_K . Dans la suite de Hodge-Tate*

$$\omega_{H_0}^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}(1) \xrightarrow{t\alpha_{H_0}^\vee(1)} T_p(H) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\alpha_{H_0}} \omega_{H_0}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

on a : $\ker \alpha_{H_0} / \text{Im } t\alpha_{H_0}^\vee(1)$ est annulé par π^{n-1} .

Démonstration. On renvoie au chapitre II. □

On reprend maintenant les notations de la section III.2.

Proposition III.7.4. *Soit $a = [\Lambda, M]$ un sommet de l'immeuble paramétrant les cellules de \mathfrak{X}_∞ et $\widetilde{\mathbb{D}}_\infty := \widetilde{\mathbb{D}}_{a,\infty}$ la cellule éclatée en niveau infini. Soit la suite de Hodge-Tate sur $\widetilde{\mathbb{D}}_\infty$*

$$\omega_{H^\vee}^* \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty} \xrightarrow{t\alpha_H} \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty} \xrightarrow{\alpha_{H^\vee}(-1)} \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty}(-1)$$

Alors $\ker(t\alpha_H) / \text{Im}(\alpha_{H^\vee}(-1))$ est annulé par π^{n-1} .

De plus, localement sur $\widetilde{\mathbb{D}}_\infty$, il y a un morphisme β

$$\omega_{H^\vee}^* \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty} \begin{array}{c} \xleftarrow{\beta} \\ \xrightarrow{t\alpha_H} \end{array} \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty}$$

tel que $t\alpha_H \circ \beta = \pi^{n-1}$ et $\beta \circ t\alpha_H = \pi^{n-1}$.

Démonstration. On sait, par construction de $\widetilde{\mathbb{D}}_\infty$, que $\text{Im}(\alpha_{H^\vee}(-1))$ est localement libre de rang 1. On en déduit aisément que $\ker(\alpha_{H^\vee}(-1))$ est localement libre de rang $n-1$. D'après la proposition III.3.8, il y a un morphisme

$$u : \omega_{H^\vee}^* \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty} \xrightarrow{t\alpha_H} \ker(\alpha_{H^\vee}(-1))$$

Intéressons-nous à $\det u = \wedge^{n-1} u$. Localement sur un ouvert quasicompact \mathcal{U} de $\widetilde{\mathbb{D}}_\infty$, $\det u$ est donné par une fonction $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty})$. Soit $x \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$, $x : \text{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) \rightarrow \mathcal{U}$. Étant donné que la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(\alpha_{H^\vee}) \longrightarrow \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty} \xrightarrow{\alpha_{H^\vee}} \text{Im}(\alpha_{H^\vee}(-1))(-1)$$

est localement scindée, on en déduit que $\ker(\alpha_{x^*H^\vee}(-1)) = x^* \ker(\alpha_{H^\vee})$ et donc, d'après le théorème III.7.3 couplé au premier point du lemme III.7.2,

$$|f(x)| \geq |\pi^{n-1}|$$

Du lemme qui suit on en déduit que $\pi^{n-1} \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}.f$ et on conclut grâce au second point du lemme III.7.2. \square

Lemme III.7.5. *Soit \mathcal{U} un ouvert quasicompact de $\widetilde{\mathbb{D}}_\infty$, $\alpha \in \mathbb{N}$ et $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty})$ tel que $\forall x \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$, $|f(x)| \geq |\pi^\alpha|$. Alors $\pi^\alpha \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}.f$.*

Démonstration. L'ouvert \mathcal{U} étant quasicompact, il existe $k \geq 3$ ainsi qu'un ouvert $\mathcal{V} \subset \widetilde{\mathbb{D}}_k$ et $g \in \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_k})$ tels que l'image réciproque de \mathcal{V} en niveau infini soit \mathcal{U} et $f \equiv g \pmod{\pi^{\alpha+1}}$. L'application $\mathcal{U}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ est surjective (on a $\mathcal{V}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) = \mathcal{V}^{\text{rig}}(\mathbb{C}_p)$ et, revenant à l'interprétation modulaire de $\mathbb{D}_\infty^{\text{rig}}$, on peut toujours prolonger une structure de niveau finie en une infinie sur \mathbb{C}_p). Par hypothèse, on a donc

$$\forall x \in \mathcal{V}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}), |g(x)| \geq |\pi^\alpha|$$

Mais, \mathcal{V} étant normal, on en déduit que $\pi^\alpha \in (g)$ et donc $\pi^\alpha \in (f, \pi^{\alpha+1})$, ce qui implique $\pi^\alpha \in (f)$, puisque $\widetilde{\mathbb{D}}_\infty$ est π -adique. \square

Corollaire III.7.6. *La suite*

$$0 \longrightarrow \omega_{H^\vee}^* \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] \xrightarrow{t\alpha_H} \Lambda^* \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right] \xrightarrow{\alpha_{H^\vee}(-1)} \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty} \left[\frac{1}{\pi} \right](-1) \longrightarrow 0$$

est exacte localement scindée. De plus, le conoyau du morphisme

$$\alpha_H : \Lambda \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty} \longrightarrow \omega_{H^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{D}}_\infty}$$

est annulé par π^{n-1} .

De la même façon, on montre, avec les notations de la proposition III.6.3, la proposition qui suit.

Proposition III.7.7. *Dans la suite de Hodge-Tate de G^\vee sur $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$*

$$\omega_{G^\vee}^* \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \xrightarrow{t\alpha_G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_F) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \xrightarrow{\alpha_{G^\vee}(-1)} \omega_G \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty}(-1)$$

on a: $\ker(\alpha_{G^\vee}(-1))/\mathrm{Im}(t\alpha_G)$ est annulé par π^{n-1} et il existe un morphisme $\beta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_F) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty} \rightarrow \omega_{G^\vee}^* \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty}$ tel que $t\alpha_G \circ \beta = \pi^{n-1}$ et $\beta \circ t\alpha_G = \pi^{n-1}$.
La suite

$$\omega_{G^\vee}^* \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty}[\frac{1}{\pi}] \xrightarrow{t\alpha_G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_F) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty}[\frac{1}{\pi}] \xrightarrow{\alpha_{G^\vee}(-1)} \omega_G \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}_\infty}[\frac{1}{\pi}](-1)$$

est exacte localement scindée.

III.7.3 Démonstration du théorème principal

III.7.3.1 La composée $\tilde{\mathcal{X}}_\infty^{(2)} \rightarrow \tilde{\mathcal{Y}}_\infty^{(3)} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}_\infty^{(2)}$ est l'identité. Nous utiliserons constamment les deux faits suivants:

- Soient \mathfrak{Z} et \mathfrak{X} deux schémas formels π -adiques sans π -torsion. Soit $\tilde{\mathfrak{Z}} \xrightarrow{p} \mathfrak{Z}$ un éclatement formel admissible. Soient $\mathfrak{X} \begin{matrix} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{matrix} \tilde{\mathfrak{Z}}$ deux morphismes tels que $p \circ f_1 = p \circ f_2$. Alors $f_1 = f_2$.
- Soit \mathfrak{X} π -adique sans π -torsion. Deux morphismes $\mathfrak{X} \rightrightarrows \hat{\mathbb{P}}^n$ sont égaux ssi les morphismes associés le sont après inversion de π . Plus précisément, si

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{L}_1 \\ & \nearrow & \\ \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^n & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{L}_2 \end{array}$$

correspond à nos deux morphismes alors ceux-ci sont égaux ssi $\exists u$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{L}_1[\frac{1}{\pi}] \\ & \nearrow & \\ (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{\pi}])^n & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{L}_2[\frac{1}{\pi}] \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow u \simeq \\ \downarrow \end{array}$$

Soit $a = [\Lambda, M]$ un sommet de l'immeuble paramétrant les cellules de \mathfrak{X}_∞ . Soit $\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)} := \mathbb{D}_{a,\infty}^{(2)}$ l'image réciproque de $\tilde{\mathbb{D}}_{a,\infty}^{(2)}$ dans $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty^{(2)}$. Commençons par montrer

que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)} & \hookrightarrow & \tilde{\mathfrak{X}}_\infty^{(2)} & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{Y}}_\infty^{(3)} \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 \mathbb{D}_\infty & & & & \tilde{\mathfrak{Y}}_\infty \\
 \downarrow & & \swarrow & & \\
 \tilde{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H})) & & & &
 \end{array}$$

où le morphisme $\mathbb{D}_\infty \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$ est celui noté ψ_a dans la section III.5.1. Il suffit de montrer que le diagramme qui suit est commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)} & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{Y}}_\infty \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \hat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H})) & \longleftarrow & \tilde{\mathfrak{Y}}_\infty
 \end{array}$$

Avec les notations des sections précédentes, le morphisme composé

$$\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{Y}}_\infty \longrightarrow \tilde{\mathfrak{Y}}_\infty \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$$

est obtenu à partir de l'application de Hodge-Tate de G tiré en arrière sur $\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{G^\vee, n-1} \otimes Id &: \underbrace{\text{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_D, \check{\mathcal{O}})_{n-1} \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1}}_{\mathbb{D}(\mathbb{H})} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}\left[\frac{1}{\pi}\right] \\
 &\longrightarrow \omega_{G, n-1} \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{n-1} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}\left[\frac{1}{\pi}\right]
 \end{aligned}$$

Mais d'après la remarque III.4.13 et la proposition III.7.7, le noyau de l'application précédente est obtenu en appliquant $\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(-, \mathbb{D}(\mathbb{H}))$ à

$$\alpha_G : \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}\left[\frac{1}{\pi}\right] \longrightarrow \omega_{G^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}\left[\frac{1}{\pi}\right]$$

via $\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathcal{O}_D, \mathbb{D}(\mathbb{H})) \simeq \mathbb{D}(\mathbb{H})$. Mais, si H désigne le groupe de Lubin-Tate universel sur $\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}$, l'image de la composée

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}\left[\frac{1}{\pi}\right] &\xrightarrow{\alpha_G} \omega_{G^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}\left[\frac{1}{\pi}\right] \xrightarrow{\rho_{G^*}^{-1}} \mathbb{D}(G) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}\left[\frac{1}{\pi}\right] \xrightarrow{\Delta_*^{-1}} \mathbb{D}(\mathbb{H})^n \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}\left[\frac{1}{\pi}\right] \\
 1 \otimes 1 &\longrightarrow \longrightarrow (x_1, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

est telle que si

$$\alpha_H : \Lambda \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}[\frac{1}{\pi}] = \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}[\frac{1}{\pi}]^n \longrightarrow \omega_{H^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}[\frac{1}{\pi}] \xrightarrow{\rho_{H^*}^{-1}} \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}[\frac{1}{\pi}]$$

alors $\text{Im } \alpha_H = \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}[\frac{1}{\pi}]x_1 + \cdots + \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}[\frac{1}{\pi}]x_n$. Cela découle en effet de ce que modulo π , les éléments du module de Tate de H et G sont reliés par (en notations abrégées)

$$F/\mathcal{O}_F \longrightarrow H^n \bmod \pi \xrightarrow{\rho_H^{-1}} \mathbb{H}^n \xrightarrow{\Delta} \mathbb{G} \xrightarrow{\rho_G} G \bmod \pi$$

où $F/\mathcal{O}_F \longrightarrow H^n \bmod \pi$ fournit l'identification du module de Tate de H avec F^n et la composée $F/\mathcal{O}_F \longrightarrow G \bmod \pi$ fournit l'élément $1 \in \mathcal{O}_D$ associé à l'identification du module de Tate de G avec D .

Appliquant maintenant $\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(-, \mathbb{D}(\mathbb{H}))$ à

$$\mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}[\frac{1}{\pi}] \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})^n \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}[\frac{1}{\pi}]$$

on en déduit aisément que la filtration de $\mathbb{D}(\mathbb{H})$ associée à la composée

$$\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$$

est donnée par $\text{Im } (\alpha_H)$. Mais, d'après le corollaire III.7.6, $\text{Im } (\alpha_H)$ coïncide avec $\omega_{G^\vee} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)}}[\frac{1}{\pi}]$, qui définit la filtration associée au morphisme $\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)} \longrightarrow \mathbb{D} \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$. On a donc bien montré que le diagramme voulu de morphismes vers $\tilde{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$ est commutatif.

Reste à voir que le morphisme $\mathbb{D}_\infty^{(2)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}_\infty \longrightarrow \tilde{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$ relevé à \mathfrak{X}_∞ , grâce au éléments du module de Tate de H construits dans la section III.5, coïncide avec la projection $\tilde{\mathbb{D}}_\infty^{(2)} \longrightarrow \mathbb{D}_\infty \subset \mathfrak{X}_\infty$. Mais c'est une conséquence immédiate de ce que ces éléments du module de Tate coïncident modulo π puisque, modulo π , les constructions des sections III.3.4 et III.6.3 sont inverses l'une de l'autre.

III.7.3.2 La composée $\tilde{\mathcal{Y}}^{(3)} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{X}}^{(2)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}^{(3)}$ est l'identité. La méthode de démonstration est identique à celle de la section précédente. On démontre grâce aux résultats de la section III.7.2, que deux morphismes $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty^{(3)} \rightrightarrows \hat{\Omega}$ coïncident. Puis, comme précédemment, on constate que les relèvements associés vers \mathcal{Y}_∞ coïncident.

Annexe D

Compléments sur les schémas formels π -adiques

On fixe $\check{\mathcal{O}}$ un anneau de valuation complet de hauteur 1 et π un élément de $\check{\mathcal{O}}$ de valuation strictement positive. On note k le corps résiduel de $\check{\mathcal{O}}$. Tous les schémas formels considérés seront supposés quasi-séparés. On pourra consulter le chapitre IV pour plus de détails sur les schémas formels π -adiques, nous ne traitons ici que ce dont nous avons besoin pour le chapitre III.

D.1 Quelques lemmes d'algèbre π -adique

Si R est une $\check{\mathcal{O}}$ -algèbre, on note \widehat{R} le complété π -adique de R . Si R est une $\check{\mathcal{O}}$ -algèbre sans π -torsion, on note \overline{R} la fermeture intégrale de R dans $R[\frac{1}{\pi}]$.

Nous utiliserons constamment le lemme suivant, dont la démonstration ne pose pas de problème.

Lemme D.1.1. *Soit R une $\check{\mathcal{O}}$ -algèbre sans π -torsion. Alors,*

- \widehat{R} est sans π -torsion
- soit $\alpha : R[\frac{1}{\pi}] \longrightarrow \widehat{R}[\frac{1}{\pi}]$, alors $\overline{R} = \alpha^{-1}(\widehat{\overline{R}})$
- si R est intégralement fermé dans $R[\frac{1}{\pi}]$, alors \widehat{R} est intégralement fermé dans $\widehat{R}[\frac{1}{\pi}]$
- si R s'écrit comme une limite inductive filtrante $R = \varinjlim_i R_i$, où les $(R_i)_i$ sont des $\check{\mathcal{O}}$ -algèbres sans π -torsion telle que $\forall i, R_i$ soit intégralement fermé dans $R_i[\frac{1}{\pi}]$, alors R est intégralement fermé dans $R[\frac{1}{\pi}]$.

Corollaire D.1.2. *Soit R une $\check{\mathcal{O}}$ -algèbre sans π -torsion. Alors, canoniquement,*

$$\widehat{\widehat{R}} = \widehat{\overline{R}}$$

Démonstration. Le morphisme $R \longrightarrow \widehat{R}$ induit par application de $\widehat{(-)}$ un morphisme $\widehat{\widehat{R}} \longrightarrow \widehat{\widehat{R}}$. Dans l'autre sens, le morphisme $R \longrightarrow \overline{R}$ induit par complétion $\widehat{R} \longrightarrow \widehat{\overline{R}}$. Mais, d'après le lemme précédent, $\widehat{\overline{R}}$ est intégralement fermé dans $\widehat{\overline{R}}[\frac{1}{\pi}]$, donc le morphisme précédent se prolonge en un morphisme $\widehat{\overline{R}} \longrightarrow \widehat{\overline{R}}$. Par complétion π -adique, ce morphisme induit un morphisme $\widehat{\widehat{R}} \longrightarrow \widehat{\widehat{R}}$. On vérifie que les deux morphismes précédents sont inverses l'un de l'autre. \square

Remarque D.1.3. Dans le lemme et corollaire précédents, on ne suppose pas que R est séparé pour la topologie π -adique. De plus, même si R est π -adique, en général \overline{R} n'est pas forcément séparé.

D.2 Rappels sur les schémas formels π -adiques

Définition D.2.1. On appelle schéma formel π -adique (sous-entendu sur $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$) un schéma formel \mathfrak{Z} sur $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ tel que $\pi\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ soit un idéal de définition de \mathfrak{Z} . La catégorie des schémas formels π -adiques est donc équivalente à la 2-limite projective de la catégorie fibrée des schémas sur $(\mathrm{Spec}(\check{\mathcal{O}}/\pi^k\check{\mathcal{O}}))_{k \geq 1}$. Cela signifie que se donner un schéma formel π -adique est équivalent à se donner une famille $(Z_k)_{k \geq 1}$, où Z_k est un $\mathrm{Spec}(\check{\mathcal{O}}/\pi^k\check{\mathcal{O}})$ -schéma, munie d'isomorphismes $Z_{k+1} \otimes \check{\mathcal{O}}/\pi^k\check{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} Z_k$ satisfaisant une condition de cocycle évidente (un schéma formel π -adique n'est rien d'autre qu'un cas particulier d'ind-schéma).

Pour \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique, on note $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}]$ le faisceau associé au préfaisceau $\mathfrak{U} \mapsto \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{U})[\frac{1}{\pi}]$. Cela signifie que pour \mathfrak{U} un ouvert quasicompact $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}]) = \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})[\frac{1}{\pi}]$.

Exemple D.2.2. Si $\mathfrak{Z} = \coprod_{\mathbb{N}} \mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$, alors $\Gamma(\mathfrak{Z}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})[\frac{1}{\pi}] = (\check{\mathcal{O}}^{\mathbb{N}})[\frac{1}{\pi}] \subsetneq \check{\mathcal{O}}[\frac{1}{\pi}]^{\mathbb{N}} = \Gamma(\mathfrak{Z}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}])$.

Définition D.2.3. On dit que \mathfrak{Z} est sans π -torsion si le faisceau $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ l'est, c'est-à-dire $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \xrightarrow{\times \pi} \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ est un monomorphisme.

Lemme D.2.4. Le schéma formel π -adique \mathfrak{Z} est sans π -torsion ssi il possède un recouvrement affine $(\mathrm{Spf}(R_i))_{i \in I}$ tel que $\forall i, R_i$ soit sans π -torsion.

D.3 Morphismes affines

Définition D.3.1. Un morphisme de schémas formels π -adiques $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ est dit affine si le morphisme de schémas induit entre les fibres spéciales $\mathfrak{X} \otimes k \longrightarrow \mathfrak{Y} \otimes k$ l'est, ou encore, de façon équivalente, si $\forall k$, le morphisme de schémas induit $\mathfrak{X} \otimes \check{\mathcal{O}}/\pi^k\check{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathfrak{Y} \otimes \check{\mathcal{O}}/\pi^k\check{\mathcal{O}}$ l'est.

Ainsi, si \mathfrak{X} est un schéma formel π -adique, la catégorie des \mathfrak{X} -schémas formels π -adiques finis est équivalente à la catégories des faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algèbres \mathcal{A} tels que l'application canonique $\mathcal{A} \longrightarrow \varprojlim_k \mathcal{A}/\pi^k \mathcal{A}$ est un isomorphisme et $\forall k, \mathcal{A}/\pi^k \mathcal{A}$ est une $\mathcal{O}_{\mathfrak{X} \otimes \check{\mathcal{O}}/\pi^k \check{\mathcal{O}}}$ -algèbre quasi-cohérente.

D.4 Limite projective dans la catégorie des schémas formels π -adiques

Proposition D.4.1. *Soit (I, \geq) un ensemble ordonné filtrant décroissant et*

$$((\mathfrak{Z}_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i \geq j})$$

un système projectif de schémas formels π -adiques tel que les morphismes de transition φ_{ij} soient affines. Alors $\varprojlim_{i \in I} \mathfrak{Z}_i$ existe dans la catégorie des $\text{spf}(\check{\mathcal{O}})$ -schémas formels et c'est un schéma formel π -adique égal à

$$\varprojlim_{k \in \mathbb{N}} \varprojlim_{i \in I} (\mathfrak{Z}_i \otimes \check{\mathcal{O}}/\pi^k \check{\mathcal{O}})$$

Démonstration. La démonstration ne pose pas de problème. On renvoie au chapitre 8 de EGA IV pour les limites projectives de schémas à morphismes de transition affines. \square

D.5 Normalisation dans la fibre générique

Définition D.5.1. Pour un schéma formel π -adique sans π -torsion \mathfrak{Z} , on dit que $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ est intégralement fermé dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}]$, si pour tout ouvert \mathfrak{U} , $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})$ est intégralement fermé dans $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}])$. Cela est équivalent à dire que $\forall z \in \mathfrak{Z}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}, z}$ est intégralement fermé dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}, z}[\frac{1}{\pi}]$ ou bien encore que pour tout ouvert quasi-compact \mathfrak{U} , $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})$ est intégralement fermé dans $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})[\frac{1}{\pi}]$.

Lemme D.5.2. *Soit \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique sans π -torsion. Alors $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ est intégralement fermé dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}]$ ssi il existe un recouvrement affine $(\text{Spf}(R_i))_i$ de \mathfrak{Z} tel que $\forall i, R_i$ est intégralement clos dans $R_i[\frac{1}{\pi}]$.*

Démonstration. Soit R une $\check{\mathcal{O}}$ -algèbre π -adique sans π -torsion. Il suffit d'utiliser le fait que R intégralement fermé dans $R[\frac{1}{\pi}]$ implique que, pour $f \in R$, il en est de même pour $R[\frac{1}{f}]$ et donc, d'après le lemme D.1.1, il en est de même pour le complété $R < \frac{1}{f} >$. \square

Lemme D.5.3. *Soit \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique sans π -torsion. Soit \mathcal{A} la $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ -algèbre qui est le faisceau associé au préfaisceau, qui à \mathfrak{U} quasicompact associe la*

fermeture intégrale de $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})$ dans $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}])$. Alors, pour tout ouvert affine $\mathrm{Spf}(R) \subset \mathfrak{Z}$, $\Gamma(\mathrm{Spf}(R), \mathcal{A})$ est la fermeture intégrale de R dans $R[\frac{1}{\pi}]$. De plus, $\forall k \geq 1$, $\mathcal{A}/\pi^k \mathcal{A}$ est une $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z} \otimes \check{\mathcal{O}}/\pi^k \check{\mathcal{O}}}$ -algèbre quasi-cohérente sur le schéma $\mathfrak{Z} \otimes \check{\mathcal{O}}/\pi^k \check{\mathcal{O}}$.

Démonstration. Soit $\mathrm{Spf}(R) \subset \mathfrak{Z}$ un ouvert affine. Étant donné que $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}]$ et que $\mathrm{Spf}(R)$ est quasicompact $\Gamma(\mathrm{Spf}(R), \mathcal{A}) \subset R[\frac{1}{\pi}]$. Soit donc $s \in \Gamma(\mathrm{Spf}(R), \mathcal{A})$. Il existe un recouvrement affine fini $\mathrm{Spf}(R) = \cup_{i \in I} D(f_i)$, où $\forall i$, $f_i \in R$ tel que $\forall i$, $s|_{D(f_i)}$ vérifie

$$s|_{D(f_i)} \in \overline{R\langle 1/f_i \rangle}$$

Mais, d'après le lemme D.1.1, pour tout $i \in I$, l'image réciproque de $\overline{R\langle \frac{1}{f_i} \rangle}$ dans $R[\frac{1}{f_i}][\frac{1}{\pi}]$ par l'application $R[\frac{1}{f_i}][\frac{1}{\pi}] \rightarrow R\langle \frac{1}{f_i} \rangle[\frac{1}{\pi}]$ est égale à $\overline{R[\frac{1}{f_i}]}$. On en déduit, grâce au recouvrement affine $\mathrm{Spec}(R) = \cup_{i \in I} D'(f_i)$ où cette fois-ci $D'(f_i) = \mathrm{Spec}(R[\frac{1}{f_i}])$, que l'élément de $R[\frac{1}{\pi}]$ associé à s est localement sur $\mathrm{Spec}(R)$ entier sur $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$, donc entier sur R (cf. par exemple la démonstration de la proposition 6.1.4 de EGA II p.110). On a donc démontré que $\Gamma(\mathrm{Spf}(R), \mathcal{A}) = \overline{R}$.

Montrons maintenant que $\forall k \geq 1$, $\mathcal{A}/\pi^k \mathcal{A}$ est quasi-cohérente. Soit donc $\mathrm{spf}(R) \subset \mathfrak{Z}$ un ouvert affine et pour un $f \in R$ l'ouvert $D(f) = \mathrm{Spf}(R\langle \frac{1}{f} \rangle)$. Soit $A = R[1/f]$. On a $\overline{A} = \overline{R[1/f]}$. Donc, par application du corollaire D.1.2 à l'anneau A ,

$$\widehat{\overline{R}} \left\langle \frac{1}{f} \right\rangle = \widehat{\overline{R\langle 1/f \rangle}}$$

Donc, $\forall k \geq 1$, par tensorisation de l'égalité précédente par $\check{\mathcal{O}}/\pi^k \check{\mathcal{O}}$,

$$\overline{R}/\pi^k \overline{R} \left[\frac{1}{f} \right] = \overline{R\langle 1/f \rangle}/\pi^k \overline{R\langle 1/f \rangle}$$

Soit \mathcal{B} le préfaisceau $\mathfrak{U} \mapsto \mathcal{A}(\mathfrak{U})/\pi^k \mathcal{A}(\mathfrak{U})$. L'égalité précédente s'écrit

$$\Gamma(\mathrm{Spf}(R), \mathcal{B})[1/f] = \Gamma(D(f), \mathcal{B})$$

Donc le faisceau associé \mathcal{A} est quasi-cohérent. \square

Proposition D.5.4. *Soit \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique sans π -torsion. Soit \mathcal{A} la $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ -algèbre définie dans le lemme précédent par normalisation de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[\frac{1}{\pi}]$. Soit*

$$\mathfrak{Z}^{\mathrm{norm}} = \varinjlim_k \mathrm{Spec}_{\mathfrak{Z} \otimes \check{\mathcal{O}}/\pi^k \check{\mathcal{O}}}(\mathcal{A}/\pi^k \mathcal{A})$$

qui est un \mathfrak{Z} -schéma formel affine. Il vérifie que $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}^{\mathrm{norm}}}$ est intégralement fermé dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}^{\mathrm{norm}}}[\frac{1}{\pi}]$. De plus, pour tout schéma formel π -adique sans π -torsion \mathfrak{X} tel que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ soit intégralement fermé dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{\pi}]$, pour tout morphisme $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Z}$, il

existe une unique extension

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{Z}^{\text{norm}} \\ & \nearrow \exists & \downarrow \\ \mathfrak{X} & \longrightarrow & \mathfrak{Z} \end{array}$$

Définition D.5.5. Le schéma formel précédent $\mathfrak{Z}^{\text{norm}}$ est appelé le normalisé de \mathfrak{Z} dans sa fibre générique.

Exemple D.5.6. Soit \mathfrak{Z} un schéma formel localement de type fini sur $\text{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ sans π -torsion tel que $\mathfrak{Z}^{\text{rig}}$ soit normal. Alors on a vu dans l'appendice A du chapitre I que $\mathfrak{Z}^{\text{norm}} = \text{Spf}(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A} = sp_* \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}^{\text{rig}}}^0$ est une $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ -algèbre cohérente. La proposition précédente généralise donc cette situation sans condition de finitude.

D.6 Commutation de la normalisation dans la fibre générique et du passage à la limite projective

Proposition D.6.1. Soit (I, \geq) un ensemble ordonné filtrant décroissant et

$$((\mathfrak{Z}_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i \geq j})$$

un système projectif de schémas formels π -adiques sans π -torsion, dont les morphismes de transition sont affines. Il y a alors un isomorphisme canonique

$$\varprojlim_i \mathfrak{Z}_i^{\text{norm}} \xrightarrow{\sim} \left(\varprojlim_i \mathfrak{Z}_i \right)^{\text{norm}}$$

Démonstration. Il y a un morphisme de systèmes projectifs $(\mathfrak{Z}_i^{\text{norm}})_i \longrightarrow (\mathfrak{Z}_i)_i$ qui induit un morphisme affine

$$\varprojlim_i \mathfrak{Z}_i^{\text{norm}} \longrightarrow \varprojlim_i \mathfrak{Z}_i$$

D'après le lemme D.1.1, le schéma formel $\varprojlim_i \mathfrak{Z}_i^{\text{norm}}$ est "intégralement fermé dans sa fibre générique" (au sens où si \mathcal{O} est son faisceau structural, \mathcal{O} est intégralement fermé dans $\mathcal{O}[\frac{1}{\pi}]$). D'après la propriété universelle du normalisé, le morphisme précédent s'étend donc en un morphisme

$$\varprojlim_i \mathfrak{Z}_i^{\text{norm}} \longrightarrow \left(\varprojlim_i \mathfrak{Z}_i \right)^{\text{norm}}$$

Construisons un inverse à ce morphisme. Pour tout $j \in I$, il y a un morphisme composé

$$\left(\lim_{\leftarrow i} \mathfrak{Z}_i \right)^{\text{norm}} \longrightarrow \lim_{\leftarrow i} \mathfrak{Z}_i \xrightarrow{\text{projection}} \mathfrak{Z}_j$$

qui s'étend par propriété universelle du normalisé en un morphisme

$$\left(\lim_{\leftarrow i} \mathfrak{Z}_i \right)^{\text{norm}} \longrightarrow \mathfrak{Z}_j^{\text{norm}}$$

Ces morphismes sont compatibles lorsque j varie et fournissent donc, par la propriété universelle de la limite projective, un morphisme

$$\left(\lim_{\leftarrow i} \mathfrak{Z}_i \right)^{\text{norm}} \longrightarrow \lim_{\leftarrow i} \mathfrak{Z}_i^{\text{norm}}$$

On vérifie facilement que ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre. \square

D.7 Éclatements formels admissibles

D.7.1 Définition et premières propriétés

Définition D.7.1. Soit \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique sans π -torsion et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ un idéal tel que localement sur \mathfrak{Z} , $\exists N \in \mathbb{N}$, $\pi^N \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \subset \mathcal{I}$ et $\mathcal{I}/\pi^N \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ est quasi-cohérent de type fini. Un tel idéal est dit admissible. On appelle éclatement formel admissible de \mathcal{I} le \mathfrak{Z} -schéma formel π -adique

$$\tilde{\mathfrak{Z}} = \lim_{\leftarrow k} \text{Proj} \left(\bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{I}^i / \pi^k \mathcal{I}^i \right)$$

Proposition D.7.2. Avec les notations de la définition précédente,

- si $\text{Spf}(R) \subset \mathfrak{Z}$ est un ouvert affine et $I = \Gamma(\text{Spf}(R), \mathcal{I})$, alors $\tilde{\mathfrak{Z}}_{|\text{Spf}(R)}$ s'identifie au complété π -adique de l'éclatement de l'idéal \tilde{I} de $\text{Spec}(R)$
- $\tilde{\mathfrak{Z}}$ est sans π -torsion
- si $\varphi : \tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathfrak{Z}$, alors $\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{Z}}} \cdot \varphi^{-1} \mathcal{I}$ est localement libre de rang 1
- $\tilde{\mathfrak{Z}}$ satisfait à la propriété universelle suivante: pour tout \mathfrak{Z} -schéma formel π -adique sans π -torsion $\mathfrak{Y} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{Z}$ tel que $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \cdot \psi^{-1} \mathcal{I}$ soit localement libre de rang 1, il existe un unique \mathfrak{Z} -morphisme $\mathfrak{Y} \rightarrow \tilde{\mathfrak{Z}}$.

Démonstration. La première assertion découle de la définition de l'éclatement formel admissible.

La seconde résulte de la première, car, $\text{Spec}(R)$ étant sans π -torsion, l'éclatement de l'idéal \tilde{I} l'est aussi (l'image réciproque d'un ouvert schématiquement dense par un éclatement reste schématiquement dense) et donc, d'après le lemme D.1.1, son complété π -adique est encore sans π -torsion.

La troisième résulte également de la première. En effet, sur l'éclaté de \tilde{I} dans le schéma $\text{Spec}(R)$, l'idéal \tilde{I} est localement libre de rang 1. Il est donc localement monogène sur le complété π -adique de ce schéma. Donc \mathcal{I} devient localement monogène sur $\tilde{\mathfrak{J}}$. Mais, étant donné que \mathcal{I} contient localement une puissance de π et que $\tilde{\mathfrak{J}}$ est sans π -torsion, \mathcal{I} est localement libre de rang 1 sur $\tilde{\mathfrak{Z}}$.

La dernière assertion résulte aisément de son homologue pour les schémas (et de la première assertion). \square

Remarque D.7.3. Soit $\mathfrak{J} = \text{Spf}(R)$ π -adique sans π -torsion et \mathcal{I} un idéal admissible de $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$. Il y a alors un idéal $I = (f_1, \dots, f_n)$ de R contenant une puissance de π tel que \mathcal{I} soit l'image réciproque de l'idéal quasi-cohérent $(I/\pi^N \mathcal{O}_{\mathfrak{J}})$ dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$ pour $N \gg 0$. La description donnée dans le lemme 2.2 de [3] de $\tilde{\mathfrak{J}}$, lorsque \mathfrak{J} est topologiquement de type fini sur $\hat{\mathcal{O}}$, est en général fautive. On a en fait la description suivante:

$$\tilde{\mathfrak{J}} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$$

où $\mathcal{U}_i = \text{Spf}(A_i)$ est un ouvert affine tel que si

$$B_i = R\langle T_1, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n \rangle / (T_j f_i - f_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i}$$

et $B'_i = B_i/J_i$ avec $J_i = \{b \in B_i \mid \exists k \pi^k b = 0\}$, alors A_i est le séparé de B'_i , $A_i = B'_i / \bigcap_{k \geq 0} \pi^k B'_i$.

Lemme D.7.4. Soit \mathfrak{J} comme précédemment. Soient $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ deux idéaux admissibles. Soit $\tilde{\mathfrak{J}}$ l'éclatement formel de \mathcal{I}_1 . Alors l'éclatement formel admissible de $\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2$ s'identifie à l'éclatement formel admissible de l'image réciproque de \mathcal{I}_2 à $\tilde{\mathfrak{J}}$.

Remarque D.7.5. On utilisera souvent la propriété suivante. Soit \mathfrak{J} π -adique sans π -torsion et $\mathfrak{J} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$ un idéal admissible. Alors \mathfrak{J} est localement libre de rang 1 ssi il est localement monogène.

D.7.2 Adhérence "schématique" de la fibre générique

Soit \mathfrak{J} un schéma formel π -adique. Notons pour tout $k \geq 1$

$$\mathcal{I}_k = \varinjlim_{i \geq 1} \ker \left(\mathcal{O}_{\mathfrak{J}}/\pi^k \mathcal{O}_{\mathfrak{J}} \xrightarrow{\times \pi^i} \mathcal{O}_{\mathfrak{J}}/\pi^{k+i} \mathcal{O}_{\mathfrak{J}} \right) \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{J}}/\pi^k \mathcal{O}_{\mathfrak{J}}$$

un faisceau d'idéaux quasicohérent sur $\mathfrak{Z} \otimes \check{\mathcal{O}}/\pi^k$. Si $\mathrm{Spf}(R) \subset \mathfrak{Z}$ et $I = \{x \in R \mid \exists i \geq 1, \pi^i x = 0\}$ alors

$$\mathcal{I}_k = (I + \pi^k R / \pi^k R)^\sim$$

où le tilda signifie "le faisceau quasicohérent associé". Notons alors

$$Z_k = V(\mathcal{I}_k) \subset \mathfrak{Z} \otimes \check{\mathcal{O}}/\pi^k \check{\mathcal{O}}$$

On a donc

$$Z_{k+1} \otimes \check{\mathcal{O}}/\pi^k \check{\mathcal{O}} = Z_k$$

Notons alors

$$\mathfrak{Z}' = \varinjlim_k Z_k$$

un schéma formel π -adique. Si $\mathrm{spf}(R)$ est un ouvert affine de \mathfrak{Z} et I est l'idéal des éléments de π^∞ -torsion comme précédemment alors l'ouvert correspondant de \mathfrak{Z}' est $\mathrm{Spf}(R/\bar{I})$, où \bar{I} désigne l'adhérence de I pour la topologie π -adique.

Lemme D.7.6. *Le schéma formel π -adique \mathfrak{Z}' est sans π -torsion. De plus "l'immersion fermée" $\mathfrak{Z}' \hookrightarrow \mathfrak{Z}$ est telle que pour tout schéma formel π -adique sans π -torsion \mathfrak{Y} , tout morphisme $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$ se factorise via $\mathfrak{Z}' \hookrightarrow \mathfrak{Z}$.*

Démonstration. Elle ne pose pas de problème particulier. \square

Définition D.7.7. Par abus de terminologie, on appellera \mathfrak{Z}' l'adhérence schématique de la fibre générique de \mathfrak{Z} .

D.7.3 Transformée stricte

Soit $\varphi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$ un morphisme de schémas formels π -adiques sans π -torsion. Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ un faisceau d'idéaux satisfaisant aux hypothèses de la définition D.7.1. Notons $\tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathfrak{Z}$ l'éclatement formel admissible associé.

Définition D.7.8. On appelle transformé strict de \mathfrak{Y} relativement à l'éclatement $\tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathfrak{Z}$ l'adhérence schématique de la fibre générique de $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \tilde{\mathfrak{Z}}$.

Proposition D.7.9. *Le transformé strict de \mathfrak{Y} s'identifie à l'éclatement formel admissible de l'idéal $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \cdot \varphi^{-1}\mathcal{I}$.*

Démonstration. Notons \mathfrak{X} le transformé strict et $\tilde{\mathfrak{Y}}$ l'éclatement formel de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \cdot \varphi^{-1}\mathcal{I}$. Puisqu'il y a une factorisation $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathfrak{Z}$, l'image réciproque à $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \tilde{\mathfrak{Z}}$ de l'idéal \mathcal{I} est localement monogène. Donc, puisque cet idéal contient localement une puissance de π et puisque $\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \tilde{\mathfrak{Z}}$ est sans π -torsion, son image réciproque à \mathfrak{X} est localement libre de rang 1. Donc, via le morphisme composé $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathfrak{Y}$, l'image réciproque de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \cdot \varphi^{-1}\mathcal{I}$ est localement libre de rang 1. D'après la propriété universelle de $\tilde{\mathfrak{Y}}$, il y a donc un morphisme

$$\mathfrak{X} \rightarrow \tilde{\mathfrak{Y}}$$

Construisons un morphisme dans l'autre sens. D'après la propriété universelle de $\tilde{\mathfrak{Z}}$ le morphisme $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$ s'étend en un morphisme $\tilde{\mathfrak{Y}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{Z}}$. Il fournit donc un morphisme

$$\tilde{\mathfrak{Y}} \rightarrow \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \tilde{\mathfrak{Z}}$$

Mais, grâce à la propriété caractérisant l'adhérence schématique de la fibre générique, ce morphisme se factorise en un morphisme

$$\tilde{\mathfrak{Y}} \rightarrow \mathfrak{X}$$

On vérifie alors facilement que les deux morphismes précédents sont inverses l'un de l'autre. \square

D.7.4 Commutation à la limite projective

Soit (I, \geq) un ensemble ordonné filtrant décroissant et $((\mathfrak{Z}_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i \geq j})$ un système projectif de schémas formels π -adiques sans π -torsion tel que les morphismes de transition φ_{ij} soient affines. Soit $i_0 \in I$ fixé et \mathcal{I} un idéal admissible de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_{i_0}}$. Notons, pour $i \geq i_0$, $\tilde{\mathfrak{Z}}_i$ l'éclatement formel de l'image réciproque de \mathcal{I} . On a donc un système projectif $(\tilde{\mathfrak{Z}}_i)_{i \in I}$. D'après la proposition D.7.9, les morphismes de transition sont affines.

Proposition D.7.10. *La limite projective $\varprojlim_{i \geq i_0} \tilde{\mathfrak{Z}}_i$ coïncide avec l'éclatement formel de l'image réciproque à $\varprojlim_i \mathfrak{Z}_i$ de \mathcal{I} .*

Corollaire D.7.11. *Soit, pour tout i , $\tilde{\mathfrak{Z}}_i^{\text{norm}}$ le normalisé dans sa fibre générique de l'éclaté $\tilde{\mathfrak{Z}}_i$. Il y a alors une identification entre $\varprojlim_{i \geq i_0} \tilde{\mathfrak{Z}}_i^{\text{norm}}$ et le normalisé dans sa fibre générique de l'éclatement formel de $\varprojlim_i \mathfrak{Z}_i$.*

Démonstration. Appliquer la proposition précédente couplée à la proposition D.6.1. \square

Bibliographie

- [1] V. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, 1990.
- [2] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

- [3] S. Bosch and W. Lütkebohmert. Formal and rigid geometry. I. Rigid spaces. *Math. Ann.*, 295(2):291–317, 1993.
- [4] J.-F. Boutot and H. Carayol. Uniformisation p -adique des courbes de shimura: les théorèmes de Cerednik et de Drinfeld. *Astérisque*, 196-197:45–158, 1991.
- [5] Pierre Deligne. Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques. In *Automorphic forms, representations and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 247–289. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.
- [6] V.G. Drinfeld. Coverings of p -adic symmetric domains. *Functional Analysis and its Applications*, 10(2):29–40, 1976.
- [7] G. Faltings. Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(1):117–144, 1999.
- [8] G. Faltings. Group schemes with strict \mathcal{O} -action. *Mosc. Math. J.*, 2(2):249–279, 2002.
- [9] L. Fargues. Application de Hodge-Tate duale d’un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification. *À paraître à Duke Math.*
- [10] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [11] M.J. Hopkins and B.H. Gross. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [12] W. Messing. The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes. *Lecture Notes in Mathematics*, 264, 1972.
- [13] M. Rapoport, Th. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*. Number 141 in *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [14] J.P. Serre. Sur les groupes de galois attachés aux groupes p -divisibles. In *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, pages pp. 118–131.

Chapitre IV

Comparaison de la cohomologie des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et correspondance de Jacquet-Langlands géométrique

Introduction

Ce dernier chapitre est consacré à l'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld. Les principaux résultats sont:

- Soit $(X_i)_{i \in I}$ un système projectif filtrant d'espaces rigides quasicompacts. Soit $(\mathfrak{X}_i)_{i \in I}$ un modèle entier de ce système projectif formé de schémas formels admissibles au sens de Raynaud, dont les morphismes de transition sont affines. Soit $\mathfrak{X}_\infty = \varprojlim_i \mathfrak{X}_i$. Par exemple, si $\mathfrak{X}_i = \mathrm{Spf}(R_i)$, alors $\mathfrak{X}_\infty = \mathrm{Spf}(\varprojlim_i R_i)^\wedge$. Alors le topos limite projective $\varprojlim_i (X_i)_{\text{ét}}$ ne dépend que de \mathfrak{X}_∞ et la cohomologie $\varprojlim_i H^\bullet((X_i)_{\text{ét}}, \Lambda)$ également.
- L'existence d'une correspondance "de Jacquet-Langlands locale géométrique" entre faisceaux étales D^\times -équivariants sur l'espace des périodes de Gross-Hopkins $(\mathbb{P}^{n-1})^{\mathrm{rig}}$ pour lesquels l'action de D^\times est lisse (au sens de la théorie des représentations des groupes p -adiques: le stabilisateur d'une section est ouvert) et faisceaux $\mathrm{GL}_n(F)$ -équivariants sur l'espace de Drinfeld Ω pour lesquels l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ est lisse. Il s'agit du théorème IV.13.1.
- Le fait que les complexes de cohomologie à support compact de la tour de Lubin-Tate et de Drinfeld, vus comme éléments de la catégorie dérivée $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \times W_F$ -équivariante lisse, sont isomorphes. Il s'agit du théorème IV.13.2.

Les deux derniers résultats utilisent bien sûr le théorème principal du chapitre III, ainsi que le premier résultat. Pour le premier résultat les points-clef consistent en une utilisation du théorème d'approximation d'Elkik ([11]) et du théorème de platisation de Raynaud-Gruson ([24]).

La correspondance de Jacquet-Langlands locale géométrique

Rappelons que la tour de Lubin-Tate est une tour d'espaces analytiques rigides $(\mathcal{M}_K^{\mathcal{L}\mathcal{T}})_{K \subset GL_n(\mathcal{O}_F)}$ munie d'une action "verticale" de $GL_n(F)$ par correspondances de Hecke et "horizontale", étage par étage, de D^\times . Elle forme un "pro- $GL_n(\mathcal{O}_F)$ -torseur étale" au-dessus de la tour sans niveau

$$\mathcal{M}_{GL_n(\mathcal{O}_F)}^{\mathcal{L}\mathcal{T}} = \text{"Tour de L.T./}GL_n(\mathcal{O}_F)\text{"} \simeq \prod_{\mathbb{Z}} \overset{\circ}{\mathbb{B}^{n-1}}$$

une union disjointe de boules p -adiques ouvertes. De plus, il y a une application des périodes de Gross-Hopkins ([17], [23], section I.2 de ce livre)

$$\mathcal{M}_{GL_n(\mathcal{O}_F)}^{\mathcal{L}\mathcal{T}} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

surjective, D^\times -équivariante, invariante sous les correspondances de Hecke sphériques et dont les fibres sont exactement les orbites de Hecke. On a donc envie d'écrire

$$\text{Tour de L.T./}GL_n(F) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$$

ou, plutôt au sens des champs, $[\text{Tour de L.T./}GL_n(F)] \simeq \mathbb{P}^{n-1}$, i.e., les faisceaux rigides-étales Hecke-équivariants sur la tour de Lubin-Tate sont en bijection avec les faisceaux rigides-étales sur $(\mathbb{P}^{n-1})^{\text{rig}}$.

Quant à la tour de Drinfeld $(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})_{K \subset \mathcal{O}_D^\times}$, elle est munie d'une action "verticale" de D^\times et "horizontale" de $GL_n(F)$. Elle forme un "pro- \mathcal{O}_D^\times -torseur étale" au-dessus de la tour sans niveau

$$\mathcal{M}_{\mathcal{O}_D^\times}^{\mathcal{D}r} = \text{"Tour de Dr./}\mathcal{O}_D^\times\text{"} \simeq \prod_{\mathbb{Z}} \Omega$$

où Ω désigne l'espace de Drinfeld, si $n = 2$: $\Omega(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$. Il y a de plus une application des périodes beaucoup plus simple que la précédente

$$\mathcal{M}_{\mathcal{O}_D^\times}^{\mathcal{D}r} = \prod_{\mathbb{Z}} \Omega \longrightarrow \Omega$$

qui est $GL_n(F)$ -équivariante, un isomorphisme sur chacune des composantes de l'union $\prod_{\mathbb{Z}}$, D^\times -invariante et dont les fibres sont exactement les $D^\times/\mathcal{O}_D^\times$ -orbites. On a donc envie d'écrire

$$[\text{Tour de Dr./}D^\times] \simeq \Omega$$

c'est-à-dire que les faisceaux rigides-étales D^\times -équivariants sur la tour de Drinfeld sont en bijection avec les faisceaux rigides-étales sur Ω .

Rappelons maintenant qu'on a démontré dans le chapitre III l'existence d'un "isomorphisme en niveau infini"

$$\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_\infty^{Dr}$$

$\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariant. On a donc envie d'écrire qu'il y a un isomorphisme

$$[D^\times \backslash \mathbb{P}^{n-1}] \simeq [\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \backslash \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}] \simeq [\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \backslash \mathcal{M}_\infty^{Dr}] \simeq [\mathrm{GL}_n(F) \backslash \Omega]$$

c'est-à-dire une équivalence entre faisceaux D^\times -équivariants sur \mathbb{P}^{n-1} et faisceaux $\mathrm{GL}_n(F)$ -équivariants sur Ω .

Cet énoncé est en fait incorrect. Pour expliquer pourquoi, prenons une analogie. Soit k un corps de clôture séparable \bar{k} et X un k -schéma de type fini. Soit $p : X_{\bar{k}} \rightarrow X$ la projection. Le foncteur, qui à un faisceau étale \mathcal{F} sur X associe le faisceau $p^*\mathcal{F}$ muni de son action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}|k)$ compatible à celle sur $X_{\bar{k}}$, induit une équivalence entre faisceaux étales sur X et ceux sur $X_{\bar{k}}$ munis d'une action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}|k)$ compatible à celle sur $X_{\bar{k}}$ et continue. La condition de continuité signifie que le stabilisateur d'une section du faisceau sur un ouvert quasicompact est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Gal}(\bar{k}|k)$. Dit en d'autres termes, il y a une condition de continuité sur la donnée de descente pour descendre des objets en niveau infini sur la tour $(X \otimes_k L)_{L|k}$ finie à X .

Il en est de même pour les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld. Il y a bien une équivalence entre faisceaux équivariants sur \mathbb{P}^{n-1} et Ω , mais il faut ajouter une condition de continuité sur l'action: le stabilisateur d'une section est un sous-groupe compact-ouvert. C'est ce que l'on appellera un faisceau équivariant lisse.

Pour expliquer cette condition de continuité revenons à notre analogie. Si $U \rightarrow X_{\bar{k}}$ est un morphisme étale avec U quasicompact, il existe une extension de degré fini $L|k$ et un ouvert étale $U' \rightarrow X_L$ tels que $U' = U \otimes_L \bar{k}$. Ainsi, en restriction au sous-groupe ouvert, $\mathrm{Gal}(\bar{k}|L)$ sur $X_{\bar{k}}$ s'étend en une action sur U

$$\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}|L), \quad \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\bar{k}} & \xrightarrow{\sigma^*} & X_{\bar{k}} \end{array}$$

et si \mathcal{F} est un faisceau étale sur $X_{\bar{k}}$ muni d'une action de

$$\mathrm{Gal}(\bar{k}|k), \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}|L), \quad (\sigma^*\mathcal{F})(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(U)$$

et il y a une action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}|L)$ sur $\mathcal{F}(U)$. La condition de lissité de l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}|L)$ est donc bien définie.

L'analogie en géométrie analytique a été étudié par Berkovich dans [5]. Expliquons-le plutôt dans le contexte des espaces rigides. Soit $Y = \mathrm{Sp}(\mathcal{B}) \rightarrow$

$\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ un morphisme étale entre espaces affinoïdes. Soit G un groupe profini agissant continûment sur X , au sens où si $f \in \mathcal{A}$

$$\lim_{g \rightarrow e} \|g^* f - f\|_\infty = 0$$

Il existe alors un moyen de relever “canoniquement” l’action de G sur X à Y , quitte à se restreindre à un sous-groupe ouvert suffisamment petit U de G

$$\begin{array}{ccc} & \curvearrowright & \\ Y & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

Ainsi, si \mathcal{F} est un G -faisceau étale sur X , il y a une action de U sur $\mathcal{F}(Y)$ et on peut parler de lissité de l’action de U sur $\mathcal{F}(Y)$.

Ce fait est une généralisation du lemme de Krasner. Si $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A) \rightarrow \mathrm{Spf}(B) = \mathfrak{X}$ est un modèle entier du morphisme $Y \rightarrow X$, i.e., A et B sont deux algèbres topologiquement de type fini sur \mathbb{Z}_p , sans p -torsion, $A[\frac{1}{p}] = \mathcal{A}$ et $B[\frac{1}{p}] = \mathcal{B}$ il existe alors un entier N tel que pour tout \mathfrak{X} -schéma formel topologiquement de type fini \mathfrak{Z} , l’application de réduction

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Y}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X} \otimes \mathbb{Z}/p^N}(\mathfrak{Z} \otimes \mathbb{Z}/p^N, \mathfrak{Y} \otimes \mathbb{Z}/p^N)$$

soit une bijection. Il s’agit essentiellement d’une application du théorème d’approximation d’Elkik ([11]). Si le morphisme entier $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ est étale on peut, bien sûr, prendre $N = 1$ et, en général, l’entier N dépend d’une puissance suffisamment grande de p telle qu’un certain idéal discriminant divise cette puissance (entier qui existe puisque après inversion de p , le morphisme est étale). En particulier, deux \mathfrak{X} -morphisms proches de \mathfrak{Y} dans lui-même coïncident et tout isomorphisme défini modulo p^N peut se relever en caractéristique zéro.

Cohomologie à support compact des deux tours

On démontre l’existence d’isomorphismes

$$\lim_{K \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)} H_c^\bullet(\mathcal{M}_K^{\mathcal{L}T} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}) \simeq \lim_{K \subset \mathcal{O}_D^\times} H_c^\bullet(\mathcal{M}_K^{Dr} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})$$

en tant que $\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \times W_F]$ -modules lisses. En fait, motivé par les travaux de J.F. Dat ([9]), on démontre un résultat beaucoup plus précis au niveau des complexes de cohomologie à support compact dans la catégorie dérivée équivariante-lisse. Si \mathcal{F} est un D^\times -faisceau lisse sur \mathbb{P}^{n-1} , on lui associe canoniquement, en tirant en arrière ce faisceau par l’application des périodes en chaque

niveau de l'espace de Lubin-Tate, un complexe de cohomologie à support compact de la tour de Lubin-Tate

$$R\Gamma_c(\mathcal{LT}, \mathcal{F}) \in \mathbb{D}^+(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \times W_F] - \text{Mod-lisses})$$

De même, si \mathcal{G} est un $\mathrm{GL}_n(F)$ -faisceau lisse sur Ω , on lui associe $R\Gamma_c(\mathcal{Dr}, \mathcal{G})$. Soit alors $\mathcal{F} \mapsto \mathrm{JL}(\mathcal{F})$ la correspondance de Jacquet-Langlands décrite précédemment. Il y a alors un isomorphisme de foncteurs

$$R\Gamma_c(\mathcal{LT}, -) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathcal{Dr}, -) \circ \mathrm{JL}$$

Description des différentes parties

Espaces rigides généralisés. Dans les chapitres 1 à 3, on définit et étudie les propriétés de base des espaces rigides “fibre générique” de schémas formels p -adiques, qui ne sont pas nécessairement topologiquement de type fini, du type de ceux intervenant dans les chapitres I et III. Le point de vue choisi est celui de Raynaud consistant à voir la catégorie des espaces rigides comme un localisé de la catégorie des schémas formels p -adiques relativement aux éclatements formels admissibles.

- Dans le premier chapitre, on définit et étudie les éclatements formels admissibles de tels schémas formels. Il s'agit essentiellement de vérifier que certaines notions intervenant dans [8] restent valables dans un contexte plus général. Une des difficultés de la théorie est que, contrairement au cas classique de [8], les théorèmes de cohérence des algèbres p -adiques topologiquement de type fini sans p -torsion ne sont plus valables.

On retiendra une des propriétés importantes de ces éclatements formels admissibles généralisés n'ayant pas d'équivalent dans le cadre “classique” : la proposition IV.1.35 assurant la compatibilité de ces éclatements au passage à la limite projective de schémas formels.

- Dans le deuxième chapitre, on définit et étudie le topos admissible de tels schémas formels. On utilise pour cela le langage des limites inductives de sites et des limites projectives de topos de [15]. Le topos admissible est vu comme la limite projective des topos Zariski des éclatements de notre modèle formel.

L'une des propriétés fondamentales est le théorème de “décomplétion”, la proposition IV.2.23, qui dit qu'un ouvert admissible quasicompact d'une limite projective de schémas formels $\varprojlim_i \mathfrak{X}_i$ est un germe d'ouverts admissibles sur les \mathfrak{X}_i , et la proposition IV.2.27, son interprétation en termes de topos.

Plus tard, on appliquera le même type de procédures pour le site étale rigide au lieu du site admissible. Le lecteur peut donc considérer ce chapitre comme un entraînement à la manipulation des topos limites projectives dans un cas “simple”.

- Dans le chapitre 3, on définit et étudie l'espace de Zariski-Riemann associé à nos espaces rigides généralisés. Pour les espaces rigides classiques, cet espace coïncide avec l'espace topologique adique défini par Huber ([19]) et également étudié par Fujiwara ([13]). On montre en particulier que le topos admissible s'identifie au topos des faisceaux sur cet espace topologique. On interprète également cet espace comme un recollé de spectres valuatifs.

On utilisera plus tard l'espace de Zariski-Riemann dans le but de définir la notion de famille couvrante dans notre site étale rigide.

On définit également l'espace de Berkovich associé aux généralisations maximales dans l'espace de Zariski-Riemann (les valuations de rang 1, i.e., à valeurs dans \mathbb{R}). Cela nous permettra de définir la notion de topos surconvergent correspondant dans le cas classique au topos étale de Berkovich.

Le topos étale rigide. Dans les chapitres 4, 5 et 6, on définit et étudie le topos étale rigide de nos schémas formels. Il s'agit du cœur de l'article.

Expliquons d'abord les difficultés rencontrées.

- Soit A une algèbre p -adique sans p -torsion. Si B est une A -algèbre p -adique topologiquement de présentation finie et si $B \simeq A \langle T_1, \dots, T_N \rangle / (f_1, \dots, f_q)$ est une présentation on peut définir comme dans le chapitre 4 de [11], en utilisant un idéal jacobien explicite, la notion d'être rig-étale après inversion de p : une certaine puissance de p appartient à cet idéal jacobien. Néanmoins, il n'y a pas de raison en général pour que cette définition ne dépende pas du choix d'une telle présentation comme c'est le cas si A est topologiquement de type fini sur un anneau de valuation de hauteur 1 (le cas rigide classique).
- On veut de plus appliquer le théorème 6 de [11] à nos algèbres rig-étales. Or, même après avoir fixé une présentation comme précédemment la démonstration donnée dans [11] ne s'adapte pas sans des théorèmes de cohérence. Essentiellement, le résultat qui pose problème est que si R est une algèbre p -adique et $I = \{x \in R \mid \exists k p^k x = 0\}$, alors en général I n'est pas un idéal fermé de R , et si l'on veut tuer la p -torsion dans R , il ne faut pas prendre R/I , mais R/\bar{I} , le séparé de R/I . En général, on n'a aucun contrôle sur \bar{I} . Bien sûr, si R est topologiquement de type fini sur un anneau de valuation de hauteur 1, d'après [8] on a $\bar{I} = I$, mais dans notre situation il n'y a pas de raison pour que ce soit le cas.
- Soit $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un système inductif d'algèbres p -adiques, sans p -torsion, topologiquement de type fini sur \mathbb{Z}_p , $R_\infty = \varinjlim_i R_i$. On peut même supposer que $R_i \hookrightarrow R_{i+1}$, $R_{i+1}|R_i$ est fini, R_i est intégralement fermé dans $R_i[\frac{1}{p}]$, $R_i[\frac{1}{p}] \hookrightarrow R_{i+1}[\frac{1}{p}]$ est étale fini et que le système inductif $(R_i[\frac{1}{p}])_{i \in \mathbb{N}}$ est un torseur étale sous un groupe profini et les $R_i[\frac{1}{p}]$ sont rig-lisses sur \mathbb{Z}_p (exemple: prendre l'image réciproque d'un ouvert affine dans les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld).

On veut qu'il y ait une équivalence entre \widehat{R}_∞ -algèbres p -adiques rig-étales et "germes" d'algèbres p -adiques rig-étales sur les $(R_i)_i$, via l'application

$$(R_i \longrightarrow B) \longmapsto (\widehat{R}_\infty \longrightarrow B \widehat{\otimes}_{R_i} \widehat{R}_\infty)$$

Il devrait s'agir typiquement d'une application du théorème d'approximation d'Elkik à l'anneau Hensélien (R_∞, pR_∞) . Néanmoins, il n'y a pas de raison dans le cas des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld, pour les modèles construits dans les chapitres I et III par normalisation, pour que les morphismes $R_i \longrightarrow R_{i+1}$ soient plats. Il n'y a pas, non plus, de raison pour que le système inductif $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ satisfasse à une hypothèse de presque platitude au sens de Faltings, c'est-à-dire si $i_0 \in \mathbb{N}$, $I \subset R_{i_0}$ est un idéal de type fini, alors

$$\exists \alpha \in \mathbb{N}, \forall i \geq i_0, p^\alpha \cdot \text{Tor}_1^{R_{i_0}}(R_i, R_{i_0}/I) = 0$$

Par exemple, on aurait bien aimé que le morphisme $R_\infty \longrightarrow \widehat{R}_\infty$ soit fidèlement plat, mais il n'y a pas de raison, non plus, pour que ce soit le cas.

Le problème que cela soulève est que si B est une R_i -algèbre rig-étale sans p -torsion, alors la p^∞ -torsion des algèbres $(B \widehat{\otimes}_{R_i} R_j)_{j \geq i}$ peut "exploser" lorsque $j \longrightarrow +\infty$.

Voici comment on procède pour palier à ces problèmes.

- Dans le chapitre 4, on montre que si A est une algèbre p -adique sans p -torsion et que l'on se restreint aux A -algèbres p -adiques finies localement libres étales après inversion de p , on a une bonne théorie pour de telles algèbres rig-étales. Ainsi, si \mathfrak{X} est un schéma formel p -adique sans p -torsion quelconque, on a une bonne notion de \mathfrak{X} -schéma formel fini localement libre rig-étale.

On montre de plus que le théorème d'approximation d'Elkik s'applique à ces morphismes rig-étales: si $(\mathfrak{X}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système projectif de schémas formels p -adiques sans p -torsion à morphismes de transition affines,

$$\mathfrak{X}_\infty = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{X}_i,$$

les \mathfrak{X}_∞ -schémas formels finis localement libres rig-étales sont équivalents aux "germes" de \mathfrak{X}_i -schémas formels finis localement libres rig-étales, lorsque i varie via

$$(\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}_i) \longmapsto (\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}_i} \mathfrak{X}_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty)$$

- Dans le chapitre 5 on définit et étudie la classe générale de morphismes rig-étales utilisée pour définir le topos étale rigide. On les appelle morphismes de type (\mathcal{E}) . Il sont construits à partir d'éclatements formels admissibles, de morphismes étales de schémas formels et de morphismes finis localement libres rig-étales (ceux étudiés dans le chapitre 4). On montre qu'ils vérifient

le théorème d'approximation comme précédemment: les \mathfrak{X}_∞ -schémas formels de type (\mathcal{E}) sont équivalents aux germes de \mathfrak{X}_i -schémas formels de type (\mathcal{E}) , lorsque i varie.

Le point-clef justifiant leur introduction est que, d'après le théorème de platisation de Raynaud-Gruson, si $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ est un morphisme de schémas formels admissibles quasicompacts tel que $\mathfrak{Y}^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{X}^{\text{rig}}$ soit étale, il existe alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Z} & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathfrak{X} & \end{array}$$

où $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$ est de type (\mathcal{E}) et $|\mathfrak{Z}^{\text{rig}}| \rightarrow |\mathfrak{Y}^{\text{rig}}|$ est surjectif, et que donc les \mathfrak{X} -schémas formels de type (\mathcal{E}) engendrent topologiquement le site étale de $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$.

- Dans le chapitre 6, on définit et étudie un site ainsi que le topos étale rigide des schémas formels ne vérifiant pas d'hypothèse de finitude. Pour cela, on utilise les morphisme de type (\mathcal{E}) du chapitre 5.

On a vu que dans le cas classique ces morphismes engendrent topologiquement le site étale rigide usuel. D'après le théorème 4.1 de l'exposé III de SGA4 (cf. théorème IV.6.1 de cet article), ils suffisent pour reconstruire le topos étale d'un espace rigide classique. La contrepartie est qu'ils ne forment pas une prétopologie de Grothendieck, à cause de l'absence de certains produits fibrés dans cette catégorie.

On utilise alors toute la puissance du formalisme de Grothendieck qui permet de définir une topologie en toute généralité sans cette hypothèse d'existence de produits fibrés. L'analogie suivante éclairera peut-être le lecteur: on est dans la situation où l'on a un espace topologique X , muni d'une famille d'ouverts \mathcal{C} telle que tout ouvert de X puisse s'écrire comme une union d'ouverts de \mathcal{C} , mais si $U, V \in \mathcal{C}$, $U \cap V$ n'appartient pas nécessairement à \mathcal{C} . Néanmoins, grâce au formalisme des cribles, \mathcal{C} est muni d'une topologie de Grothendieck qui n'est pas définie par une prétopologie mais qui permet tout de même de retrouver le topos X^\sim comme équivalent à \mathcal{C}^\sim ; un faisceau sur X est la même chose qu'un foncteur, i.e., un préfaisceau \mathcal{F} défini sur \mathcal{C} , vérifiant $\forall U \in \mathcal{C}, \forall (V_i)_{i \in I}$ un recouvrement de U par des objets de \mathcal{C} ,

$$\mathcal{F}(U) = \ker\left(\prod_{i \in I} \mathcal{F}(V_i) \rightrightarrows \prod_{i, j} \text{Hom}_{\text{préfaisceaux}}(h_{V_i} \times_{h_U} h_{V_j}, \mathcal{F})\right)$$

où h_V désigne le préfaisceau représenté par V et la même formule permet d'étendre \mathcal{F} à tout ouvert de X qui n'est pas dans \mathcal{C} .

Le théorème principal s'énonce alors en disant que le topos rig-étale d'une limite projective de schémas formels p -adiques est la limite projective des topos rig-étales de chaque schéma formel de la limite projective. Il s'agit d'une application des résultats d'approximation des chapitres précédents.

Faisceaux étales munis d'une action lisse d'un groupe p -adique. Dans les chapitres 8 à 10, on s'intéresse à la cohomologie à support compact équivariante des espaces analytiques de Berkovich, ainsi que des espaces rigides généralisés introduits dans les sections précédentes.

On s'inspire des travaux de Berkovich ([5] et [2]) sur le sujet. Étant donné un groupe topologique G agissant continûment sur un espace analytique de Berkovich X , resp. un espace rigide généralisé, étant donné un faisceau étale \mathcal{F} muni d'une action lisse de G compatible à celle sur X , on montre que l'action de G sur $H_c^\bullet(X, \mathcal{F})$ est lisse. En fait, le but plus général est d'associer fonctoriellement à \mathcal{F} un complexe de cohomologie $R\Gamma_c(X, \mathcal{F}) \in \mathbb{D}^+(\Lambda[G] - \text{Mod-lisses})$.

- Pour cela, on développe dans le chapitre 8 un formalisme général des G -faisceaux lisses qui peut s'appliquer aussi bien aux espaces de Berkovich qu'aux espaces rigides généralisés. Le résultat principal est le théorème IV.8.17, qui dit en particulier qu'on peut résoudre un G -faisceau lisse par des G -faisceaux lisses flasques après oubli de l'action de G .
- Le chapitre 9 contient l'application de ce formalisme aux espaces analytiques de Berkovich. Le site étale d'un espace de Berkovich n'est pas adapté au formalisme des faisceaux lisses, de plus, plus tard dans l'article, nous devons jongler entre site étale d'un espace de Berkovich et site étale de l'espace rigide associé, c'est pourquoi nous travaillons avec les sites quasi-étales définis dans [5] (le site quasi-étale correspond au site étale de l'espace rigide et le site étale au site étale surconvergent). Par contre, la cohomologie à support compact des espaces de Berkovich sans bord (i.e., surconvergents sur leur corps de base) est plutôt bien adaptée au site étale. D'où les jonglages permanents entre sites étales et quasi-étales.
- Le chapitre 10 est consacré à l'analogie pour les espaces rigides généralisés.

Les résultats principaux. Les chapitres 11 et 12 sont consacrés à la démonstration des principaux résultats de l'article. On y récolte les résultats des chapitres précédents pour les appliquer aux tours de Lubin-Tate et de Drinfeld.

Remarque: Il apparaîtra comme clair au lecteur que l'auteur s'est largement inspiré des travaux de Raynaud en géométrie rigide ainsi que de l'article [13] de Fujiwara.

IV.1 Schémas formels π -adiques

On fixe \mathcal{O}_K un anneau de valuation complet de hauteur 1 et π un élément de \mathcal{O}_K de valuation strictement positive. Cette notation sous-entend que le corps des fractions de \mathcal{O}_K est noté K . On vérifiera facilement que les définitions données ne dépendent pas du choix d'un tel π . Tous les schémas formels considérés seront supposés quasi-séparés.

IV.1.1 Rappels sur les schémas formels π -adiques

Définition IV.1.1. On appelle schéma formel π -adique (sous-entendu sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$) un schéma formel \mathfrak{Z} sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ tel que $\pi\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ soit un idéal de définition de \mathfrak{Z} .

Soit la catégorie dont les objets sont $(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/\pi^k\mathcal{O}_K))_{k \geq 1}$ et les flèches sont les morphismes de réduction modulo des puissances de π , $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/\pi^k\mathcal{O}_K) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/\pi^l\mathcal{O}_K)$, pour $k \leq l$:

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/\pi^k\mathcal{O}_K) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/\pi^{k+1}\mathcal{O}_K) \rightarrow \cdots$$

On définit une catégorie fibrée au-dessus de cette petite catégorie en posant que la fibre sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/\pi^k\mathcal{O}_K)$ est la catégorie des schémas sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/\pi^k\mathcal{O}_K)$. La catégorie des schémas formels π -adiques est alors équivalente à la limite projective de cette catégorie fibrée (cf. [1] exposé 6 section 6.10 page 273, pour la notion de limite projective de catégories fibrées).

Cela signifie que se donner un schéma formel π -adique est équivalent à se donner une famille $(Z_k)_{k \geq 1}$, où Z_k est un $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/\pi^k\mathcal{O}_K)$ -schéma muni d'isomorphismes $Z_{k+1} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k\mathcal{O}_K \xrightarrow{\sim} Z_k$ satisfaisant une condition de cocycle évidente (un schéma formel π -adique n'est rien d'autre qu'un cas particulier d'ind-schéma). Le schéma formel associé à une telle famille $(Z_k)_k$ sera noté $\varinjlim_k Z_k$.

Définition IV.1.2. On dit que \mathfrak{Z} est sans π -torsion si le faisceau $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ l'est, c'est-à-dire $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \xrightarrow{\times\pi} \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ est un monomorphisme.

Ainsi \mathfrak{Z} est sans π -torsion ssi $\forall k \in \mathbb{N}$, le schéma $\mathfrak{Z} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k\mathcal{O}_K$ est plat sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/\pi^k\mathcal{O}_K)$. On en déduit aussitôt que le schéma formel π -adique \mathfrak{Z} est sans π -torsion ssi il possède un recouvrement affine $(\mathrm{Spf}(R_i))_{i \in I}$ tel que $\forall i$, R_i soit sans π -torsion. De plus, on en déduit que si X est un schéma plat sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$, alors son complété π -adique est sans π -torsion.

Définition IV.1.3. Une algèbre π -adique est une \mathcal{O}_K -algèbre séparée complète pour la topologie π -adique.

Ainsi la catégorie des algèbres π -adiques est équivalente à celle des schémas formels π -adiques affines.

IV.1.2 Morphismes topologiquement de type fini

Définition IV.1.4. Un morphisme de schémas formels π -adiques $f : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ est dit localement topologiquement de type fini si le morphisme induit $\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ est localement de type fini. Il est dit topologiquement de type fini s'il est de plus quasicompact.

Lemme IV.1.5. Soit $f : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$. Sont équivalents

- f est localement topologiquement de type fini

- Pour tous ouverts affines $\mathrm{Spf}(B) \subset \mathfrak{Y}$, $\mathrm{Spf}(A) \subset \mathfrak{X}$, tels que $f(\mathrm{Spf}(B)) \subset \mathrm{Spf}(A)$, le morphisme induit $A \rightarrow B$ fait de B une A -algèbre topologiquement de type fini, c'est-à-dire isomorphe en tant que A -algèbre topologique à $A\langle T_1, \dots, T_n \rangle / I$, où $A\langle T_1, \dots, T_n \rangle$ désigne l'anneau des séries formelles strictes, le complété π -adique de $A[T_1, \dots, T_n]$, et I est un idéal fermé de $A\langle T_1, \dots, T_n \rangle$.

Les schémas formels π -adiques localement topologiquement de type fini sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ sont étudiés en détail dans [8], auquel on renvoie le lecteur.

Définition IV.1.6 ([8]). Les schémas formels π -adiques localement topologiquement de type fini sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$, sans π -torsion, sont appelés schémas formels admissibles.

IV.1.3 Morphismes topologiquement de présentation finie

La notion qui suit n'a d'intérêt que pour les schémas formels sans π -torsion.

Définition IV.1.7. Soit $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ un morphisme entre schémas formels π -adiques sans π -torsion. Il sera dit localement topologiquement de présentation finie, si le morphisme de schémas induit $\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K \rightarrow \mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K$ est localement de présentation finie. Il sera dit topologiquement de présentation finie s'il est de plus quasicompact.

Lemme IV.1.8. Soit $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ un morphisme entre schémas formels π -adiques sans π -torsion. Sont équivalents

- f est localement topologiquement de présentation finie
- Pour tout ouvert affine $\mathrm{Spf}(B) \subset \mathfrak{Y}$, $\mathrm{Spf}(A) \subset \mathfrak{X}$, tels que $f(\mathrm{Spf}(B)) \subset \mathrm{Spf}(A)$, le morphisme induit $A \rightarrow B$ fait de B une A -algèbre topologiquement de présentation finie, c'est-à-dire isomorphe en tant que A -algèbre topologique à $A\langle T_1, \dots, T_n \rangle / I$, où I est un idéal (saturé) de type fini de $A\langle T_1, \dots, T_n \rangle$
- Pour tout $k \geq 1$ le morphisme $\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K / \pi^k \mathcal{O}_K \rightarrow \mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K / \pi^k \mathcal{O}_K$ est de présentation finie.

Par exemple, si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de présentation finie entre schémas plats sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ le morphisme induit entre les complétés π -adiques est topologiquement de présentation finie.

D'après les résultats de cohérence de [8], un morphisme localement topologiquement de type fini entre schémas formels admissibles est automatiquement localement de présentation finie. Cette assertion est en générale fausse pour les schémas formels plus généraux que nous considérons.

IV.1.4 Morphismes affines

Définition IV.1.9. Un morphisme de schémas formels π -adiques $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ est dit affine, si le morphisme de schémas induit $\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K \rightarrow \mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K$

l'est ou encore, de façon équivalente, si $\forall k$, le morphisme de schémas induit $\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k \mathcal{O}_K \longrightarrow \mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k \mathcal{O}_K$ l'est.

Ainsi, si \mathfrak{X} est un schéma formel π -adique, la catégorie des \mathfrak{X} -schémas formels π -adiques affines est équivalente à la catégories des faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algèbres \mathcal{A} tels que l'application canonique $\mathcal{A} \longrightarrow \varprojlim_k \mathcal{A}/\pi^k \mathcal{A}$ est un isomorphisme et $\forall k$,

$\mathcal{A}/\pi^k \mathcal{A}$ est une $\mathcal{O}_{\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k \mathcal{O}_K}$ -algèbre quasi-cohérente. À $f : \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathfrak{X}$ affine, on associe la $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algèbre $f_* \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ et, dans l'autre sens, à \mathcal{A} on associe le \mathfrak{X} -schéma formel $\varinjlim_k \text{Spec}(\mathcal{A}/\pi^k \mathcal{A})$.

La catégorie des \mathfrak{X} -schémas formels π -adiques sans π -torsion affines est donnée par les $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algèbres \mathcal{A} sans π -torsion telles que $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \mathcal{A}/\pi^k \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}/\pi \mathcal{A}$ soit quasi-cohérente.

IV.1.5 Morphismes finis

Définition IV.1.10. Un morphisme $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ entre schémas formels π -adiques est fini si le morphisme induit $\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K/\pi \mathcal{O}_K \longrightarrow \mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K/\pi \mathcal{O}_K$ l'est.

Le lemme qui suit n'est qu'une retranscription du lemme de Nakayama.

Lemme IV.1.11. *Sont équivalents pour $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$*

- *f est fini*
- *Pour tout $k \geq 1$, le morphisme $\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k \mathcal{O}_K \longrightarrow \mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k \mathcal{O}_K$ est fini*
- *f est affine et pour tout ouvert affine $\text{Spf}(A) \subset \mathfrak{Y}$, si $f^{-1}(\text{Spf}(A)) = \text{Spf}(B)$ alors A est un B -module de type fini.*

Remarque IV.1.12. Si A est une \mathcal{O}_K -algèbre π -adique et B une A -algèbre finie, alors B est complète pour la topologie π -adique. Mais on prendra garde à ce que B n'est pas nécessairement séparée et n'est donc pas forcément une algèbre π -adique!

IV.1.6 Morphismes topologiquement plats

Définition IV.1.13. Un morphisme $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ entre schémas formels π -adiques sera dit topologiquement plat si $\forall k \geq 1$, le morphisme de schémas induit $\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k \mathcal{O}_K \longrightarrow \mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k \mathcal{O}_K$ l'est.

Par exemple, \mathfrak{X} π -adique est topologiquement plat sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ ssi il est sans π -torsion.

Remarque IV.1.14. On prendra garde qu'en général, si $\text{Spf}(B) \longrightarrow \text{Spf}(A)$ est topologiquement plat, alors B n'est pas nécessairement une A -algèbre plate. Par exemple, il n'y a pas de raison pour que si A est une algèbre π -adique et $f \in A$, le

morphisme $A \rightarrow A\langle\frac{1}{\pi}\rangle$ soit plat. Néanmoins, d'après [8], tout cela est vrai pour des schémas formels admissibles.

Lemme IV.1.15. *Un morphisme $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ entre schémas formels π -adiques sans π -torsion est topologiquement plat ssi le morphisme induit $\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K \rightarrow \mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K$ est plat.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 11.3.10.2 de EGA IV. \square

IV.1.7 Limite projective dans la catégorie des schémas formels π -adiques

Proposition IV.1.16. *Soit (I, \leq) un ensemble ordonné cofiltrant et*

$$((\mathfrak{Z}_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i \geq j})$$

un système projectif de schémas formels π -adiques tel que les morphismes de transition $\varphi_{ij} : \mathfrak{Z}_i \rightarrow \mathfrak{Z}_j$ soient affines. Alors $\varprojlim_{i \in I} \mathfrak{Z}_i$ existe dans la catégorie des

$\mathrm{spf}(\mathcal{O}_K)$ -schémas formels et c'est un schéma formel π -adique égal à

$$\varprojlim_{k \in \mathbb{N}} \varprojlim_{i \in I} (\mathfrak{Z}_i \otimes \mathcal{O}_K / \pi^k \mathcal{O}_K)$$

Démonstration. La démonstration ne pose pas de problème. On renvoie au chapitre 8 de EGA IV pour les limites projectives de schémas à morphismes de transition affines. \square

Exemple IV.1.17. Si $\mathfrak{Z}_i = \mathrm{Spf}(R_i)$, alors $\varprojlim_i \mathrm{Spf}(R_i) = \mathrm{Spf}(\widehat{R}_\infty)$, où $R_\infty = \varinjlim_i R_i$. Par exemple, si on considère la limite projective de revêtements de Kummer $\mathbb{D} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathbb{D} \leftarrow \cdots$, où $\mathbb{D} = \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K \langle T, T^{-1} \rangle)$ et les morphismes de transition sont tous $t \mapsto t^p$, alors

$$\widehat{R}_\infty = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} a_\alpha T^\alpha \mid a_\alpha \in \mathcal{O}_K, a_\alpha \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow +\infty} 0, a_\alpha \xrightarrow{v_p(\alpha) \rightarrow -\infty} 0 \right\}$$

où $a_\alpha \rightarrow 0$ signifie tendre vers 0 pour la topologie π -adique.

IV.1.8 Adhérence “schématique” de la fibre générique

Soit \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique. Notons, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathcal{I}_k = \varinjlim_{i \geq 1} \ker \left(\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \xrightarrow{\times \pi^i} \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} / \pi^{k+i} \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \right) \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} / \pi^k \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$$

un faisceau d'idéaux quasicohérent sur $\mathfrak{Z} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k$. Si $\mathrm{Spf}(R) \subset \mathfrak{Z}$ est un ouvert affine et $I = \{x \in R \mid \exists i \geq 1, \pi^i x = 0\}$, alors

$$\mathcal{I}_k = (I + \pi^k R/\pi^k R)^\sim$$

où le tilde signifie "le faisceau quasicohérent associé". Notons alors

$$Z_k = V(\mathcal{I}_k) \subset \mathfrak{Z} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k \mathcal{O}_K$$

On a donc

$$Z_{k+1} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k \mathcal{O}_K = Z_k$$

Notons alors

$$\mathfrak{Z}' = \varinjlim_k Z_k$$

un schéma formel π -adique. Si $\mathrm{Spf}(R)$ est un ouvert affine de \mathfrak{Z} et I est l'idéal des éléments de π^∞ -torsion comme précédemment, alors l'ouvert correspondant de \mathfrak{Z}' est $\mathrm{Spf}(R/\bar{I})$, où \bar{I} désigne l'adhérence de I pour la topologie π -adique.

Lemme IV.1.18. *Le schéma formel π -adique \mathfrak{Z}' est sans π -torsion. De plus, l'immersion fermée $\mathfrak{Z}' \hookrightarrow \mathfrak{Z}$ est telle que pour tout schéma formel π -adique sans π -torsion \mathfrak{Y} , tout morphisme $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$ se factorise de façon unique via $\mathfrak{Z}' \hookrightarrow \mathfrak{Z}$.*

Démonstration. Elle ne pose pas de problème particulier. \square

Définition IV.1.19. Par abus de terminologie, on appellera \mathfrak{Z}' l'adhérence schématique de la fibre générique de \mathfrak{Z} . On notera $\mathfrak{Z}^{adh} = \mathfrak{Z}'$.

Le foncteur adhérence de la fibre générique définit donc un adjoint à droite à l'inclusion de la catégorie des schémas formels π -adiques sans π -torsion dans celle des schémas formels π -adiques.

En particulier, les produits fibrés existent dans la catégorie des schémas formels π -adiques sans π -torsion; il suffit de prendre l'adhérence schématique de la fibre générique du produit fibré usuel en tant que schémas formels.

Remarque IV.1.20. Lorsque \mathfrak{X} est admissible, d'après les résultats de [8] (tout idéal saturé dans une \mathcal{O}_K -algèbre topologiquement de type fini est de type fini donc fermé), \mathfrak{X}^{adh} s'obtient en tuant la π^∞ -torsion dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. Cela est faux car en général il faut quotienter par l'adhérence π -adique de la π^∞ -torsion.

Remarque IV.1.21.

- Le schéma formel \mathfrak{Z}^{adh} est quasi-séparé, car $\mathfrak{Z}^{adh} \otimes \mathcal{O}_K/\pi \mathcal{O}_K$ est un sous-schéma fermé de $\mathfrak{Z} \otimes \mathcal{O}_K/\pi \mathcal{O}_K$.
- Si $\mathcal{U} \subset \mathfrak{Z}$ est un ouvert, alors $\mathcal{U}^{adh} = \mathcal{U} \times_{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Z}^{adh}$
- Si $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ est un morphisme de schémas formels π -adiques, alors $\mathfrak{Y}^{adh} = (\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}^{adh})^{adh}$.

Plus généralement que le second point de la remarque précédente, on a le lemme qui suit, dont la démonstration est immédiate.

Lemme IV.1.22. *Soit $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme topologiquement plat entre schémas formels π -adiques. Alors*

$$\mathfrak{Y}^{adh} = \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}^{adh}$$

IV.1.9 Éclatements formels admissibles

IV.1.9.1 Définition et premières propriétés

Définition IV.1.23. Soit \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique sans π -torsion et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ un idéal tel que localement sur \mathfrak{Z} , $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\pi^N \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \subset \mathcal{I}$ et $\mathcal{I}/\pi^N \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ est quasi-cohérent de type fini. Un tel idéal est dit admissible. On appelle éclatement formel admissible de \mathcal{I} , le \mathfrak{Z} -schéma formel π -adique topologiquement de type fini

$$\tilde{\mathfrak{Z}} = \varinjlim_k \text{Proj} \left(\bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{I}^i / \pi^k \mathcal{I}^i \right)$$

Proposition IV.1.24. *Avec les notations de la définition précédente,*

- si $\text{Spf}(R) \subset \mathfrak{Z}$ est un ouvert affine et $I = \Gamma(\text{Spf}(R), \mathcal{I})$, alors $\tilde{\mathfrak{Z}}|_{\text{Spf}(R)}$ s'identifie au complété π -adique de l'éclatement de l'idéal \tilde{I} de $\text{Spec}(R)$
- $\tilde{\mathfrak{Z}}$ est sans π -torsion
- si $\varphi : \tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathfrak{Z}$, alors $\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{Z}}} \cdot \varphi^{-1} \mathcal{I}$ est localement libre de rang 1
- $\tilde{\mathfrak{Z}}$ satisfait à la propriété universelle suivante: pour tout \mathfrak{Z} -schéma formel π -adique sans π -torsion $\mathfrak{Y} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{Z}$ tel que $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \cdot \psi^{-1} \mathcal{I}$ soit localement libre de rang 1, il existe un unique \mathfrak{Z} -morphisme $\mathfrak{Y} \rightarrow \tilde{\mathfrak{Z}}$.

Démonstration. La première assertion découle de la définition de l'éclatement formel admissible et du fait que les "Proj" commutent aux changements de bases (EGA II 2.8.10).

La seconde résulte de la première, car, $\text{Spec}(R)$ étant sans π -torsion, l'éclatement de l'idéal \tilde{I} l'est aussi (l'image réciproque d'un ouvert schématiquement dense par un éclatement reste schématiquement dense) et donc son complété π -adique est encore sans π -torsion.

La troisième résulte également de la première. En effet, sur l'éclaté de \tilde{I} dans le schéma $\text{Spec}(R)$, l'idéal \tilde{I} devient localement libre de rang 1. Il est donc localement principal sur le complété π -adique de ce schéma. Donc \mathcal{I} devient localement principal sur $\tilde{\mathfrak{Z}}$. Mais, étant donné que \mathcal{I} contient localement une puissance de π et que $\tilde{\mathfrak{Z}}$ est sans π -torsion, \mathcal{I} est localement libre de rang 1 sur $\tilde{\mathfrak{Z}}$.

La dernière assertion résulte aisément de son homologue pour les schémas (et de la première assertion). \square

Remarque IV.1.25. Soit $\mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}(R)$ π -adique sans π -torsion et \mathcal{I} un idéal admissible de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$. Il y a alors un idéal $I = (f_1, \dots, f_n)$ de R contenant une puissance de π tel que \mathcal{I} soit l'image réciproque de l'idéal quasi-cohérent $(I/\pi^N \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})$ dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$, pour $N \gg 0$. La description donnée dans le lemme 2.2 de [8] de $\tilde{\mathfrak{Z}}$ lorsque \mathfrak{Z} est topologiquement de type fini sur \mathcal{O}_K est en général fautive. On a en fait la description suivante:

$$\tilde{\mathfrak{Z}} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$$

où $\mathcal{U}_i = \mathrm{Spf}(A_i)$ est un ouvert affine tel que si

$$B_i = R\langle T_1, \dots, \hat{T}_i, \dots, T_n \rangle / (T_j f_i - f_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i}$$

et $B'_i = B_i/J_i$, avec $J_i = \{b \in B_i \mid \exists k, \pi^k b = 0\}$, alors A_i est le séparé de B'_i , $A_i = B'_i / \bigcap_{k \geq 0} \pi^k B'_i$, ou encore, $A_i = B_i / \bar{J}_i$, où \bar{J}_i est l'adhérence π -adique de J_i .

Remarque IV.1.26. Si $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathrm{Spf}(A)$ est un éclatement formel admissible et si A est topologiquement de type fini sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$, alors $\Gamma(\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{\pi}]) = A[\frac{1}{\pi}]$ (théorème d'acyclicité de Tate qui, lorsque \mathcal{O}_K est de valuation discrète, résulte du théorème de changement de base propre formel en cohomologie cohérente de EGA III). Mais, pour les schémas formels plus généraux que nous considérons, il n'y a pas de raison pour que cela soit vrai.

Lemme IV.1.27. Soit \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique sans π -torsion et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ un idéal admissible.

- \mathcal{I} est localement libre de rang 1 ssi il est localement principal
- si $(\pi^N) \subset \mathcal{I}$, \mathcal{I} est localement principal ssi $\mathcal{I}/\pi^{N+1} \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ l'est

En particulier, si $(\pi^N) \subset \mathcal{I}$, un morphisme $\psi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$, avec \mathfrak{Y} sans π -torsion, se relève à l'éclatement de \mathcal{I} ssi $(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \cdot \psi^{-1} \mathcal{I}) / \pi^{N+1} \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ est localement principal.

Démonstration. La démonstration ne pose pas de problème. \square

Lemme IV.1.28. Soit \mathfrak{Z} comme précédemment. Soient $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ deux idéaux admissibles. Soit $\tilde{\mathfrak{Z}}$ l'éclatement formel de \mathcal{I}_1 . Alors l'éclatement formel admissible de $\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2$ s'identifie à l'éclatement formel admissible de l'image réciproque de \mathcal{I}_2 à $\tilde{\mathfrak{Z}}$.

Démonstration. On peut soit le vérifier directement sur la définition de l'éclatement formel admissible, soit en utilisant la propriété universelle des éclatements formels, puisque, si A est un anneau sans π -torsion et I, J deux idéaux de type fini de A contenant une puissance de π , alors IJ inversible $\iff I$ et J sont inversibles. \square

Lemme IV.1.29. Le composé de deux éclatements formels admissibles d'un schéma formel π -adique sans π -torsion quasicompact est un éclatement formel admissible.

Démonstration. On vérifie que la démonstration de la proposition 2.5 de [8], qui repose elle-même sur le lemme 5.1.4 de [24], fonctionne en toute généralité (on

utilise l'hypothèse faite dès le début que tous nos schémas formels sont quasi-séparés). \square

Lemme IV.1.30. *Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion quasicompact et $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}$ un ouvert quasicompact. Alors tout éclatement formel admissible de \mathcal{U} s'étend en un éclatement formel admissible de \mathfrak{X} .*

Démonstration. La démonstration du lemme 2.6. de [8] s'applique. \square

Lemme IV.1.31. *Soit $\varphi : \tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathfrak{Z}$ un éclatement formel admissible. Alors φ est surjectif au niveau des fibres spéciales.*

Démonstration. Par définition de l'éclatement formel admissible, le morphisme induit en fibre spéciale $\tilde{\mathfrak{Z}} \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K \rightarrow \mathfrak{Z} \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K$ est propre. Son image est donc fermée. Soit $\mathcal{U} \subset \mathfrak{Z}$ l'ouvert complémentaire de l'image. Alors $\varphi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ est l'éclatement formel admissible de \mathcal{U} . Il suffit donc de voir que, pour un éclatement formel admissible comme dans l'énoncé, $\tilde{\mathfrak{Z}} \neq \emptyset$. Soit donc $\mathrm{Spf}(R) \subset \mathfrak{Z}$ un ouvert affine non-vide et $f : X \rightarrow \mathrm{Spec}(R)$ l'éclatement de l'idéal $\Gamma(\mathrm{Spf}(R), \mathcal{I})$ dans $\mathrm{Spec}(R)$. D'après la proposition IV.1.24, $\varphi^{-1}(\mathrm{Spf}(R))$ s'identifie au complété π -adique \widehat{X} de X . Mais, si $\widehat{X} = \emptyset$, on a $X = X \otimes_{\mathcal{O}_K} K$. Or, le morphisme $f : X \rightarrow \mathrm{Spec}(R)$ est propre et est un isomorphisme en fibre générique: $X \otimes K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(R[\frac{1}{\pi}])$. Donc si l'on avait $\widehat{X} = \emptyset$, alors $f(X) = \mathrm{Spec}(R[\frac{1}{\pi}]) \subset \mathrm{Spec}(R)$, qui serait donc ouvert/fermé dans $\mathrm{Spec}(R)$, ce qui est impossible, car R est π -adique sans π -torsion. \square

IV.1.9.2 Transformée stricte. Soit $\varphi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$ un morphisme de schémas formels π -adiques sans π -torsion. Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ un idéal admissible. Notons $\tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathfrak{Z}$ l'éclatement formel admissible associé.

Définition IV.1.32. On appelle transformé strict de \mathfrak{Y} relativement à l'éclatement $\tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathfrak{Z}$ l'adhérence schématique de la fibre générique de $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \tilde{\mathfrak{Z}}$.

Proposition IV.1.33. *Le transformé strict de \mathfrak{Y} s'identifie à l'éclatement formel admissible de l'idéal $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \cdot \varphi^{-1}\mathcal{I}$.*

Démonstration. Notons \mathfrak{X} le transformé strict et $\tilde{\mathfrak{Y}}$ l'éclatement formel de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \cdot \varphi^{-1}\mathcal{I}$. Puisqu'il y a une factorisation $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathfrak{Z}$, l'image réciproque à $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \tilde{\mathfrak{Z}}$ de l'idéal \mathcal{I} est un idéal localement principal. Donc, puisque cet idéal est admissible, il devient localement libre de rang 1 sur $\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \tilde{\mathfrak{Z}}$ (lemme IV.1.27). D'après la propriété universelle de $\tilde{\mathfrak{Y}}$, il y a donc un morphisme

$$\mathfrak{X} \rightarrow \tilde{\mathfrak{Y}}$$

Construisons un morphisme dans l'autre sens. D'après la propriété universelle de $\tilde{\mathfrak{Z}}$, le morphisme $\tilde{\mathfrak{Y}} \rightarrow \mathfrak{Z}$ s'étend en un morphisme $\tilde{\mathfrak{Y}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{Z}}$. Il fournit donc un morphisme

$$\tilde{\mathfrak{Y}} \rightarrow \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \tilde{\mathfrak{Z}}$$

Mais, grâce à la propriété caractérisant l'adhérence schématique de la fibre générique, ce morphisme se factorise en un morphisme

$$\tilde{\mathfrak{Y}} \longrightarrow \mathfrak{X}$$

On vérifie alors facilement que les deux morphismes précédents sont inverses l'un de l'autre. \square

Exemple IV.1.34. Si $\mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}$ est l'éclatement formel admissible de l'idéal \mathcal{I}_1 et $\mathfrak{X}'' \longrightarrow \mathfrak{X}$ celui de \mathcal{I}_2 , alors $(\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'')^{adh}$ est l'éclatement formel admissible de $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2$.

IV.1.9.3 Commutation à la limite projective. Soit (I, \leq) un ensemble ordonné cofiltrant et $((\mathfrak{Z}_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i \geq j})$ un système projectif de schémas formels π -adiques sans π -torsion tel que les morphismes de transition φ_{ij} soient affines. Soit $i_0 \in I$ fixé et \mathcal{I} un idéal admissible de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}_{i_0}}$. Notons, pour $i \geq i_0$, $\tilde{\mathfrak{Z}}_i$ l'éclatement formel de l'image réciproque de \mathcal{I} . On a donc un système projectif $(\tilde{\mathfrak{Z}}_i)_{i \in I}$. D'après la proposition IV.1.33, les morphismes de transition de cette tour sont affines.

Proposition IV.1.35. La limite projective $\varprojlim_{i \geq i_0} \tilde{\mathfrak{Z}}_i$ coïncide avec l'éclatement formel de l'image réciproque à $\varprojlim_i \mathfrak{Z}_i$ de \mathcal{I} .

Démonstration. Il suffit d'utiliser les propriétés universelles des éclatements et limites projectives pour construire deux morphismes inverses l'un de l'autre. \square

IV.2 La topologie des ouverts admissibles

IV.2.1 La catégorie des ouverts admissibles

Définition IV.2.1. Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion quasicompact. Soit $\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}$ la catégorie dont les objets sont les éclatements formels admissibles de \mathfrak{X} et les morphismes sont les morphismes de \mathfrak{X} -schémas formels.

On note $\mathcal{O}Ec_{\mathfrak{X}}$ la catégorie fibrée au-dessus de $\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}$ telle que

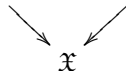
- la fibre au-dessus de $(\mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}) \in \text{Ob}(\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}})$ est la catégorie des ouverts quasicompacts de \mathfrak{X}' , munie des morphismes donnés par l'inclusion
- le foncteur "changement de base" associé à un morphisme $\mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}''$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}' & \longrightarrow & \mathfrak{X}'' \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathfrak{X} & \end{array}$$

dans $\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}$ est le foncteur image réciproque d'un ouvert de \mathfrak{X}'' à \mathfrak{X}' .

On notera souvent $(\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X})$ un objet de $\mathcal{O}Ec_{\mathfrak{X}}$, où \mathcal{U} est un ouvert quasicompact de l'éclatement \mathfrak{X}' de \mathfrak{X} .

D'après le lemme IV.1.28, la catégorie $\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}$ est cofiltrante. Plus précisément, étant donnés deux objets de $\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}$, il existe au plus un morphisme entre deux tels objets et si $\mathfrak{X}' \quad \mathfrak{X}''$ est un diagramme d'éclatements, alors $(\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'')^{adh}$



domine ce diagramme. Ainsi, la catégorie $\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}$ est la catégorie associée à un ensemble ordonné dans lequel toute partie finie possède une borne supérieure.

Définition IV.2.2. On note $Ad_{\mathfrak{X}}$ la catégorie $\varinjlim_{\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}c_{\mathfrak{X}}$ (cf. section 6 de l'exposé

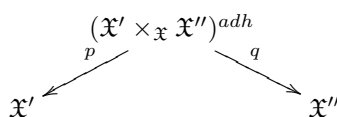
VI de SGA4 tome 2 [15]). Il s'agit de la catégorie des ouverts admissibles quasi-compacts.

Le lemme qui suit donne une définition concrète de $Ad_{\mathfrak{X}}$.

Lemme IV.2.3. Les objets de $Ad_{\mathfrak{X}}$ sont les ouverts quasicompacts des éclatements formels admissibles de \mathfrak{X} . Si $\mathfrak{X}' \quad \mathfrak{X}''$ est un diagramme d'éclatements,



$\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}'$ et $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}''$ sont deux tels ouverts, si $(\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'')^{adh}$ désigne l'adhérence schématique de la fibre générique de $\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}''$



on a $\text{Hom}_{Ad_{\mathfrak{X}}}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \neq \emptyset$ ssi $p^{-1}(\mathcal{U}) \subset q^{-1}(\mathcal{V})$ et si c'est le cas, alors cet ensemble d'homomorphismes est constitué d'un seul élément.

Démonstration. Tout éclatement dominant \mathfrak{X}' et \mathfrak{X}'' se factorise de façon unique par $(\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'')^{adh}$. Par définition de la catégorie limite inductive, il suffit alors de voir que si $\mathfrak{X}''' \xrightarrow{h} (\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'')^{adh}$ est tel que $h^{-1}(p^{-1}(\mathcal{U})) \subset h^{-1}(q^{-1}(\mathcal{V}))$, alors $p^{-1}(\mathcal{U}) \subset q^{-1}(\mathcal{V})$. Mais cela résulte de la surjectivité des morphismes induits par les éclatements au niveau des fibres spéciales, c'est-à-dire le lemme IV.1.31. \square

IV.2.2 La topologie et le topos admissible

Définition IV.2.4. Soit \mathfrak{Z} un schéma formel π -adique. On note $|\mathfrak{Z}|_{qc}$ la prétopologie des ouverts quasicompacts de \mathfrak{Z} dont les recouvrements sont les recouvrements usuels par un nombre fini d'ouverts. Pour $\mathcal{U} \subset \mathfrak{Z}$ un ouvert quasicompact, on note $\text{Cov}_{|\mathfrak{Z}|_{qc}}(\mathcal{U})$ ces recouvrements.

Remarque IV.2.5. Pour vérifier que $|\mathfrak{Z}|_{qc}$ vérifie bien les axiomes d'une prétopologie, il faut utiliser le fait que \mathfrak{Z} est quasi-séparé (hypothèse faite sur tous nos schémas formels).

Remarque IV.2.6. Si $|\mathfrak{J}|$ désigne la topologie usuelle, il y a un foncteur pleinement fidèle continu $|\mathfrak{J}|_{qc} \rightarrow |\mathfrak{J}|$, qui induit une équivalence de topos $|\mathfrak{J}|^{\sim} \xrightarrow{\sim} |\mathfrak{J}|_{qc}^{\sim}$, puisque les ouverts quasicompacts forment une famille génératrice de la topologie de $|\mathfrak{J}|$ (il s’agit d’une simple application du “lemme de comparaison”, le théorème 4.1 de SGA4 tome 1, exposé III).

Les familles

$$\mathcal{O}\mathcal{E}_{\mathfrak{X}} \ni (\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \mapsto \text{Cov}_{|\mathfrak{X}'|_{qc}}(\mathcal{U})$$

satisfont aux hypothèses du paragraphe 8.3. de [15] et définissent donc, d’après la proposition 8.3.6 de cet exposé, une prétopologie sur $\text{Ad}_{\mathfrak{X}}$, appelée prétopologie admissible.

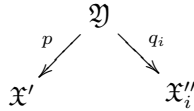
Concrètement, on vérifie avec les définitions de l’exposé 6 de SGA4 que

Lemme IV.2.7. *Soit $(\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \in \text{Ob}(\text{Ad}_{\mathfrak{X}})$ un ouvert admissible quasicompact. Alors, les recouvrements de \mathcal{U} pour la prétopologie admissible sont les familles de morphismes vers \mathcal{U} dans $\text{Ad}_{\mathfrak{X}}$, isomorphes aux familles finies $(\mathcal{V}_i)_{i \in I}$ d’ouverts quasicompacts d’un éclatement $\mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X}$ dominant $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'' \xrightarrow{h} \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$, telles que*

$$h^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i$$

De façon encore plus concrète, on a

Lemme IV.2.8. *Soit $(\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \in \text{Ob}(\text{Ad}_{\mathfrak{X}})$ un ouvert admissible quasicompact. Les recouvrements de \mathcal{U} pour la prétopologie admissibles sont les familles finies $(\mathcal{V}_i \subset \mathfrak{X}''_i \rightarrow \mathfrak{X})_{i \in I}$ telles que si \mathfrak{Y} désigne l’adhérence de la fibre générique de $\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} (\times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}''_i)$ (la borne supérieure de tous les éclatements précédents)*



alors $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{i \in I} q_i^{-1}(\mathcal{V}_i)$.

Démonstration. Il suffit d’utiliser le lemme précédent couplé au fait que les éclatements sont surjectifs en fibre spéciale (lemme IV.1.31), qui implique qu’une famille d’ouverts Zariski recouvre un ouvert donné ssi c’est le cas après un éclatement. \square

IV.2.3 Le topos admissible

Soit, pour tout $(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \in \mathcal{E}_{\mathfrak{X}}$, le topos $|\mathfrak{X}'|^{\sim} = |\mathfrak{X}'|_{qc}^{\sim}$. Si $\mathfrak{X}'' \xrightarrow{h} \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ est un

morphisme dans $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}}$, il y a alors un morphisme de topos

$$(h^*, h_*) : |\mathfrak{X}''|^{\sim} \rightarrow |\mathfrak{X}'|^{\sim}$$

Lorsque \mathfrak{X}' varie, cela donne naissance à un topos fibré au-dessus de la petite catégorie $\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}$, au sens de l'exposé VI de SGA 4.

Définition IV.2.9. On note $(\mathfrak{X}^{\text{rig}})^{\sim}$ le topos limite projective

$$\lim_{\leftarrow (\mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}) \in \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}} |\mathfrak{X}'|^{\sim}$$

au sens de la section 8 de l'exposé VI de SGA 4. On l'appelle topos rigide admissible de \mathfrak{X} .

D'après le théorème 8.2.9 de [15], ce topos s'identifie à la catégorie limite projective

$$\lim_{\leftarrow (\mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}) \in \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}} |\mathfrak{X}'|^{\sim}$$

où les morphismes de transition sont, pour $h : \mathfrak{X}'' \longrightarrow \mathfrak{X}'$ un morphisme entre éclatements, le morphisme $h_* : |\mathfrak{X}''|^{\sim} \longrightarrow |\mathfrak{X}'|^{\sim}$. Concrètement, un objet de ce topos est un système de faisceaux $(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}'})_{\mathfrak{X}' \in \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}} \in \prod_{\mathfrak{X}' \in \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}} |\mathfrak{X}'|^{\sim}$, muni d'isomorphismes $\forall h : \mathfrak{X}'' \longrightarrow \mathfrak{X}'$

$$\alpha_h : h_* \mathcal{F}_{\mathfrak{X}''} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathfrak{X}'}$$

vérifiant une condition de cocycle évidente.

Exemple IV.2.10. Si \mathfrak{X} est topologiquement de type fini sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$, alors, d'après le théorème d'acyclicité de Tate, ce topos est muni d'un "faisceau structural" $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$, dont la "composante" sur l'éclatement \mathfrak{X}' est le faisceau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{\pi}] \in |\mathfrak{X}'|^{\sim}$. En général, pour des \mathfrak{X} avec lesquels nous travaillons, cela est faux (cf. remarque IV.1.26). Plus généralement, toujours si \mathfrak{X} est topologiquement de type fini sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$, si \mathcal{F} est un faisceau cohérent sur \mathfrak{X} , alors $(h : \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}) \mapsto h^* \mathcal{F}[\frac{1}{\pi}]$ définit un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ -modules sur $(\mathfrak{X}^{\text{rig}})^{\sim}$.

Proposition IV.2.11. *Le topos $(\mathfrak{X}^{\text{rig}})^{\sim}$ s'identifie au topos des faisceaux sur $Ad_{\mathfrak{X}}$, muni de la topologie admissible.*

Démonstration. C'est une conséquence des résultats de la section 8.3 de [15]. \square

IV.2.4 Topos limite projective contre topos total

On renvoie à la section 8.5 de [15] pour les généralités concernant le lien entre une limite projective de topos fibré et son topos total.

Traduisons les résultats de cette section 8.5 de [15] dans le cas du topos rigide admissible.

Définition IV.2.12. Soit le topos fibré sur la catégorie $\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}$ qui à $(\mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}) \in \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}$ associe $|\mathfrak{X}'|^{\sim}$. On note $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ le topos total associé.

Concrètement, $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ est la catégorie des

$$(\mathcal{F}_{(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X})}) \in \prod_{(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \in \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}} |\mathfrak{X}'|^{\sim},$$

munis de morphismes

$$\forall \mathfrak{X}'' \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \mathfrak{X}' \\ \searrow \quad \swarrow \\ \mathfrak{X} \end{array}, \quad \alpha_h : \mathcal{F}_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}} \longrightarrow h_* \mathcal{F}_{(\mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X})}$$

vérifiant une certaine condition de cocycle. Comparé au topos limite projective, on relâche donc la condition pour α_h d'être un isomorphisme. Il y a un morphisme de topos

$$Q : (\mathfrak{X}^{\text{rig}})^{\sim} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$$

tel que

$$Q_*((\mathcal{F}_{(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X})}), (\alpha_h)) = ((\mathcal{F}_{(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X})}), (\alpha_h))$$

Voici une description du foncteur image réciproque

Lemme IV.2.13. *Soit $\mathcal{F} = ((\mathcal{F}_{(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X})}), (\alpha_h)) \in \mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$. Alors*

$$Q^* \mathcal{F} = ((\mathcal{G}_{(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X})}), (\beta_h)), \quad \text{où } \mathcal{G}_{(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X})} = \varinjlim_{(\mathfrak{X}'' \xrightarrow{h} \mathfrak{X}')} h_* \mathcal{F}_{(\mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X})}$$

Démonstration. Il s'agit d'une application de la proposition 8.5.3 de [15] (pour tout $h : \mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X}'$, $h_* : |\mathfrak{X}''|^{\sim} \rightarrow |\mathfrak{X}'|^{\sim}$ commute aux petites limite projectives filtrantes, d'après le théorème 5.1 de [15], h étant un morphisme cohérent). \square

Exemple IV.2.14. Il y a un faisceau de \mathcal{O}_K -algèbres \mathcal{A} , défini par $((\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \mapsto \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}) \in \mathcal{T}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$. Alors $Q^* \mathcal{A}$ est le faisceau sur $(\mathfrak{X}^{\text{rig}})^{\sim}$, qui à un ouvert admissible $(\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X})$ associe

$$\varinjlim_{(\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}) \in \mathcal{E}c_{\mathcal{U}}} \Gamma(\mathcal{U}', \mathcal{O}_{\mathcal{U}'})$$

Il s'agit du faisceau associé au préfaisceau, qui à un ouvert admissible $(\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X})$ associe $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$. Lorsque \mathfrak{X} est topologiquement de type fini sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}} := \mathcal{A}[\frac{1}{\pi}]$ est le faisceau structural de l'espace rigide (qui, d'après la remarque IV.2.10, se définit sans Q^* , c'est déjà un faisceau sur la limite projective) tandis que \mathcal{A} est le sous-faisceau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}^+$ des fonctions rigides de norme infini ≤ 1 (cf. [19] dans le contexte des espaces adiques). Ainsi, lorsque \mathfrak{X} n'est pas forcément topologiquement de type fini sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ et que le théorème d'acyclicité de Tate n'est pas vérifié, le faisceau $\mathcal{A}[\frac{1}{\pi}]$ définit un faisceau structural sur $(\mathfrak{X}^{\text{rig}})^{\sim}$, qui, d'après le lemme précédent, s'obtient en "forçant" le théorème d'acyclicité de Tate.

IV.2.5 Functorialité de la topologie et du topos admissible

IV.2.5.1 Espaces rigides

Définition IV.2.15. On appelle catégorie des espaces rigides quasicompacts le localisé de la catégorie des schémas formels π -adiques sans π -torsion quasicompacts relativement aux flèches données par les éclatements formels admissibles.

Si $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ sont deux schémas formels π -adiques sans π -torsion, on note $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$ l'objet associé dans la catégorie des espaces rigides.

On vérifie, grâce aux propriétés des éclatements formels admissibles, que cet ensemble de flèches permet un calcul des fractions à gauche. On a donc

$$\text{Hom}(\mathfrak{X}^{\text{rig}}, \mathfrak{Y}^{\text{rig}}) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ (\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \in \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}}} \text{Hom}(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y})$$

Exemple IV.2.16. Le foncteur $\mathcal{A}d_{\mathfrak{X}} \rightarrow (\text{Espaces rigides}/\mathfrak{X}^{\text{rig}})$, qui à $(\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X})$ associe $\mathcal{U}^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{X}^{\text{rig}}$, est pleinement fidèle. Cela résulte du lemme IV.1.30. Cela permet de voir la catégorie des ouverts admissibles quasicompacts de \mathfrak{X} comme une sous-catégorie pleine de la catégorie (Espaces rigides/ $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$).

Remarque IV.2.17. Pour les espaces non-quasicompacts, la bonne définition de la catégorie des espaces rigides (quasi-séparés) n'est pas le localisé de la catégorie des schémas formels π -adiques sans π -torsion relativement aux éclatements formels admissibles. Si \mathfrak{X} est un tel schéma formel non-quasicompact, il faut voir l'espace rigide associé à \mathfrak{X} comme un faisceau sur le gros site admissible limite inductive $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathcal{U} \subset \mathfrak{X}}} \mathcal{U}^{\text{rig}}$, où \mathcal{U} parcourt les ouvert quasicompacts de \mathfrak{X} .

IV.2.5.2 Functorialité en les schémas formels. Soit $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme de schémas formels π -adiques sans π -torsion quasicompacts. Les schémas formels \mathfrak{X} et \mathfrak{Y} étant quasi-séparés quasicompacts un tel morphisme est quasicompact. Il induit un foncteur

$$\mathcal{E}c(f) : \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathcal{E}c_{\mathfrak{Y}}$$

qui à l'éclatement $(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X})$ associe le transformé strict de \mathfrak{Y} , c'est-à-dire $(\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}')^{\text{adh}}$.

Il induit également un morphisme cartésien de catégories fibrées

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{E}c(f)} & \mathcal{O}\mathcal{E}c_{\mathfrak{Y}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}} & \xrightarrow{\mathcal{E}c(f)} & \mathcal{E}c_{\mathfrak{Y}} \end{array}$$

qui en fait un morphisme de sites fibrés, lorsqu'on munit les fibres de la topologie des ouverts Zariski quasi-compacts (cf. section précédente). Il induit donc par

passage à la limite inductive un morphisme de sites

$$Ad(f) : Ad_{\mathfrak{Y}} \longrightarrow Ad_{\mathfrak{X}}$$

entre les sites des ouverts admissibles quasicompacts de \mathfrak{X} et \mathfrak{Y} . D'où un morphisme de topos

$$(f^*, f_*) : (\mathfrak{Y}^{\text{rig}})^{\sim} \longrightarrow (\mathfrak{X}^{\text{rig}})^{\sim}$$

qui est le morphisme de topos induit par passage à la limite projective entre les topos fibrés au-dessus de $\mathcal{E}c_{\mathfrak{Y}}$ et $\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}$.

IV.2.5.3 Functorialité en les espaces rigides

Proposition IV.2.18. *Soit $f : \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}$ un éclatement formel admissible. Alors $Ad(f) : Ad_{\mathfrak{X}'} \longrightarrow Ad_{\mathfrak{X}}$, resp. $(f^*, f_*) : (\mathfrak{X}'^{\text{rig}})^{\sim} \longrightarrow (\mathfrak{X}^{\text{rig}})^{\sim}$, est une équivalence de sites, resp. de topos.*

Démonstration. Tout a été fait pour. \square

Corollaire IV.2.19. *Le site admissible quasicompact et le topos admissible sont “fonctoriels” dans la catégorie des espaces rigides quasicompacts: pour X un espace rigide quasicompact on peut définir $|X|^{\sim}$ son topos admissible, son site des ouverts admissibles quasicompacts Ad_X et un morphisme d'espaces rigides induit, un morphisme de topos et de sites.*

IV.2.6 Commutation des topos admissibles à la limite projective

Soit (I, \leq) un ensemble ordonné cofiltrant et $(\mathfrak{X}_i)_{i \in I}$ un système projectif de schémas formels π -adiques sans π -torsion quasicompacts tel que les morphismes de transition $\forall i \geq j, \varphi_{ij} : \mathfrak{X}_i \longrightarrow \mathfrak{X}_j$, soient affines. Soit

$$\mathfrak{X}_{\infty} = \varprojlim_{i \in I} \mathfrak{X}_i$$

(cf. section IV.1.7).

IV.2.6.1 Rigidité des éclatements

Lemme IV.2.20. *Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion, \mathfrak{Y} un \mathfrak{X} -schéma formel π -adique sans π -torsion et $\mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}$ l'éclatement formel admissible d'un idéal \mathcal{I} tel que $\pi^N \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{I}$. Alors l'application de réduction modulo π^{N+1}*

$$\text{Hom}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}') \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^{N+1}}}(\mathfrak{Y} \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^{N+1}}, \mathfrak{X}' \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^{N+1}})$$

est une bijection.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme IV.1.27, puisque si $f : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$, alors $\text{Hom}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}')$ est non-vide ssi l'idéal $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}} \cdot f^{-1}\mathcal{I}/\pi^{N+1}\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$ est localement principal, et si c'est le cas, $\text{Hom}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}')$ est constitué d'un seul élément. \square

IV.2.6.2 Décomplétion des éclatements et des morphismes entre eux

Proposition IV.2.21.

1. Soit $\mathfrak{X}'_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty$ un éclatement formel admissible. Il existe alors $i_0 \in I$ et un éclatement formel admissible $\mathfrak{X}'_{i_0} \longrightarrow \mathfrak{X}_{i_0}$ tel que

$$\mathfrak{X}'_\infty = \varinjlim_{i \geq i_0} (\mathfrak{X}'_{i_0} \times_{\mathfrak{X}_{i_0}} \mathfrak{X}_i)^{adh}$$

où $(\mathfrak{X}'_{i_0} \times_{\mathfrak{X}_{i_0}} \mathfrak{X}_i)^{adh}$ désigne le transformé strict de $\mathfrak{X}_i \longrightarrow \mathfrak{X}_{i_0}$.

2. Soit

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}'_\infty & & \\ \downarrow f_\infty & \searrow & \\ & & \mathfrak{X}_\infty \\ & \nearrow & \\ \mathfrak{X}''_\infty & & \end{array}$$

un morphisme entre éclatements. Il existe alors $i_0 \in I$ et un morphisme entre éclatements

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}'_{i_0} & & \\ \downarrow f_{i_0} & \searrow & \\ & & \mathfrak{X}_{i_0} \\ & \nearrow & \\ \mathfrak{X}''_{i_0} & & \end{array}$$

tel que $\mathfrak{X}'_{i_0} \longrightarrow \mathfrak{X}_{i_0}$, resp. $\mathfrak{X}''_{i_0} \longrightarrow \mathfrak{X}_{i_0}$, induise l'éclatement $\mathfrak{X}'_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty$, resp. $\mathfrak{X}''_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty$, au sens du point précédent, et f_{i_0} induise f_∞ .

Démonstration. Démontrons le premier point. Soit $\mathcal{I}_\infty \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\infty}$ l'idéal admissible définissant l'éclatement $\mathfrak{X}'_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\pi^N \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\infty} \subset \mathcal{I}_\infty$. Étant donné que l'idéal $\mathcal{I}_\infty / \pi^N \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\infty}$ est de type fini, \mathfrak{X}_∞ quasicompact, $\mathfrak{X}_\infty \otimes \mathcal{O}_K / \pi^N \mathcal{O}_K = \varinjlim_{i \in I} \mathfrak{X}_i \otimes \mathcal{O}_K / \pi^N \mathcal{O}_K$, il existe $i_0 \in I$ et un idéal \mathcal{I}_{i_0} admissible de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{i_0}}$ tel que $\pi^N \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{i_0}} \subset \mathcal{I}_{i_0}$ et

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\infty} \cdot \mathcal{I}_{i_0} = \mathcal{I}_\infty$$

Le premier point résulte alors de la proposition IV.1.35.

Démontrons le second point. On peut appliquer la proposition IV.2.20, ou reprendre son argument, ce que nous faisons. Soient \mathcal{I}_∞ , resp. \mathcal{J}_∞ , les idéaux admissibles définissant $\mathfrak{X}'_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty$, resp. $\mathfrak{X}''_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty$. Supposons que $\pi^N \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\infty} \subset \mathcal{I}_\infty$ et $\pi^N \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\infty} \subset \mathcal{J}_\infty$. Soient $i_1 \in I$, $\mathcal{I}_{i_1} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{i_1}}$, resp. $\mathcal{J}_{i_1} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{i_1}}$, tels que $\mathcal{I}_\infty = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\infty} \cdot \mathcal{I}_{i_1}$, resp. $\mathcal{J}_\infty = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_\infty} \cdot \mathcal{J}_{i_1}$, comme dans le point précédent.

Pour $i \geq i_1$, soit $\mathfrak{X}'_i \rightarrow \mathfrak{X}_i$, resp. $\mathfrak{X}''_i \rightarrow \mathfrak{X}_i$, l'éclatement de l'idéal $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_i} \cdot \mathcal{I}_{i_1}$, resp. $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_i} \cdot \mathcal{J}_{i_1}$. Il existe un morphisme f_i

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}'_i & & \\ \downarrow & \searrow & \\ f_i \downarrow & & \mathfrak{X}_i \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathfrak{X}''_i & & \end{array}$$

ssi $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_i} \cdot \mathcal{J}_{i_1}$ est localement libre de rang 1 (et si un tel morphisme existe il est unique et induit nécessairement f_∞). Mais, d'après le lemme IV.1.27, cela est équivalent à ce que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_i} \cdot \mathcal{J}_{i_1} / \pi^{N+1} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_i}$ soit localement principal. Or, l'existence de f_∞ implique que $\lim_{i \geq i_1} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_i} \cdot \mathcal{J}_{i_1} / \pi^{N+1} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_i}$ est localement principal. L'idéal $\mathcal{J}_{i_1} / \pi^{N+1} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{i_1}}$ étant de type fini et \mathfrak{X}'_∞ quasicompact, on en déduit l'existence de $i_0 \geq i_1$ tel que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_{i_0}} \cdot \mathcal{J}_{i_1} / \pi^{N+1} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_{i_0}}$ soit principal. \square

Corollaire IV.2.22. Soit \mathcal{P} la catégorie fibrée au-dessus de I de fibre en $i \in I$ $\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}_i}$ et telle que, pour $i \geq j$, le foncteur "changement de base" $\mathcal{E}c_{\mathfrak{X}_j} \rightarrow \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}_i}$ soit l'application "transformé strict". Alors, le foncteur naturel

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ I}} \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}_\infty}$$

défini par la proposition IV.1.35 induit une équivalence de catégories.

IV.2.6.3 La limite inductive des ouverts admissibles quasicompacts sont les ouverts admissibles quasicompacts de la limite projective. Reprenons les notations de la section précédente.

Lorsque i varie dans I , les catégories des ouverts admissibles quasicompacts $\mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_i}$ forment une catégorie fibrée sur I . On s'intéresse à la catégorie

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} \mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_i} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ (\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \in \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}_i}}} |\mathfrak{X}'|_{qc}$$

Pour cela, introduisons la catégorie \mathcal{C} dont les objets sont les couples $(i, \mathfrak{X}'_i \rightarrow \mathfrak{X}_i)$, où $i \in I$ et $(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \in \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}_i}$, et les morphismes sont les diagrammes commutatifs pour $i \rightarrow j$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}'_i & \longrightarrow & \mathfrak{X}'_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}_i & \longrightarrow & \mathfrak{X}_j \end{array}$$

ou, de façon équivalente, un \mathfrak{X}_i -morphisme de \mathfrak{X}'_i vers $(\mathfrak{X}_i \times_{\mathfrak{X}_j} \mathfrak{X}'_j)^{adh}$. Il résulte de cette dernière description que cette catégorie est rigide et on vérifie aisément

qu'elle est cofiltrante. Soit la catégorie fibrée \mathcal{D} au-dessus de \mathcal{C} définie par la fibre au-dessus de $(i, \mathfrak{X}'_i \longrightarrow \mathfrak{X}_i)$ et $|\mathfrak{X}'_i|_{qc}$ la catégorie des ouverts quasicompacts de \mathfrak{X}'_i et les foncteurs de "changement de base" entre fibres sont les foncteurs évidents. Alors

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} \mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_i} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathcal{C}}} \mathcal{D}$$

Pour tout $i \in I$, il y a un foncteur évident

$$\mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_i} \longrightarrow \mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_\infty}$$

qui induit un foncteur cartésien de la catégorie fibrée des $\mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_i}$ lorsque i varie vers la catégorie fibrée $I \times \mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_\infty}$ et donc, d'après la propriété universelle des limites inductives (SGA 5 exposé 6 proposition 6.2), un foncteur

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} \mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_i} \longrightarrow \mathcal{A}d_{\mathfrak{X}}$$

De même, il y a un foncteur cartésien

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_\infty}$$

d'où un foncteur

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathcal{C}}} \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_\infty}$$

compatible à l'identification précédente de $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} \mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_i} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathcal{C}}} \mathcal{D}$.

Proposition IV.2.23. *Le foncteur $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} \mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_i} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathcal{C}}} \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_\infty}$ induit une équivalence de catégories.*

Démonstration. La démonstration résulte facilement de la description concrète de la catégorie limite inductive, de la proposition IV.2.22 et du lemme qui suit. \square

Lemme IV.2.24. *Soit $(Z_i)_{i \in I}$ un système projectif de schémas quasicompacts quasi-séparés dont les morphismes de transition sont affines et $Z_\infty = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i \in I}} Z_i$. On a*

alors une équivalence de catégories $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} |Z_i|_{qc} \xrightarrow{\sim} |Z_\infty|_{qc}$.

IV.2.6.4 La limite inductive des sites admissibles est le site admissible de la limite projective. Lorsque i varie, les $\mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_i}$ munis de leur topologie admissible forment un site fibré. De plus, la famille de prétopologies sur les $\mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_i}$ satisfont aux hypothèses de la section 8.3 de [15] et définissent donc, d'après la proposition 8.3.6 de [15], une prétopologie sur $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} \mathcal{A}d_{\mathfrak{X}_i}$.

Du point de vue du site fibré \mathcal{D} introduit dans la section précédente, lorsque $(i, \mathfrak{X}'_i \longrightarrow \mathfrak{X}) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ varie, la prétopologie $|\mathfrak{X}'_i|_{qc}$ satisfait aux hypothèses de la section 8.3 de [15] et définit donc une prétopologie sur $\varinjlim_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$. Via l'identification entre $\varinjlim_{i \in I} \text{Ad}_{\mathfrak{X}_i}$ et $\varinjlim_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$, ces deux prétopologies coïncident.

Proposition IV.2.25. *L'équivalence de catégories de la proposition IV.2.23 induit une équivalence entre la limite inductive des sites admissibles quasicompacts $\text{Ad}_{\mathfrak{X}_i}$ et le site $\text{Ad}_{\mathfrak{X}_\infty}$ des ouverts admissibles quasicompacts de \mathfrak{X}_∞ . Plus précisément, les prétopologies définies précédemment sur ces deux catégories coïncident via cette équivalence de catégories.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser la description concrète des recouvrements pour la prétopologie, donnée par le lemme IV.2.8, couplée au lemme qui suit. \square

Lemme IV.2.26. *Soit $(Z_i)_{i \in I}$ un système projectif de schémas quasicompacts quasi-séparés dont les morphismes de transition sont affines et $Z_\infty = \varprojlim_{i \in I} Z_i$. Via l'équivalence de catégories du lemme IV.2.24, la prétopologie sur $\varinjlim_{i \in I} |Z_i|_{qc}$ limite inductive des prétopologies, telle que définie dans la section 8.3 de l'exposé 6 de SGA 4, coïncide avec celle sur $|Z_\infty|_{qc}$.*

Démonstration. Il suffit concrètement de montrer que si $i_0 \in I$, $(U_\alpha)_\alpha$ est une famille finie d'ouverts quasicompacts de Z_{i_0} et V un ouvert quasicompact de Z_{i_0} tels que si $p : Z_\infty \longrightarrow Z_{i_0}$ on ait

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} p^{-1}(U_\alpha)$$

il existe alors $i \geq i_0$ tel que, si $\varphi_{ii_0} : Z_i \longrightarrow Z_{i_0}$, on ait

$$\varphi_{ii_0}^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} \varphi_{ii_0}^{-1}(U_\alpha)$$

Cela ne pose aucun problème. \square

IV.2.6.5 La limite projective des topos admissibles est le topos admissible de la limite projective

Proposition IV.2.27. *Il y a une équivalence de topos*

$$\varinjlim_{i \in I} (\mathfrak{X}_i^{\text{rig}})^{\sim} \simeq (\mathfrak{X}_\infty^{\text{rig}})^{\sim}$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition IV.2.25. \square

IV.3 Le point de vue spectral sur la topologie admissible

IV.3.1 Rappels sur les espaces spectraux

On renvoie à [16] pour plus de détails.

Définition IV.3.1 ([16]). Un espace topologique X est dit spectral s'il est quasi-compact sobre et possède une base de sa topologie stable par intersections finies, formée d'ouverts quasicompacts.

Une définition équivalente est "sobre, possède une base d'ouverts quasicompacts et une intersection finie d'ouverts quasicompacts est quasicompacte."

Exemple IV.3.2. Soit X un schéma quasicompact quasi-séparé. Alors $|X|$ est spectral.

On renvoie à [16] pour les propriétés de base des espaces spectraux. On retiendra particulièrement les quelques faits suivants pour X spectral:

- Par définition, un ensemble constructible dans X est un élément de l'algèbre de Boole engendrée par les ouverts quasicompacts (par exemple un fermé constructible est un fermé dont le complémentaire est quasicompact).
- Soit X_{cons} l'ensemble X muni de la topologie engendrée par les ensembles constructibles. Ses ouverts sont les ensembles ind-constructibles et ses fermés sont les ensembles pro-constructibles. Alors X_{cons} est compact!
- Par exemple, si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue quasicompacte entre espaces spectraux, alors $f : X_{cons} \rightarrow Y_{cons}$ est continu et donc l'image d'un ensemble pro-constructible est proconstructible.
- Si Z est proconstructible, alors $\overline{Z} = \cup_{z \in Z} \overline{\{z\}}$, les spécialisations d'éléments de Z , en particulier, Z est fermé ssi il est stable par spécialisation.

IV.3.2 Prétopologie quasicompacte sur les espaces spectraux et passage à la limite projective

Soit X un espace topologique spectral. L'intersection d'un nombre fini d'ouverts quasicompacts de X est quasicompacte. On note alors X_{qc} la catégorie des ouverts quasicompacts de X et on la munit d'une prétopologie en posant

$$\forall U \in X_{qc}, \text{Cov}(U) = \{ \text{familles finies } (V_\alpha)_\alpha \text{ d'ouverts qc. tq. } U = \cup_\alpha V_\alpha \}$$

On note encore X_{qc} pour le site associé.

Le foncteur pleinement fidèle

$$X_{qc} \longrightarrow X$$

induit, d'après le théorème 4.1 de l'exposé III de SGA4, une équivalence de topos

$$(X_{qc})^\sim \xrightarrow{\sim} \tilde{X}$$

Proposition IV.3.3. *Soit (I, \leq) un ensemble ordonné, cofiltrant et $(X_i)_{i \in I}$ un système projectif d'espaces spectraux, dont les morphismes de transition sont quasicompacts. Alors $X_\infty = \varprojlim_{i \in I} X_i$ est un espace spectral. De plus, il y a une*

équivalence de sites

$$\varinjlim_{i \in I} (X_i)_{qc} \xrightarrow{\sim} (X_\infty)_{qc}$$

(plus précisément, les prétopologies des ouverts quasicompacts se correspondent au sens de la section 8.3 de l'exposé 6 de SGA 4) et de topos

$$\widetilde{X_\infty} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i \in I} \widetilde{X_i}$$

Démonstration. Le fait que X_∞ soit spectral est démontré dans [16].

Le résultat sur les prétopologies se montre de la façon suivante. Soit, pour tout $i \in I$, $p_i : X_\infty \rightarrow X_i$ et, $\forall i \geq j$, $\varphi_{ij} : X_i \rightarrow X_j$. Par définition, une base d'ouverts quasicompacts de X_∞ est formée des intersections finies d'ensembles de la forme $p_i^{-1}(U_i)$, où U_i est un ouvert quasicompact de X_∞ . L'ensemble ordonné (I, \leq) étant cofiltrant, une base stable par intersections et unions finies est donc formée des $p_i^{-1}(U_i)$ avec U_i quasicompact dans X_i . De cela, on déduit que tout ouvert quasicompact de X_∞ provient, par image réciproque, d'un ouvert quasicompact en niveau fini. Donc le foncteur

$$\varinjlim_{i \in I} (X_i)_{qc} \rightarrow (X_\infty)_{qc}$$

est essentiellement surjectif.

Montrons la pleine fidélité. Si $U, V \subset X_i$ sont deux ouverts quasicompacts, il s'agit de voir que

$$p_i^{-1}(U) \subset p_i^{-1}(V) \implies \exists j \geq i, \varphi_{ji}^{-1}(U) \subset \varphi_{ji}^{-1}(V)$$

Si $p_i^{-1}(U) \subset p_i^{-1}(V)$, alors

$$\bigcap_{j \geq i} \varphi_{ji}(\varphi_{ji}^{-1}(U)) \subset V$$

Notons, $\forall j \geq i$, $K_j = \varphi_{ji}(\varphi_{ji}^{-1}(U))$. D'après les rappels faits sur les espaces spectraux, les K_j sont compacts pour la topologie constructible sur X_i et V étant quasicompact, il est ouvert pour la topologie constructible. Donc $\bigcap_{j \geq i} K_j \subset V$ et le fait que (I, \leq) soit cofiltrant implique qu'il existe $j \geq i$ tel que $K_j \subset V$. Cela implique $\varphi_{ji}^{-1}(U) \subset \varphi_{ji}^{-1}(V)$. D'où la pleine fidélité.

Le fait que les prétopologies limite inductive et celle de $(X_\infty)_{qc}$ coïncident s'en déduit aisément.

Pour l'équivalence de sites, on utilise une fois de plus les résultats de la section 8.3 de [15], couplés à quelques manipulations élémentaires de topologies. L'équivalence de topos s'en déduit alors, toujours d'après les résultats de l'exposé 6 de SGA 4. \square

IV.3.3 Application au topos admissible

Définition IV.3.4. Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion. On note

$$|\mathfrak{X}^{\text{rig}}| = \varprojlim_{(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \in \mathcal{E}_{c,\mathfrak{X}}} |\mathfrak{X}'|$$

comme espace topologique.

Le corollaire suivant résulte de la proposition précédente.

Corollaire IV.3.5. *L'espace topologique $|\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$ est spectral. Il y a une équivalence de topos*

$$(\mathfrak{X}^{\text{rig}})^\sim \simeq |\mathfrak{X}^{\text{rig}}|^\sim$$

entre le topos admissible et la catégorie des faisceaux sur l'espace spectral $|\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$.

Ainsi, pour un espace rigide $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$, l'espace topologique $|\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$ est l'espace des points du topos admissible associé. L'espace topologique $|\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$ et le topos $(\mathfrak{X}^{\text{rig}})^\sim$ se déterminent mutuellement et la catégorie des ouverts admissibles quasicompacts de $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$ est équivalente à celle des ouverts quasicompacts de $|\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$.

Définition IV.3.6. On note $sp : |\mathfrak{X}^{\text{rig}}| \rightarrow |\mathfrak{X}|$ l'application continue naturelle, que l'on appellera application de spécialisation. D'après le lemme IV.1.31, elle est surjective.

IV.3.4 Description de l'espace $|\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$ comme espace de Zariski-Riemann: le point de vue de Huber et Fujiwara

IV.3.4.1 Rappels sur les anneaux I -valuatifs d'après Fujiwara. Soit A un anneau et I un idéal de A . Dans la section 3.1 de [13], Fujiwara dit que A est I -valuatif si

- $I = (t)$ est principal, où t est régulier
- Tout idéal de type fini dans A contenant une puissance de I est principal (donc inversible).

Le résultat principal de la section 3.1 de [13] peut alors s'énoncer ainsi.

Proposition IV.3.7 ([13], section 3). *Soit A local I -valuatif avec $I \subset \text{Rad } A$, $I = (t)$. Alors*

- $\mathfrak{P} = \bigcap_{n \geq 0} I^n$ est un idéal premier
- $A[\frac{1}{t}]$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{P}[\frac{1}{t}]$
- A/\mathfrak{P} est un anneau de valuation de corps des fractions $A/\mathfrak{P}[\frac{1}{t}]$, le corps résiduel de l'anneau local $A[\frac{1}{t}]$.

IV.3.4.2 Application aux fibres du faisceau structural d'un espace rigide. Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion. On note $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}^+ \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ les faisceaux sur $|\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$, définis dans l'exemple IV.2.14.

Corollaire IV.3.8. Soit $x \in |\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$. Alors le séparé π -adique de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig},x}}^+$, $V = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig},x}}^+ / \bigcap_{n \geq 0} \pi^n \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig},x}}^+$, est un anneau de valuation sans π -torsion, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig},x}}$ est un anneau local d'idéal maximal $(\bigcap_{n \geq 0} \pi^n \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig},x}}^+) [\frac{1}{\pi}]$ et de corps résiduel $V[\frac{1}{\pi}]$.

Démonstration. Il suffit de vérifier les hypothèses de la proposition précédente. Le point $x \in |\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$ correspond à une collection de points $(x_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}})_{(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \in \mathcal{E}_{c_{\mathfrak{X}}}}$, $x_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}'$, telle que si $h : \mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X}'$ est un morphisme entre éclatements alors $h(x_{\mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X}}) = x_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}}$. Alors

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig},x}}^+ = \varinjlim_{(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \in \mathcal{E}_{c_{\mathfrak{X}}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}', x_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}}} \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig},x}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig},x}}^+ [\frac{1}{\pi}]$$

Il est clair que π est régulier dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig},x}}^+$. Si J est un idéal de type fini de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig},x}}^+$ contenant une puissance de π , il provient par image réciproque d'un idéal admissible J' de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$, où $(\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X})$ est un ouvert admissible quasicompact. L'éclatement formel admissible de l'idéal J' de \mathcal{U} s'étend en un éclatement formel admissible de \mathfrak{X}' et donc de \mathfrak{X} . On en déduit donc que J est principal. \square

Définition IV.3.9. Soit $x \in |\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$. On note $k(x)$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig},x}}$, un corps valué, $k(x)^0 = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig},x}}^+ / \bigcap_{n \geq 0} \pi^n \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\text{rig},x}}^+$ son anneau de valuation et $\widetilde{k(x)}$ le corps résiduel de $k(x)^0$.

IV.3.4.3 Anneaux de valuation rigides. On présente ici les anneaux de valuation qui vont nous intéresser.

Soit V un anneau de valuation π -adique sans π -torsion. En particulier, on suppose que la topologie de la valuation est définie par la topologie π -adique. Cela signifie que, si $v : V \rightarrow \Gamma \cup \{+\infty\}$ est la valuation sur V , alors $v(\pi) \neq \infty$ et $v(\pi^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \infty$. Le corps des fractions d'un tel anneau de valuation est $V[\frac{1}{\pi}]$. On remarquera qu'un morphisme entre deux tels anneaux de valuation est injectif.

Définition IV.3.10. On appellera de tels anneaux de valuation des anneaux de valuation rigides.

On supposera toujours que les valeurs de v engendrent Γ . Pour un tel anneau de valuation (V, v) , on a une bijection entre

- Les idéaux premiers de V non nuls
- Les idéaux premiers de $V/\pi V$

- Les sous-groupes convexes de Γ
- Les anneaux de valuation de $V[\frac{1}{\pi}]$ contenant V .

À un idéal premier $\mathfrak{P} \subset V$, on associe le sous-groupe convexe $H = v(V \setminus \mathfrak{P}) \cup -v(V \setminus \mathfrak{P}) = v(V_{\mathfrak{P}}^{\times})$ et l'anneau de valuation $V_{\mathfrak{P}}$. Le sous-groupe H étant convexe, Γ/H est strictement ordonné et c'est le groupe des valeurs de la valuation de $V_{\mathfrak{P}}$. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{v} & \Gamma \cup \{\infty\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_{\mathfrak{P}} & \xrightarrow{v'} & \Gamma/H \cup \{\infty\} \end{array}$$

La valuation $v' : V[\frac{1}{\pi}] \rightarrow \Gamma/H \cup \{\infty\}$ est une généralisation de la valuation v . Deux telles valuations définissent la même topologie sur $V[\frac{1}{\pi}]$.

Les sous-groupes convexes de Γ sont strictement ordonnés, comme le sont les idéaux premiers de V et il existe un plus petit idéal premier \mathfrak{P} non nul dans V , i.e., \mathfrak{P} est de hauteur 1. L'anneau de valuation associé $V_{\mathfrak{P}}$ est alors de hauteur 1 c'est-à-dire que sa valuation est définie par une valuation à valeurs dans \mathbb{R} , muni de l'ordre usuel, qui est une généralisation maximale de la valuation v . Ainsi, la topologie de $V[\frac{1}{\pi}]$ est définie par une valuation à valeurs dans \mathbb{R} .

Dans l'autre sens, étant donné (V, v) comme précédemment, les anneaux de valuation de $V[\frac{1}{\pi}]$ contenus dans V correspondent aux anneaux de valuation du corps résiduel de V , V/\mathfrak{m}_V . À $V' \subset V$, on associe l'image de V' dans V/\mathfrak{m}_V . Ainsi, avec les notations précédentes, le corps résiduel de $V_{\mathfrak{P}}$ est $\text{Frac}(V/\mathfrak{P})$ et $V/\mathfrak{P}V \subset \text{Frac}(V/\mathfrak{P})$ correspond au sous-anneau de valuation V de $V_{\mathfrak{P}}$.

IV.3.4.4 Points rigides. Soit V un anneau de valuation rigide. Tout idéal de type fini dans V est principal, donc, d'après la propriété universelle des éclatements, tout point $x : \text{Spf}(V) \rightarrow \mathfrak{X}$ s'étend de manière unique en un système compatible de points

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{X}' \\ & \nearrow & \downarrow \\ \text{Spf}(V) & \rightarrow & \mathfrak{X} \end{array}$$

pour $(\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \in \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}$. L'image du point fermé de $\text{Spf}(V)$ définit donc un élément de $|\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$.

Réciproquement, étant donné $x \in \mathfrak{X}^{\text{rig}}$, d'après la section précédente, il fournit un morphisme $\text{Spf}(\widehat{k(x)^0}) \rightarrow \mathfrak{X}$, qui redonne le point x grâce à la construction précédente.

On obtient ainsi la description

Proposition IV.3.11. *Il y a une bijection entre $|\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$ et les classes de points $\text{Spf}(V) \rightarrow \mathfrak{X}$, où V est un anneau de valuation rigide et deux points $\text{Spf}(V_1) \rightarrow$*

$\mathfrak{X}, \mathrm{Spf}(V_2) \longrightarrow \mathfrak{X}$ sont équivalents s'il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spf}(V_1) & & \\ & \searrow & \\ & & \mathrm{Spf}(V_3) \longrightarrow \mathfrak{X} \\ & \nearrow & \\ \mathrm{Spf}(V_2) & & \end{array}$$

où les morphismes entre spectres formels d'anneaux de valuation envoient le point fermé sur le point fermé (i.e., il s'agit de la relation de dominance des anneaux de valuation).

En particulier,

Corollaire IV.3.12. Soit $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$. Alors $|\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}|$ est l'ensemble des classes de valuations $v : A \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ telles que

- $v(A)$ engendre le groupe des valeurs de la valuation
- $v(\pi) \neq \infty$
- $v(\pi^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \infty$, i.e., $\forall \gamma \in \Gamma, \exists n \in \mathbb{N}, nv(\pi) \geq \gamma$

et deux valuations (v_1, Γ_1) et (v_2, Γ_2) sont équivalentes s'il existe un isomorphisme de groupes ordonnés $\alpha : \Gamma_1 \xrightarrow{\sim} \Gamma_2$ tel que $\alpha \circ v_1 = v_2$.

Définition IV.3.13. Pour A comme précédemment, on notera $\mathrm{Spa}(A)$ l'ensemble des valuations précédentes. On munit $\mathrm{Spa}(A)$ de la topologie induite par la topologie $|\mathrm{Spf}(A)^{\mathrm{rig}}|$.

Avec les notations de Huber, lorsque A est topologiquement de type fini sur \mathcal{O}_K , c'est ce que Huber note $\mathrm{Spa}(A^\triangleright, A^+)$, où $A^\triangleright = A[\frac{1}{\pi}]$ et A^+ est la fermeture intégrale de A dans $A[\frac{1}{\pi}]$.

Enfin, notons le lemme suivant qui donne une définition plus pratique de $|\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}|$.

Lemme IV.3.14. Il y a une bijection entre $|\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}|$ et les classes d'équivalences de points $\mathrm{Spf}(V) \longrightarrow \mathfrak{X}$, où V est un anneau de valuation rigide et deux points $\mathrm{Spf}(V_1) \longrightarrow \mathfrak{X}, \mathrm{Spf}(V_2) \longrightarrow \mathfrak{X}$ sont équivalents ssi il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Spf}(V_1) & \\ & \nearrow & \searrow \\ \mathrm{Spf}(V') & & \mathfrak{X} \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathrm{Spf}(V_2) & \end{array}$$

où V' est un anneau de valuation rigide tel que les morphismes $\mathrm{Spf}(V') \longrightarrow \mathrm{Spf}(V_1), \mathrm{Spf}(V') \longrightarrow \mathrm{Spf}(V_2)$ envoient le point fermé sur le point fermé.

Démonstration. La condition est évidemment suffisante. Réciproquement, avec les notations de la proposition IV.3.11, il suffit de voir qu'il existe un élément de $|(\mathrm{Spf}(V_1) \times_{\mathrm{Spf}(V_3)} \mathrm{Spf}(V_2))^{\mathrm{rig}}|$ s'envoyant sur les points fermés dans

$$|\mathrm{Spec}(V_1/\pi V_1)| \times_{|\mathrm{Spec}(V_3/\pi V_3)|} |\mathrm{Spec}(V_2)|.$$

Mais cela résulte de la surjectivité de

$$\begin{aligned} & |\mathrm{Spec}(V_1/\pi V_1) \times_{\mathrm{Spec}(V_2/\pi V_2)} \mathrm{Spec}(V_3/\pi V_3)| \\ & \longrightarrow |\mathrm{Spec}(V_1/\pi V_1)| \times_{|\mathrm{Spec}(V_3/\pi V_3)|} |\mathrm{Spec}(V_2)| \end{aligned}$$

et de la surjectivité du morphisme de spécialisation (lemme IV.3.6)

$$sp : |(\mathrm{Spf}(V_1) \times_{\mathrm{Spf}(V_3)} \mathrm{Spf}(V_2))^{\mathrm{rig}}| \longrightarrow |\mathrm{Spf}(V_1) \times_{\mathrm{Spf}(V_3)} \mathrm{Spf}(V_2)|. \quad \square$$

IV.3.4.5 Topologie de l'espace de Zariski-Riemann

Définition IV.3.15. Soit A un anneau π -adique sans π -torsion. Soient $g, f_1, \dots, f_n \in A$ tels que l'idéal engendré dans A contienne une puissance de π . Soit $X = \mathrm{Spa}(A)$. On note

$$X \left\langle \frac{f_1, \dots, f_n}{g} \right\rangle = \{v \in \mathrm{Spa}(A) \mid \forall i, v(f_i) \geq v(g)\}$$

Ainsi, si l'idéal (f_1, \dots, f_n) de A contient une puissance de π , on a un recouvrement

$$\mathrm{Spa}(A) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Spa}(A) \left\langle \frac{f_1, \dots, \hat{f}_i, \dots, f_n}{f_i} \right\rangle$$

Proposition IV.3.16. Soit $X = \mathrm{Spa}(A)$. Alors, lorsque (f_0, f_1, \dots, f_n) varie parmi les familles finies engendrant un idéal contenant une puissance de π , les ensembles $X \left\langle \frac{f_1, \dots, f_n}{f_0} \right\rangle$ forment une base d'ouverts quasicompacts stable par intersections finies de la topologie de $\mathrm{Spa}(A)$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$. Une base d'ouverts quasicompacts de $|\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}|$ est donnée par les $|\mathcal{U}^{\mathrm{rig}}| \subset |\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}|$, où $(\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X})$ est un ouvert admissible de \mathfrak{X} .

Soit I un idéal de type fini dans A contenant une puissance de π . Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $X' = \mathrm{Proj}(\oplus_{k \geq 0} I^k) \longrightarrow X$ l'éclatement de l'idéal I dans X . L'éclatement formel admissible associé est $\mathfrak{X}' = (X')^\wedge$, le complété π -adique de X' . Une base d'ouverts quasicompacts de X' est donnée par

$$\forall n \geq 0, \forall f \in I^n, \{x \in X' \mid f \text{ engendre l'idéal inversible } \mathcal{O}_{X'} \cdot \tilde{I}^n \text{ en } x\}$$

lorsque n et f varient. Les ouverts de \mathfrak{X}' sont les traces d'ouverts de X' sur la fibre spéciale $X' \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K = \mathfrak{X}' \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K$. Pour V un anneau de valuation rigide, il y a une bijection entre les points de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$, $\mathrm{Spf}(V) \longrightarrow \mathfrak{X}'$, et les morphismes

$\mathrm{Spec}(V) \rightarrow X'$. Si $U \subset X'$ est un ouvert et $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}'$ est l'ouvert associé de la fibre spéciale, un morphisme $\mathrm{Spf}(V) \rightarrow \mathfrak{X}'$ se factorise par \mathcal{U} ssi le morphisme associé $\mathrm{Spec}(V) \rightarrow X'$ se factorise par U .

Maintenant, si $n \geq 0$, $I^n = (f_1, \dots, f_n)$ et $g \in I^n$, alors un morphisme $\alpha : A \rightarrow V$ et donc $\mathrm{Spec}(V) \rightarrow X' \rightarrow X = \mathrm{Spec}(A)$ se factorisent par l'ouvert où g engendre $\mathcal{O}_{X'} \cdot \tilde{I}^n$ ssi $(\alpha(g))$ engendre $(\alpha(f_1), \dots, \alpha(f_n))$ dans V , c'est-à-dire ssi $\forall i, v(\alpha(f_i)) \geq v(\alpha(g))$. \square

Lorsque A est topologiquement de type fini sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$, on retrouve donc bien la topologie de l'espace valuatif au sens de Huber ([20] et [18]).

Voici le lemme qui permet de recoller la description précédente dans le cas affine.

Lemme IV.3.17. *Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion quasicompact et $\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ un recouvrement fini de \mathfrak{X} par des ouverts quasicompacts. Alors l'espace topologique $|\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}|$ est obtenu par recollement des $|\mathcal{U}_i^{\mathrm{rig}}|$, $i \in I$, le long des ouverts $|\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j|^{\mathrm{rig}}|$, $i, j \in I$.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme IV.1.30. \square

IV.3.5 Ouverts surconvergens et espace analytique de Berkovich

IV.3.5.1 Générisations dans l'espace de Zariski-Riemann. On vérifie avec les notations de la section IV.3.2 que si $X_\infty = \varprojlim_{i \in I} X_i$ est une limite projective d'espaces spectraux à morphismes de transition quasicompacts, alors

$$\forall x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in X_\infty, \quad x \succ y \iff \forall i \ x_i \succ y_i$$

Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion et $(x_{\mathfrak{X}'})_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}}, (y_{\mathfrak{X}'})_{\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}} \in |\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}|$. Alors $x \succ y \iff \forall (\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}) \in \mathcal{E}c_{\mathfrak{X}}, x_{\mathfrak{X}'} \succ y_{\mathfrak{X}'}$ dans $|\mathfrak{X}'|$ (et il suffit de le vérifier dans un ensemble cofinal d'éclatements puisque les morphismes de transition entre ceux-ci sont propres).

Lemme IV.3.18. *Soit $\mathrm{Spf}(V) \xrightarrow{x} \mathfrak{X}$ un point rigide. Les générations de $[x] \in |\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}|$ sont les points $[x_{\mathfrak{P}}]$ où $x_{\mathfrak{P}} : \mathrm{Spf}(\widehat{V}_{\mathfrak{P}}) \rightarrow \mathrm{Spf}(V) \rightarrow \mathfrak{X}$ (complétion π -adique de $V_{\mathfrak{P}}$) avec \mathfrak{P} un idéal premier non nul dans V .*

Démonstration. Si $y \succ [x]$, où $y \in |\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}|$, alors, d'après les considérations précédentes, $\forall k \geq 1$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, y}^+ / (\pi^k)$ est obtenu comme une localisation de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, [x]}^+ / (\pi^k)$, puisque c'est le cas en niveau fini pour chaque éclatement de \mathfrak{X} . \square

Corollaire IV.3.19. *Si $x \in |\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}|$, l'ensemble des générations de x est totalement ordonné et possède un unique élément maximal associé à une valuation de rang 1. Si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ et x correspond à la valuation $v : A \rightarrow \Gamma \cup \{+\infty\}$, alors l'ensemble des générations de x est en bijection avec l'ensemble totalement ordonné des*

sous-groupes convexes propres de Γ . À $H \subset \Gamma$ convexe est associé $v/H : A \xrightarrow{v} \Gamma \cup \{+\infty\} \longrightarrow \Gamma/H \cup \{+\infty\}$.

Dans le langage de Huber “toutes les g n risations dans $\mathrm{Spa}(A)$ sont des g n risations secondaires” ([20] et [18]).

IV.3.5.2 L’espace analytique de Berkovich associé

Définition IV.3.20. Soit \mathfrak{X} π -adique sans π -torsion quasicompact. On note $|\mathfrak{X}^{an}|$ le plus grand quotient séparé de $|\mathfrak{X}^{rig}|$ que l’on munit de la topologie quotient.

L’ensemble $|\mathfrak{X}^{an}|$ s’identifie à l’ensemble des g n risations maximales de $|\mathfrak{X}^{rig}|$. Ses ouverts correspondent aux ouverts de $|\mathfrak{X}^{rig}|$ stables par spécialisation (les ouverts surconvergents). Les points de $|\mathfrak{X}^{an}|$ sont donc donnés par les points rigides $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L) \longrightarrow \mathfrak{X}$, où $L|K$ est une extension valuée complète pour une valuation $v : L \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Comme dans les lemmes 8.1.5 et 8.1.8. de [19], on peut vérifier que l’ensemble des ouverts surconvergents de $|\mathfrak{X}^{rig}|$ sont les intérieurs des ensembles fermés constructibles de $|\mathfrak{X}^{rig}|$ (cf.  galement le lemme IV.9.10 de ce chapitre). De plus, lorsque $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, la topologie sur $|\mathfrak{X}^{an}|$ est celle engendrée par les ouverts du type

$$\{x \in |\mathfrak{X}^{an}| \mid |f(x)| < |g(x)|\}, \text{ où } f, g \in A$$

Donc $|\mathfrak{X}^{an}|$ s’identifie à l’espace topologie de Berkovich $\mathcal{M}(A[\frac{1}{\pi}])$ associé à l’algèbre de Banach $A[\frac{1}{\pi}]$ (cf. [3]).

IV.4 étude des morphismes finis localement libres rig-étales entre schémas formels

IV.4.1 Morphismes finis localement libres

Soit $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ un morphisme entre schémas formels π -adiques sans π -torsion.

Définition IV.4.1. Le morphisme f est fini localement libre, si le morphisme induit entre schémas $\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ l’est.

Lemme IV.4.2. *Sont équivalents*

- f est fini localement libre
- f est fini topologiquement de présentation finie et topologiquement plat
- Pour tout entier $k \geq 1$, le morphisme induit $\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^k\mathcal{O}_K$ est fini localement libre.

Démonstration. Appliquer le lemme IV.1.15. □

Lemme IV.4.3. *Soit A un anneau π -adique sans π -torsion, M un A -module de type fini π -adiquement séparé (i.e., M est π -adique et $M/\pi M$ est de type fini) tel que $\forall k$, $M/\pi^k M$ soit un $A/\pi^k A$ -module projectif. Alors M est un A -module projectif. En particulier, M est de présentation finie.*

Démonstration. Soit $u : A^n \twoheadrightarrow M$ une surjection. On cherche une section $\epsilon : M \rightarrow A^n$ telle que $u \circ \epsilon = Id$. Pour tout entier $k \geq 1$, notons X_k l'ensemble des sections de $u_k = u \bmod \pi^k$, $u_k : (A/\pi^k A)^n \twoheadrightarrow M/\pi^k M$,

$$X_k = \{\epsilon_k \in \text{Hom}_{A/\pi^k A}(M/\pi^k M, (A/\pi^k A)^n) \mid u_k \circ \epsilon_k = Id\}$$

Par hypothèse, $\forall k$, $X_k \neq \emptyset$. De plus, X_k est un $\text{Hom}_{A/\pi^k A}(M/\pi^k M, \ker u_k)$ -torseur.

Étant donné que dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker u_{k+1} \longrightarrow (A/\pi^{k+1} A)^n \xrightarrow{u_{k+1}} M/\pi^{k+1} M \longrightarrow 0$$

les modules sont projectifs, on obtient, par application de $-\otimes_{A/\pi^{k+1} A} A/\pi^k A$, l'égalité $\ker u_k = \ker u_{k+1}/\pi^k \ker u_{k+1}$. De cela on déduit que $\forall k \geq 1$, l'application

$$\text{Hom}_{A/\pi^{k+1} A}(M/\pi^{k+1} M, \ker u_{k+1}) \longrightarrow \text{Hom}_{A/\pi^k A}(M/\pi^k M, \ker u_k)$$

est surjective. En effet, si $v \in \text{Hom}_{A/\pi^k A}(M/\pi^k M, \ker u_k)$, l'existence de v' dans le diagramme qui suit

$$\begin{array}{ccc} M/\pi^{k+1} M & \xrightarrow{v'} & \ker u_{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M/\pi^k M & \xrightarrow{v} & \ker u_k \end{array}$$

résulte de la projectivité de $M/\pi^{k+1} M$, comme $A/\pi^{k+1} A$ -module.

Donc $\varprojlim_k X_k \neq \emptyset$. □

On montre également aisément le lemme qui suit.

Lemme IV.4.4. *Le lemme précédent reste valable en remplaçant module projectif par module libre.*

Corollaire IV.4.5. *Les assertions suivantes sont équivalentes pour $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ comme précédemment.*

- *Le morphisme f est fini localement libre*
- *f est affine et pour tout ouvert $\text{Spf}(A) \subset \mathfrak{Y}$, si $f^{-1}(\text{Spf}(A)) = \text{Spf}(B)$, alors B est un A -module projectif de type fini*
- *f est affine et il existe un recouvrement affine $(\mathcal{U}_i)_i$ de \mathfrak{Y} , $\mathfrak{U}_i = \text{Spf}(A_i)$, tel que si $f^{-1}(\mathcal{U}_i) = \text{Spf}(B_i)$, alors B_i est un A_i -module libre*

Corollaire IV.4.6. *Soit $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ un morphisme fini localement libre entre schémas formels π -adiques sans π -torsion et un morphisme $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{Y}$, où \mathfrak{Y}' est également π -adique sans π -torsion. Alors le changement de base $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$ est sans π -torsion et est fini localement libre au-dessus de \mathfrak{Y}' . Par exemple, si $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{Y}$ est un éclatement formel admissible, le transformé strict de $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ est $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si A est π -adique sans π -torsion et B une A -algèbre projective de type fini, alors, pour tout changement de base $A \rightarrow A'$ avec A' π -adique sans π -torsion,

$$B \otimes_A A' = B \widehat{\otimes}_A A'$$

En effet, B étant un A -module de type fini, $B \otimes_A A'$ est π -adiquement complet et, étant projectif, il est séparé (il se plonge dans un $(A')^r$ qui est séparé). \square

IV.4.2 Morphismes finis localement libres rig-étales

IV.4.2.1 Algèbres finies de présentation finie rigidifiées: rappels. On rappelle ici une notion introduite dans le chapitre III.2 de [11], auquel on renvoie pour plus de détails.

Soit A un anneau et M un A -module de présentation finie muni d'une présentation

$$A^p \xrightarrow{L} A^q \rightarrow M \rightarrow 0$$

où L est une matrice $q \times p$. Soit le foncteur sur la catégorie des A -algèbres, qui à la A -algèbre B associe l'ensemble des structures de B -algèbres rigidifiées sur $M \otimes_A B$ relativement à la présentation L , au sens de [11] (section III.2). Rappelons que toute structure d'algèbre sur $M \otimes_A B$ possède une telle rigidification. Ce foncteur est représentable par un A -schéma affine de présentation finie $W \rightarrow \text{Spec}(A)$. Soit $V \subset W$ l'ouvert où l'algèbre universelle est étale au-dessus de W . On vérifie également, comme dans [11], que V est lisse au-dessus de $\text{Spec}(A)$.

IV.4.2.2 Définition et propriété des morphismes finis localement libres rig-étales

Lemme IV.4.7. *Soit A un anneau π -adique sans π -torsion et $X \rightarrow \text{Spec}(A)$ un A -schéma affine. Soit $U \subset X$ un ouvert et ϵ une section*

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \epsilon \\ \text{Spec}(A) \end{array}$$

Supposons qu'il existe un recouvrement formel $\text{Spf}(A) = \bigcup_{i \in I} \text{Spf}(A\langle \frac{1}{f_i} \rangle)$ tel que

$\forall i$, la section ϵ sur $\text{Spec}(A\langle\frac{1}{f_i}\rangle)$ se factorise par U en-dehors de $V(\pi)$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & U & \longrightarrow & X \\ & & & & & & & \downarrow \epsilon \\ & & & & & & & \\ \text{Spec}(A\langle\frac{1}{f_i}\rangle[\frac{1}{\pi}]) & \hookrightarrow & \text{Spec}(A\langle\frac{1}{f_i}\rangle) & \longrightarrow & \text{Spec}(A[\frac{1}{f_i}]) & \hookrightarrow & \text{Spec}(A) \end{array}$$

Alors ϵ se factorise à travers U en-dehors de $V(\pi)$.

Démonstration. Soit $X = \text{Spec}(D)$, $I \subset D$ un idéal tel que $U = V(I)^c$ et $J \subset D$ l'idéal définissant la section ϵ , $J = \ker(\epsilon^* : D \rightarrow A)$.

Le morphisme ϵ se factorise par U hors de $V(\pi)$ si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad \pi^k \in I + J$$

L'anneau étant π -adique, elle est encore équivalente à ce que

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad \pi^k \in I + J + \pi^{k+1}D/\pi^{k+1}D \subset D/\pi^{k+1}D$$

Soit $\forall k \in \mathbb{N}$, Δ_k l'idéal $I + J + \pi^{k+1}D/\pi^{k+1}D$ et $\tilde{\Delta}_k$ le faisceau d'idéaux sur $\text{Spec}(D/\pi^{k+1}D)$.

Par hypothèse,

$$\forall i \in I, \exists k \in \mathbb{N}, \quad (\pi^k) \subset \tilde{\Delta}_{k|D(f_i)}, \text{ où } D(f_i) \subset \text{Spec}(D/\pi^{k+1}D)$$

Donc, $\exists k, \forall i, (\pi^k) \subset \tilde{\Delta}_{k|D(f_i)}$, ce qui implique que $(\pi^k) \subset \Delta_k$, puisque

$$\text{Spec}(D/\pi^{k+1}D) = \bigcup_i D(f_i). \quad \square$$

Proposition IV.4.8. Soit $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ un morphisme fini localement libre entre schémas formels π -adiques sans π -torsion. Sont équivalents

- Il existe un recouvrement affine $\mathcal{Y} = \bigcup_i \mathcal{U}_i$ tel que si $\mathcal{U}_i = \text{Spf}(A_i)$, $f^{-1}(\mathcal{U}_i) = \text{Spf}(B_i)$, alors $B_i[\frac{1}{\pi}]$ est une $A_i[\frac{1}{\pi}]$ -algèbre étale.
- Pour tout ouvert affine $\mathcal{U} \subset \mathfrak{Y}$, $\mathcal{U} = \text{Spf}(A)$, si $f^{-1}(\mathcal{U}) = \text{Spf}(B)$, alors $B[\frac{1}{\pi}]$ est une $A[\frac{1}{\pi}]$ -algèbre étale.

Démonstration. Si A est un anneau π -adique et B une A -algèbre finie projective, alors B est une A -algèbre π -adique. En effet, étant donné que B est un A -module de type fini, B est π -adiquement complète et, étant donné que B est projective, $\exists n, B \subset A^n$, et est donc séparée puisque A^n l'est.

Donc, pour une telle A -algèbre B et pour $f \in A \setminus \pi A$ vérifiant les hypothèses précédentes en remplaçant A par $A\langle\frac{1}{f}\rangle$ et B par $B \otimes_A A\langle\frac{1}{f}\rangle$, on obtient

$$B \otimes_A A\left\langle\frac{1}{f}\right\rangle = B\left\langle\frac{1}{f}\right\rangle$$

est $B\left\langle\frac{1}{f}\right\rangle$ est une $A\left\langle\frac{1}{f}\right\rangle$ -algèbre finie projective.

Venons-en maintenant à la démonstration. Soit A une algèbre π -adique sans π -torsion et B une A -algèbre finie projective étale en-dehors de $V(\pi)$. Alors, d'après ce qui précède, $\forall f \in A$, $B \langle \frac{1}{f} \rangle$ est une $A \langle \frac{1}{f} \rangle$ -algèbre étale en-dehors de $V(\pi)$.

Il s'agit maintenant de voir que si A est π -adique sans π -torsion et que B est une A -algèbre finie projective telle qu'il existe un recouvrement formel $\text{spf}(A) = \bigcup_i \text{Spf}(A \langle \frac{1}{f_i} \rangle)$ tel que $\forall i$ $B \langle \frac{1}{f_i} \rangle$ soit une $A \langle \frac{1}{f_i} \rangle$ -algèbre étale en-dehors de $V(\pi)$, alors B est étale hors de $V(\pi)$. Mais, après avoir choisi une présentation finie de B comme A -module puis une rigidification de la structure de A -algèbre sur B relativement à cette présentation, cela résulte du lemme précédent appliqué au schéma $X = W$ de la section IV.4.2.1 et son ouvert V . \square

Définition IV.4.9. Un morphisme satisfaisant aux conditions de la proposition précédente sera dit fini localement libre rig-étale.

Lemme IV.4.10. Soit $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ un morphisme fini localement libre rig-étale de schémas formels π -adiques sans π -torsion et $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{Y}$ un morphisme où \mathfrak{Y}' est π -adique sans π -torsion. Alors $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{Y}'$ est fini localement libre rig-étale.

En particulier, le transformé strict d'un morphisme fini localement libre rig-étale en est un.

Démonstration. Cela résulte de ce que si A est π -adique sans π -torsion, B une A -algèbre finie projective étale en dehors de $V(\pi)$, C une A -algèbre π -adique sans π -torsion alors, comme expliqué dans la démonstration précédente, B étant projective finie sur A

$$B \otimes_A C = B \widehat{\otimes}_A C \quad \square$$

Lemme IV.4.11. Le composé de deux morphismes finis localement libres rig-étales en est encore un.

IV.4.3 Rigidité

Proposition IV.4.12 (Fujiwara). Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion quasicompact et \mathfrak{Y} un \mathfrak{X} -schéma formel π -adique sans π -torsion fini localement libre rig-étale. Il existe alors un entier $N(\mathfrak{Y})$ tel que pour tout \mathfrak{X} -schéma formel π -adique sans π -torsion \mathfrak{Y}' et deux morphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Y}' & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{array} & \mathfrak{Y} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathfrak{X} & \end{array}$$

vérifiant $f_1 \equiv f_2 \pmod{\pi^{N(\mathfrak{Y})}}$, on ait $f_1 = f_2$.

De plus, si $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$ est un morphisme de changement de base avec \mathfrak{Z} π -adique sans π -torsion, alors on peut prendre $N(\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Z}) = N(\mathfrak{Y})$.

Démonstration. Lorsque tous les schémas formels sont affines, c'est une conséquence de la proposition 2.1.1 de [13]. Plus précisément, lorsque $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, on peut prendre $N(\mathfrak{Y})$ tel que $\pi^{N(\mathfrak{Y})}\Omega_{B/A}^1 = 0$. Le où les schémas formels ne sont plus affines s'en déduit facilement. L'assertion sur le changement de base se déduit aussitôt de la borne explicite donnée dans le cas affine. \square

Théorème IV.4.13. *Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ comme dans la proposition précédente. Il existe alors un entier $N(\mathfrak{Y})$ tel que pour tout \mathfrak{Y}' comme précédemment, l'application de réduction*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{Y}', \mathfrak{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^{N(\mathfrak{Y})}}}(\mathfrak{Y}' \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^{N(\mathfrak{Y})}}, \mathfrak{Y} \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^{N(\mathfrak{Y})}})$$

soit une bijection. De plus, comme précédemment, on peut choisir l'entier $N(\mathfrak{Y})$ invariant par changement de base.

Démonstration. Supposons d'abord que tous nos schémas formels soient affines

$$\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A), \quad \mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B), \quad \mathfrak{Y}' = \mathrm{Spf}(B')$$

La A -algèbre B est de présentation finie. À chaque choix d'un ensemble fini de générateurs et relations \mathcal{S} de cette A -algèbre, i.e., un isomorphisme

$$B \simeq A[X_1, \dots, X_N]/J \text{ et } J = (f_1, \dots, f_q)$$

Elkik associe dans [11] un idéal $H_{B/A}(\mathcal{S})$ de $A[X_1, \dots, X_N]$ tel que l'ouvert

$$V(H_{B/A}(\mathcal{S}))^c \cap V(J) \subset \mathrm{Spec}(B)$$

soit l'ouvert de lissité de $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$. De plus, si $\varphi : A \longrightarrow A'$ est une A -algèbre, alors \mathcal{S} détermine une présentation $\varphi(\mathcal{S})$ de $B \otimes_A A'$

$$B \otimes_A A' \simeq A'[X_1, \dots, X_N]/(f'_1, \dots, f'_q), \text{ où } \forall i, f'_i$$

est l'image de f_i dans $A'[\underline{X}]$ et on a

$$A'[X_1, \dots, X_N].H_{B/A}(\mathcal{S}) \subset H_{B \otimes_A A'}(\varphi(\mathcal{S}))$$

Fixons un tel système de générateurs/rerelations de B/A . Par hypothèse,

$$\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

étant lisse en-dehors de $V(\pi)$,

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad \pi^{N_0} \in H_{B/A}(\mathcal{S}) + J$$

D'après le lemme 1 de [11], si $N_1 > 2N_0 + 1$ et $\bar{\epsilon}$

$$\begin{array}{c} \mathrm{Spec}(B/\pi^{N_1}B) \\ \downarrow \bar{\epsilon} \\ \mathrm{Spec}(A/\pi^{N_1}A) \end{array}$$

est une section approchée modulo π^{N_1} de $\text{Spec}(B) \longrightarrow \text{Spec}(A)$, alors $\exists \epsilon$ une section

$$\begin{array}{c} \text{Spec}(B) \\ \downarrow \epsilon \\ \text{Spec}(A) \end{array}$$

telle que $\epsilon \equiv \bar{\epsilon} [\pi^{N_1 - N_0}]$.

Appliquons cela à

$$\begin{array}{c} \text{Spec}(B) \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(B') \\ \downarrow \\ \text{Spec}(B') \end{array}$$

D'après les rappels précédents sur le fait que l'idéal $H_{B/A}(\mathcal{S})$ ne peut que grandir par changement de base, on en déduit que si $N_1 > 2N_0$ et \bar{f}

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(B'/\pi^{N_1}B') & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Spec}(B/\pi^{N_1}B) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec}(A/\pi^{N_1}A) & \end{array}$$

est un morphisme approché mod π^{N_1} alors $\exists f$

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(B') & \xrightarrow{f} & \text{Spec}(B) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec}(A) & \end{array}$$

tel que $f \equiv \bar{f} [\pi^{N_1 - N_0}]$.

Choisissons N_1 tel que $N_1 > 2N_0$ et $N_1 - N_0$ soit strictement supérieur à l'entier de la proposition précédente. On obtient alors que

$$\text{Hom}_A(\text{Spec}(B'), \text{Spec}(B)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A/\pi^{N_1}A}(\text{Spec}(B'/\pi^{N_1}B'), \text{Spec}(B/\pi^{N_1}B))$$

Le cas où nos schémas formels ne sont pas affines s'en déduit car, grâce à l'assertion d'injectivité (la proposition précédente), on voit que les morphismes construits entre ouverts affines se recollent automatiquement.

L'assertion concernant le fait que l'on peut choisir l'entier $N(\mathfrak{Y})$ invariant par changement de base résulte de ce que l'idéal $H_{B/A}(\mathcal{S})$ grandit par changement de base et de l'invariance par changement de base de l'entier de la proposition précédente. \square

IV.4.4 Décomplétion des schémas formels finis localement libres rig-étales

IV.4.4.1 Décomplétion des algèbres

Lemme IV.4.14. *Soit (A, \mathcal{I}) un couple hensélien et M un \widehat{A} -module projectif de type fini. Il existe alors un A -module projectif de type fini N et un isomorphisme $M \simeq N \otimes_A \widehat{A}$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{M}_{n/A} = \text{Spec}(A[X_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n})$ le schéma en A -algèbres des matrices carrées de taille n . Le sous-schéma de $\mathcal{M}_{n/A}$ classifiant les idempotents $\epsilon \in \mathcal{M}_{n/A}$, $\epsilon^2 = \epsilon$, est lisse. En effet, si B est un anneau, J un idéal de carré nul dans B , $\epsilon \in M_n(B)$ un élément vérifiant $\epsilon^2 = \epsilon + x$ avec $x \in M_n(J)$, alors $\epsilon x = x \epsilon$ et donc, si $\epsilon' = \epsilon + (1 - 2\epsilon)x$, on a

$$\epsilon'^2 = \epsilon' \text{ et } \epsilon' \equiv \epsilon \pmod{J}$$

Si $\epsilon \in M_n(\widehat{A})$ est un idempotent, il existe donc $\epsilon' \in M_n(A)$ tel que

$$\epsilon'^2 = \epsilon' \text{ et } \epsilon' \equiv \epsilon \pmod{\mathcal{I}}$$

Maintenant, si B est une algèbre munie d'un idéal de carré nul J , ϵ et ϵ' sont deux idempotents de $M_n(B)$ et $\epsilon' = \epsilon + x$, où $x \in M_n(J)$, alors

$$\epsilon' = (Id + x)\epsilon(Id + x)$$

Donc si $\epsilon, \epsilon' \in M_n(\widehat{A})$ sont deux idempotents tels que $\epsilon' \equiv \epsilon \pmod{\mathcal{I}}$, alors il existe $u, v \in \text{GL}_n(\widehat{A})$ tels que

$$\epsilon' = u\epsilon v$$

D'où le résultat. □

Proposition IV.4.15. *Soit (I, \leq) un ensemble ordonné filtrant et $(R_i)_{i \in I}$ un système inductif d'algèbres π -adiques sans π -torsion. Notons $R_\infty = \varinjlim_{i \in I} R_i$ et*

\widehat{R}_∞ le complété π -adique de R_∞ . Soit B_∞ une \widehat{R}_∞ algèbre π -adique sans π -torsion telle que $\text{Spf}(B_\infty) \rightarrow \text{Spf}(\widehat{R}_\infty)$ soit fini localement libre rig-étale (i.e., B_∞ est un \widehat{R}_∞ -module projectif de type fini et $B_\infty[\frac{1}{\pi}]$ une $\widehat{R}_\infty[\frac{1}{\pi}]$ -algèbre étale). Il existe alors $i_0 \in I$ et une R_{i_0} -algèbre π -adique sans π -torsion B_{i_0} telle que $\text{Spf}(B_{i_0}) \rightarrow \text{Spf}(R_{i_0})$ soit fini localement libre rig-étale et un isomorphisme

$$B_\infty \simeq B_{i_0} \otimes_{R_{i_0}} \widehat{R}_\infty = B_{i_0} \widehat{\otimes}_{R_{i_0}} \widehat{R}_\infty$$

Démonstration. Le couple $(R_\infty, \pi R_\infty)$ est hensélien. D'après le lemme précédent, il existe un R_∞ -module projectif de type fini M et un isomorphisme de \widehat{R}_∞ -modules

$$B_\infty \simeq M \otimes_{R_\infty} \widehat{R}_\infty$$

Fixons un tel isomorphisme. Fixons une présentation finie L de M . Soit W le schéma affine au-dessus de $\text{Spec}(R_\infty)$ classifiant les structures d'algèbres rigidifiées sur M relativement à la présentation L (cf. section IV.4.2.1). Soit $V \subset W$ l'ouvert où l'algèbre universelle est étale.

La présentation L fournit, grâce à l'isomorphisme précédent $B_\infty \simeq M \otimes_{R_\infty} \widehat{R}_\infty$, une présentation de B_∞ comme \widehat{R}_∞ -module. Fixons une structure d'algèbre rigidifiée relativement à cette présentation de B_∞ . Cela nous fournit donc une section ϵ de W au-dessus de \widehat{R}_∞ qui, par hypothèse, se factorise par V en-dehors de $V(\pi)$

$$\begin{array}{ccccc} & & V & \xrightarrow{\quad} & W \\ & \nearrow & & \nearrow \epsilon & \downarrow \\ \text{Spec}(\widehat{R}_\infty[\frac{1}{\pi}]) & \hookrightarrow & \text{Spec}(\widehat{R}_\infty) & \longrightarrow & \text{Spec}(R_\infty) \end{array}$$

On peut maintenant appliquer le théorème 2 bis de [11] pour conclure l'existence, pour tout entier n , d'une section ϵ' de W au-dessus de $\text{Spec}(R_\infty)$ se factorisant par l'ouvert V en-dehors de $V(\pi)$ telle que

$$\epsilon' \equiv \epsilon \pmod{\pi^n}$$

et donc le diagramme suivant privé de ses termes extrêmes gauche et droite commute mod π^n

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & V & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & W & & \\ & \nearrow & \nearrow \epsilon & & \downarrow \epsilon' & & \\ \text{Spec}(\widehat{R}_\infty[\frac{1}{\pi}]) & \hookrightarrow & \text{Spec}(\widehat{R}_\infty) & \longrightarrow & \text{Spec}(R_\infty) & \longleftarrow & \text{Spec}(R_\infty[\frac{1}{\pi}]) \end{array}$$

Pour un entier n donné, il existe donc une R_∞ -algèbre B'_∞ telle que $B'_\infty \simeq M$, comme R_∞ -module, $B'_\infty[\frac{1}{\pi}]/R_\infty[\frac{1}{\pi}]$ est étale et un isomorphisme

$$B'_\infty/\pi^n B'_\infty \simeq B_\infty/\pi^n B_\infty$$

L'algèbre B'_∞ est donc un R_∞ -module projectif de type fini. Donc $B'_\infty \otimes_{R_\infty} \widehat{R}_\infty = \widehat{B}'_\infty$ et $\text{Spf}(\widehat{B}'_\infty) \rightarrow \text{Spf}(\widehat{R}_\infty)$ est fini localement libre rig-étale. D'après le théorème IV.4.13, pour n choisi suffisamment grand (ne dépendant que de $B_\infty/\widehat{R}_\infty$), il existe un morphisme relevant l'identité

$$\begin{array}{ccc} \text{Spf}(\widehat{B}'_\infty) & \xrightarrow{f} & \text{Spf}(B_\infty) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spf}(\widehat{R}_\infty) & \end{array}$$

tel que $f \equiv \text{Id} \pmod{\pi^n}$ via l'isomorphisme $B'_\infty/\pi^n B'_\infty \simeq B_\infty/\pi^n B_\infty$. D'après le lemme qui suit, c'est un isomorphisme.

Il est maintenant aisé de vérifier qu'il existe $i_0 \in I$ et B_{i_0} une R_{i_0} -algèbre projective finie étale en-dehors de π telle que $B'_\infty \simeq B_{i_0} \otimes_{R_{i_0}} R_\infty$. \square

Lemme IV.4.16. *Soit A un anneau π -adique et P_1, P_2 deux A -module projectifs de type fini. Un élément $f \in \text{Hom}_A(P_1, P_2)$ est un isomorphisme ssi $f \pmod{\pi} : P_1/\pi P_1 \rightarrow P_2/\pi P_2$ en est un.*

Démonstration. Les modules étant projectifs de type fini ils sont π -adiques. Il suffit donc de montrer que $\forall n, f \pmod{\pi^n}$ est un isomorphisme. D'après le lemme de Nakayama, $\forall n, f \pmod{\pi^n}$ est surjectif. De plus, $\forall n$, les fonctions localement constantes rang des modules projectifs $P_1/\pi^n P_1$, resp. $P_2/\pi^n P_2$, sont égales sur $\text{Spec}(A/\pi^n A) = \text{Spec}(A/\pi A)$, puisque $f \pmod{\pi}$ est un isomorphisme. Donc $f \pmod{\pi^n}$ est un isomorphisme. \square

Théorème IV.4.17. *Soit (I, \leq) un ensemble ordonné cofiltrant et $(\mathfrak{X}_i)_{i \in I}$ un système projectif de schémas formels π -adiques, sans π -torsion, quasicompacts, dont les morphismes de transition sont affines. Posons $\mathfrak{X}_\infty = \varprojlim_{i \in I} \mathfrak{X}_i$. Pour tout*

schéma formel π -adique sans π -torsion \mathfrak{Z} , notons $\mathcal{R}_{\mathfrak{Z}}$ la catégorie des \mathfrak{Z} -schémas formels (π -adiques sans π -torsion) finis localement libres rig-étales. Le système $I \ni i \mapsto \mathcal{R}_{\mathfrak{X}_i}$ forme une catégorie fibrée, via les applications de changement de base. De plus, lorsque i varie, il y a un système compatible de foncteurs "changement de base" $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}_i} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X}_\infty}$, d'où un foncteur

$$\varinjlim_{i \in I} \mathcal{R}_{\mathfrak{X}_i} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{X}_\infty}$$

Ce foncteur induit une équivalence de catégories.

Démonstration. Commençons par la pleine fidélité de ce foncteur. Soient $i_0 \in I$ et $\mathfrak{Y}', \mathfrak{Y}$ deux \mathfrak{X}_{i_0} -schémas formels dans $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}_{i_0}}$. Soit $N = N(\mathfrak{Y})$ l'entier associé à \mathfrak{Y} fourni par le théorème IV.4.13 (qui, rappelons-le, peut être choisi invariant par changement de base). Alors,

$$\begin{aligned} & \varinjlim_{i \geq i_0} \text{Hom}_{\mathfrak{X}_i}(\mathfrak{Y}' \times_{\mathfrak{X}_{i_0}} \mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}_{i_0}} \mathfrak{X}_i) \\ &= \varinjlim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathfrak{X}_i \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N}} \left(\mathfrak{Y}' \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N} \times_{\mathfrak{X}_{i_0} \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N}} \mathfrak{X}_i \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N}, \right. \\ & \quad \left. \mathfrak{Y} \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N} \times_{\mathfrak{X}_{i_0} \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N}} \mathfrak{X}_i \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N} \right) \\ &= \text{Hom}_{\mathfrak{X}_\infty \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N}} \left(\mathfrak{Y}' \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N} \times_{\mathfrak{X}_{i_0} \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N}} \mathfrak{X}_\infty \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N}, \right. \\ & \quad \left. \mathfrak{Y} \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N} \times_{\mathfrak{X}_{i_0} \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N}} \mathfrak{X}_\infty \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi^N} \right) \\ &= \text{Hom}_{\mathfrak{X}_\infty}(\mathfrak{Y}' \times_{\mathfrak{X}_{i_0}} \mathfrak{X}_\infty, \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}_{i_0}} \mathfrak{X}_\infty) \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité résultant de ce que modulo π^N , \mathfrak{Y} et \mathfrak{Y}' sont de présentation finie sur $\mathfrak{X}_{i_0} \otimes \mathcal{O}_K / \pi^N \mathcal{O}_K$, et la dernière par une nouvelle application du théorème IV.4.13.

Reste à vérifier la surjectivité essentielle de notre foncteur. La proposition IV.4.15 l'affirme lorsque les schémas formels \mathfrak{X}_i sont affines. Lorsqu'ils ne le sont pas il suffit de choisir $i_0 \in I$ et une décomposition $\mathfrak{X}_{i_0} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}$ en un nombre fini d'ouverts affines. Alors si $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}_{\infty}$ est un élément de $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}_{\infty}}$, d'après la proposition IV.4.15, étant donné qu'il n'y a qu'un nombre fini d'ouverts affines, il existe $i_1 \geq i_0$ et des éléments $(\mathcal{V}_{\alpha})_{\alpha}$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{U}_{\alpha} \times_{\mathfrak{X}_{i_0}} \mathfrak{X}_{i_1}}$ et des isomorphismes

$$\forall \alpha, \mathcal{V}_{\alpha} \times_{\mathfrak{X}_{i_1}} \mathfrak{X}_{\infty} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}_{\infty}} (\mathcal{U}_{\alpha} \times_{\mathfrak{X}_{i_0}} \mathfrak{X}_{\infty})$$

Grâce à l'égalité entre les Hom démontrée précédemment (la pleine fidélité), quitte à augmenter i_1 en $i_2 \geq i_1$, on peut supposer que les \mathcal{V}_{α} sont munis d'une donnée de recollement au-dessus de \mathfrak{X}_{i_2} relativement aux $(\mathcal{U}_{\alpha} \cap \mathcal{U}_{\beta}) \times \mathfrak{X}_{i_2}$. Toujours grâce à l'égalité entre les Hom, et quitte à encore augmenter l'indice i_2 en $i_3 \geq i_2$, on peut supposer que ces données de recollement satisfont à la condition de cocycle permettant de les recoller en un schéma formel au-dessus de \mathfrak{X}_{i_3} . \square

IV.5 Étude d'une certaine catégorie de morphismes rig-étales

IV.5.1 Définitions

Définition IV.5.1. Un morphisme $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ entre schémas formels π -adiques sera dit étale si le morphisme induit entre schémas $\mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K \rightarrow \mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K$ l'est.

Bien sûr, comme d'habitude, si \mathfrak{X} est un schéma formel π -adique, l'application de réduction modulo π induit une équivalence entre les \mathfrak{X} -schémas formels π -adiques étales et les $\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K$ -schémas étales.

Définition IV.5.2. Un morphisme $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ entre schémas formels π -adiques sans π -torsion quasicompacts sera dit de type (\mathcal{E}) s'il se factorise en un composé de morphismes de schémas formels π -adiques sans π -torsion

$$\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{X}$$

où

- $\mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{X}$ est isomorphe à un éclatement formel admissible de \mathfrak{X}
- $\mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{W}$ est étale quasicompact
- $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$ est fini localement libre rig-étale
- $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{S}$ est isomorphe à un éclatement formel admissible de \mathfrak{S}

Exemple IV.5.3. Un ouvert admissible quasicompact de \mathfrak{X} ($\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$) est un morphisme de type (\mathcal{E}) .

Lemme IV.5.4. Soit $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme de type (\mathcal{E}) et $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme avec \mathfrak{Z} π -adique sans π -torsion quasicompact. Alors le morphisme $(\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Z})^{adh} \rightarrow \mathfrak{Z}$ est de type (\mathcal{E}) .

Démonstration. Utilisant le lemme IV.1.22, on vérifie que si $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{X}$ est une décomposition comme dans la définition IV.5.2, alors

$$(\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Z})^{adh} \rightarrow (\mathfrak{S} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Z})^{adh} \rightarrow (\mathfrak{T} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Z})^{adh} \rightarrow (\mathfrak{W} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Z})^{adh} \rightarrow \mathfrak{X}$$

en est encore une. □

IV.5.2 Les morphismes de type (\mathcal{E}) engendrent la topologie étale des espaces rigides usuels

Théorème IV.5.5. Soit $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme rig-étale entre deux schémas formels admissibles quasicompacts sur \mathcal{O}_K . Il existe alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Y}' & \xrightarrow{f} & \mathfrak{Y} \\ & \searrow g & \swarrow \\ & \mathfrak{X} & \end{array}$$

où g est de type (\mathcal{E}) et $|f^{rig}| : |\mathfrak{Y}'^{rig}| \rightarrow |\mathfrak{Y}^{rig}|$ est surjectif au niveau des espaces de Zariski-Riemann, tels que définis dans la section IV.3.

Démonstration. D'après le théorème de platisation de Raynaud-Gruson ([6]), il existe un éclatement formel admissible $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ tel que le transformé strict

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Y})^{adh} \rightarrow \mathfrak{X}'$$

soit plat (au sens de [8]). Ce morphisme étant rig-étale plat, il est quasi-fini en fibre spéciale: le morphisme de schémas

$$\mathfrak{Z} \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K} \rightarrow \mathfrak{X}' \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K}$$

est quasi-fini. Il existe donc un diagramme de $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ -schémas

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\beta} & \mathfrak{Z} \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\gamma} & \mathfrak{X}' \otimes_{\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K} \end{array}$$

où α est plat fini, γ est étale et β est étale surjectif. Les morphismes β et γ étant étales, ce diagramme se relève de façon unique en un diagramme de schémas formels admissibles

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{W} & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \mathfrak{Z} \\ \tilde{\alpha} \downarrow & & \downarrow h \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \mathfrak{X}' \end{array}$$

où $\tilde{\alpha}$ est fini localement libre. Étant donné que $\tilde{\gamma}^{\text{rig}} \circ \tilde{\alpha}^{\text{rig}}$ est rig-étale et $\tilde{\gamma}^{\text{rig}}$ est rig-étale, $\tilde{\alpha}$ est rig-étale. De plus, $\tilde{\beta}$ étant étale surjectif, $\tilde{\beta}^{\text{rig}}$ est surjectif au niveau des espaces spectraux. D'où le résultat. \square

IV.5.3 Rigidité

Proposition IV.5.6. *Soit $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme de type (\mathcal{E}) entre schémas formels π -adiques sans π -torsion. Il existe alors un entier N tel que pour tout \mathfrak{X} -schéma formel π -adique sans π -torsion, l'application de réduction modulo π^N*

$$\text{Hom}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{Y}', \mathfrak{Y}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^N}(\mathfrak{Y}' \otimes \mathcal{O}_K/\pi^N, \mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^N)$$

soit une bijection.

Démonstration. Il suffit d'empiler les différentes assertions de rigidité concernant les morphismes qui entrent dans la définition d'un morphisme de type (\mathcal{E}) : le lemme IV.2.20 pour les éclatements, la proposition IV.4.12 pour le morphisme fini localement libre rig-étale, quant aux morphismes étales c'est évident. \square

IV.5.4 Décompletion

Lemme IV.5.7. *Soit (I, \leq) un ensemble ordonné cofiltrant, $(\mathfrak{X})_{i \in I}$ un système projectif de schémas formels π -adiques et $\mathfrak{X}_\infty = \varprojlim_{i \in I} \mathfrak{X}_i$. Si $\mathfrak{Z}_{\text{ét}}$ désigne la catégorie des morphismes étales quasicompacts vers \mathfrak{Z} , alors*

$$\varinjlim_{i \in I} (\mathfrak{X}_i)_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{X}_\infty)_{\text{ét}}$$

est une équivalence.

Démonstration. Étant donné que $\mathfrak{Z}_{\text{ét}}$ est équivalente à $(\mathfrak{Z} \otimes \mathcal{O}_K/\pi \mathcal{O}_K)_{\text{ét}}$, cela se ramène à un énoncé classique sur les schémas (cf. EGA IV). \square

Théorème IV.5.8. *Soit (I, \leq) un ensemble ordonné cofiltrant et $(\mathfrak{X}_i)_{i \in I}$ un système projectif de schémas formels π -adiques sans π -torsion quasicompacts, dont les morphismes de transition sont affines. Soit $\mathfrak{X}_\infty = \varprojlim_{i \in I} \mathfrak{X}_i$. Pour tout $i \in I$,*

soit $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}_i}$ la catégorie des morphismes de type (\mathcal{E}) au-dessus de \mathfrak{X}_i . Lorsque i varie, les applications de changement de base (cf. lemme IV.5.4) définissent une catégorie fibrée. Il y a un foncteur

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} \mathcal{E}_{\mathfrak{X}_i} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathfrak{X}_\infty}$$

Ce foncteur induit une équivalence de catégories.

Démonstration. C'est un exercice d'empilage du corollaire IV.2.22, du théorème IV.4.17 et du lemme IV.5.7. \square

Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion. Les morphismes de type (\mathcal{E}) $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ sont stables par éclatement formel admissible: si $\mathfrak{Y}' \longrightarrow \mathfrak{Y}$ est un éclatement formel admissible, le composé $\mathfrak{Y}' \longrightarrow \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ est encore de type (\mathcal{E}) . On peut donc définir $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ la catégorie des morphismes de type (\mathcal{E}) vers \mathfrak{X} localisée relativement aux éclatements. On démontre de la même façon, en utilisant une fois de plus le corollaire IV.2.22 et le théorème précédent.

Théorème IV.5.9. *Avec les notations du théorème précédent, on a une équivalence de catégories*

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} \mathcal{E}_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathfrak{X}_\infty^{\text{rig}}}$$

IV.6 Le topos rig-étale d'un schéma formel π -adique quasicompact

IV.6.1 Sur un point concernant les topologies de Grothendieck

Nous utiliserons le théorème-clef suivant.

Théorème IV.6.1 (SGA4 exposé III, théorème 4.1). *Soit \mathcal{C} une petite catégorie, \mathcal{C}' un site et $u : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur pleinement fidèle. Supposons que tout objet de \mathcal{C}' puisse être recouvert par des objets provenant de \mathcal{C} . Munissons \mathcal{C} de la topologie induite. Alors*

- Le foncteur u est continu et cocontinu
- Si $u_s : \mathcal{C}^\sim \longrightarrow \mathcal{C}'^\sim$ est le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \circ u$ et $u^s : \mathcal{C}'^\sim \longrightarrow \mathcal{C}^\sim$ le foncteur tel que

$$\forall \mathcal{G} \in \mathcal{C}'^\sim, u^s \mathcal{G} \text{ est le faisceau associé au préfaisceau } Y \longmapsto \lim_{\substack{\longrightarrow \\ (X, m) \\ X \in \mathcal{C} \\ m: Y \longrightarrow u(X)}} \mathcal{G}(X),$$

ils induisent une équivalence de topos

$$\mathcal{C}'^\sim \begin{array}{c} \xrightarrow{u_s} \\ \xleftarrow{u^s} \end{array} \mathcal{C}^\sim$$

Le corollaire qui suit ne se trouve pas dans SGA4.

Corollaire IV.6.2. *Sous les hypothèses du théorème précédent, une famille $(U_\alpha \rightarrow X)_\alpha$ de morphismes de \mathcal{C} est couvrante ssi la famille $(u(U_\alpha) \rightarrow u(X))_\alpha$ l'est.*

Démonstration. D'après la proposition 1.6. de l'exposé III de SGA4 si $(U_\alpha \rightarrow X)_\alpha$ est couvrante, alors $(u(U_\alpha) \rightarrow u(X))_\alpha$ l'est. Réciproquement, si $(u(U_\alpha) \rightarrow u(X))_\alpha$ est couvrante, soit R le crible couvrant de $u(X)$ engendré par cette famille. Le foncteur u étant cocontinu, la famille de morphismes $Y \rightarrow X$ telle qu'il existe α et une factorisation $u(Y) \rightarrow u(U_\alpha) \rightarrow u(X)$ est un crible couvrant de X . Mais, u étant pleinement fidèle, l'existence d'une telle factorisation est équivalente à l'existence d'une factorisation $Y \rightarrow U_\alpha \rightarrow X$, c'est-à-dire $Y \rightarrow X$ appartient au crible engendré par $(U_\alpha \rightarrow X)$, qui est donc couvrant. \square

IV.6.2 Définitions

Convention: Désormais, on fixe une petite sous-catégorie pleine de la catégorie des schémas formels π -adiques quasicompacts, telle que tous les schémas formels avec lesquels nous travaillerons soient dans cette petite catégorie. On vérifie aisément que cela est possible puisque nous travaillerons avec des limites projectives indexées par des ensembles fixés de schémas formels topologiquement de type fini, des morphismes topologiquement de type fini au-dessus de ces éclatements... En particulier, les catégories sous-jacentes de tous les sites avec lesquels nous travaillerons seront petites.

Définition IV.6.3. Soit \mathfrak{X} π -adique sans π -torsion quasicompact et $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ la catégorie des morphismes de type (\mathcal{E}) vers \mathfrak{X} localisée relativement aux éclatements formels admissibles (cf. section IV.5.4). On munit $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ de la topologie engendrée par les familles finies de morphismes $(\mathfrak{U}_\alpha^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{Y}^{\text{rig}})_\alpha$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U}_\alpha^{\text{rig}} & \longrightarrow & \mathfrak{Y}^{\text{rig}} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathfrak{X}^{\text{rig}} & \end{array}$$

telles que l'application continue $\coprod_\alpha |\mathfrak{U}_\alpha^{\text{rig}}| \rightarrow |\mathfrak{Y}^{\text{rig}}|$ entre les espaces de Zariski-Riemann soit surjective. On note $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ le site associé.

Remarque IV.6.4.

- On remarquera qu'il s'agit d'une topologie qui n'est pas définie à partir d'une prétopologie. En particulier, les familles couvrantes pour cette topologie n'ont a priori aucune description concrète! Le problème vient que les morphismes dans $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ ne sont pas forcément quarrables.
- Si $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ est un morphisme de schémas formels quasicompacts π -adiques sans π -torsion, alors f induit un foncteur entre les catégories sous-jacentes de celle de $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ vers celle de $\mathfrak{Y}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$. Ce foncteur transforme

familles couvrantes en familles couvrantes. Néanmoins, il n'y a pas de raison pour que ce foncteur soit continu! Et même s'il l'est, il n'y a pas de raison pour qu'il induise un morphisme de topos c'est-à-dire le foncteur f^* induit au niveau des faisceaux commute aux limites projectives finies!

Définition IV.6.5. Soit \mathfrak{X} un schéma formel admissible quasicompact. On note $\mathfrak{X}_{\text{rig-ét}}$ le site des espaces rigides quasicompacts rig-étales au-dessus de $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$ muni de la topologie associée à la prétopologie, telle que $\text{Cov}(\mathfrak{Y})$ consiste en les familles finies $(\mathfrak{U}_\alpha^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{Y}^{\text{rig}})_\alpha$ telles que $\coprod_\alpha |\mathfrak{U}_\alpha^{\text{rig}}| \rightarrow |\mathfrak{Y}^{\text{rig}}|$ soit surjectif.

Les familles couvrantes de $\mathfrak{X}_{\text{rig-ét}}$ sont les familles $(\mathfrak{U}_\alpha^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{Y}^{\text{rig}})_\alpha$ telles qu'il existe une sous-famille finie surjective au niveau des espaces de Zariski-Riemann.

On renvoie à [7], [19] ou [13] pour les propriétés de base des morphismes étales entre espaces rigides usuels. On retiendra en particulier que l'image d'un morphisme étale est un ouvert quasicompact de l'espace de Zariski-Riemann (cela peut se vérifier aisément en utilisant le théorème de platification de Raynaud-Gruson). De cela on déduit que les familles couvrantes de $\mathfrak{X}_{\text{rig-ét}}$ sont les familles $(\mathfrak{U}_\alpha^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{Y}^{\text{rig}})_\alpha$ qui induisent une surjection au niveau des espaces de Zariski-Riemann. En particulier, le topos associé est cohérent.

IV.6.3 Lien entre les sites $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ et $\mathfrak{X}_{\text{rig-ét}}$ pour \mathfrak{X} admissible

Proposition IV.6.6. Soit \mathfrak{X} admissible. Le foncteur d'inclusion

$$u : \mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}} \hookrightarrow \mathfrak{X}_{\text{rig-ét}}$$

est continu et est tel que la topologie induite par u sur la catégorie sous-jacente à $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ soit la topologie de $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$. Les familles couvrantes de $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ sont les familles de morphismes $(\mathfrak{U}_\alpha^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{Y}^{\text{rig}})_\alpha$ telles qu'il existe une sous-famille finie induisant une surjection au niveau des espaces de Zariski-Riemann. Ce foncteur induit une équivalence de topos

$$(u^s, u_s) : (\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}})^\sim \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{X}_{\text{rig-ét}})^\sim$$

Démonstration. D'après le théorème IV.5.5, le foncteur u satisfait aux hypothèses du théorème IV.6.1. Soit \mathcal{T} la topologie sur la catégorie sous-jacente à $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ induite par u et la topologie de $\mathfrak{X}_{\text{rig-ét}}$. D'après le corollaire IV.6.2, les familles couvrantes pour \mathcal{T} sont les familles dont on peut extraire une sous-famille finie surjective au niveau des espaces de Zariski-Riemann. Les cribles engendrés par de telles familles sont les cribles contenant les cribles engendrés par les familles finies surjectives au niveau des espaces de Zariski-Riemann, c'est-à-dire ceux utilisés pour définir la topologie engendrée de $\mathfrak{X}_{\text{rig-ét}}$. Donc \mathcal{T} coïncide avec la topologie de $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$. \square

IV.6.4 Le théorème principal sur la décomplétion des topos rig-étales

Soit (I, \leq) un ensemble ordonné cofiltrant et $(\mathfrak{X}_i)_{i \in I}$ un système projectif de schémas formels admissibles quasicompacts, dont les morphismes de transition sont affines. On note $\mathfrak{X}_\infty = \varprojlim_{i \in I} \mathfrak{X}_i$.

Théorème IV.6.7. *Les familles couvrantes de $(\mathfrak{X}_\infty)_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ sont les familles*

$$(\mathfrak{U}_\alpha^{\text{rig}} \longrightarrow \mathfrak{Y}^{\text{rig}})_\alpha$$

possédant une sous-famille finie induisant une surjection au niveau des espaces de Zariski-Riemann. De plus, il y a une équivalence de topos

$$(\mathfrak{X}_\infty)_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim} \simeq \varprojlim_{i \in I} (\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}^{\sim}$$

Démonstration. Le site fibré $i \mapsto (\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$ satisfait aux hypothèses de la section 8.3.1 de [15]. On en déduit, d'après la proposition 8.3.6 de [15], que l'on a une prétopologie explicite sur le site $\varinjlim_{i \in I} (\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$, obtenue à partir des prétopologies

sur les $(\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$, lorsque i varie.

Si $Y \in \varinjlim_{i \in I} (\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$ pour cette prétopologie, $\text{Cov}(Y)$ consiste en les familles finies de morphismes dans $\varinjlim_{i \in I} (\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$, isomorphes dans $\varinjlim_{i \in I} (\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$ à une famille finie de morphismes dans un $(\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$ qui forme un recouvrement dans le site $(\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$.

Les familles couvrantes de la topologie de $\varinjlim_{i \in I} (\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$ sont donc les familles de morphismes dans $\varinjlim_{i \in I} (\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$ possédant une sous-famille finie isomorphe à une famille finie couvrante d'un $(\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$, pour un $i \in I$.

Par exemple, pour $i \in I$, une famille finie de morphismes dans $(\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$, $(U_\alpha \longrightarrow Y)_\alpha$, devient couvrante dans $\varinjlim_{i \in I} (\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$ ssi il existe $j \geq i$ tel que la famille tirée en arrière $(U_\alpha \times_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \mathfrak{X}_j^{\text{rig}} \longrightarrow Y \times_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \mathfrak{X}_j^{\text{rig}})_\alpha$ devienne couvrante dans $(\mathfrak{X}_j)_{\text{rig-ét}}$.

Rappelons que l'on note $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ la catégorie sous-jacente au site $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$. Il y a un foncteur pleinement fidèle

$$u : \varinjlim_{i \in I} \mathcal{E}_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} (\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$$

auquel on peut appliquer le théorème IV.6.1 et le corollaire IV.6.2. Soit \mathcal{T} la topologie induite sur $\varinjlim \mathcal{E}_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}}$ par u , et la topologie précédente sur $\varinjlim (\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$.

D'après le corollaire IV.6.2 et la description précédente des familles couvrantes de $\varinjlim (\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$, on a une description concrète des familles couvrantes du site $(\varinjlim \mathcal{E}_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}}, \mathcal{T})$. Il s'agit maintenant de vérifier que via l'équivalence de catégories du théorème IV.5.9

$$\varinjlim \mathcal{E}_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\mathfrak{X}_\infty^{\text{rig}}}$$

les familles couvrantes se correspondent. Mais cela résulte de la proposition qui suit. \square

Proposition IV.6.8. *Soit $i \in I$ et $(U_\alpha \rightarrow Y)_\alpha$ une famille finie de morphismes dans $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}}$. Supposons que la famille*

$$(U_\alpha \times_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \mathfrak{X}_\infty^{\text{rig}} \rightarrow Y \times_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \mathfrak{X}_\infty^{\text{rig}})_\alpha$$

induit une surjection au niveau des espaces de Zariski-Riemann

$$\prod_{\alpha} |U_\alpha \times_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \mathfrak{X}_\infty^{\text{rig}}| \twoheadrightarrow |Y \times_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \mathfrak{X}_\infty^{\text{rig}}|$$

Il existe alors $j \geq i$ tel que

$$\prod_{\alpha} |U_\alpha \times_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \mathfrak{X}_j^{\text{rig}}| \twoheadrightarrow |Y \times_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \mathfrak{X}_j^{\text{rig}}|$$

soit surjectif.

Démonstration. On a

$$|Y \times_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \mathfrak{X}_\infty^{\text{rig}}| = \varprojlim_{j \geq i} |Y \times_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \mathfrak{X}_j^{\text{rig}}|$$

(utiliser la description des espaces de Zariski-Riemann en termes de points à valeurs dans des anneaux de valuation rigides). Soit

$$\forall j \geq i, \psi_{ji} : |Y \times_{\mathfrak{X}_i^{\text{rig}}} \mathfrak{X}_j^{\text{rig}}| \rightarrow |Y| \text{ et } f : \prod_{\alpha} |U_\alpha| \rightarrow |Y|$$

Par hypothèse, $\bigcup_{j \geq i} \text{Im } \psi_{ji} \subset \text{Im } f$. Le morphisme $\prod_{\alpha} U_\alpha \rightarrow Y$ étant rig-étale,

$\text{Im } f$ est ouvert quasicompact. De plus, $\forall j$, $\text{Im } \psi_{ji}$ est pro-constructible. On conclut, comme dans la démonstration de la proposition IV.3.3, que

$$\exists j \geq i, \text{Im } \psi_{ji} \subset \text{Im } f \quad \square$$

Corollaire IV.6.9. *Le topos limite projective $\varprojlim_{i \in I} (\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}$ ne dépend que de \mathfrak{X}_∞ .*

De plus, si Λ est un anneau, il y a un isomorphisme canonique

$$\varinjlim_{i \in I} R\Gamma((\mathfrak{X}_i)_{\text{rig-ét}}, \Lambda) \simeq R\Gamma((\mathfrak{X}_\infty)_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}, \Lambda)$$

dans $\mathbb{D}^+(\Lambda\text{-Mod})$: la limite inductive de la cohomologie étale de la fibre générique des \mathfrak{X}_i ne dépend que \mathfrak{X}_∞ .

Démonstration. L'assertion concernant la cohomologie résulte du théorème 8.7.3 de [15], dont les hypothèses sont vérifiées grâce aux propriétés de cohérence des topos rigides étales usuels. \square

Corollaire IV.6.10. *Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion quasicompact. La famille de morphismes $(\mathfrak{Y}_\alpha^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{Y}^{\text{rig}})_\alpha$ dans $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ est couvrante ssi on peut en extraire une famille finie induisant une surjection au niveau des espaces de Zariski-Riemann.*

Démonstration. Si \mathfrak{X} est affine, il est facile de vérifier qu'il s'écrit comme limite projective cofiltrante de schémas formels affines topologiquement de type fini sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$. Dans ce cas-là, le résultat est donc une conséquence du théorème IV.6.7. Pour \mathfrak{X} général, soit $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ un recouvrement affine fini de \mathfrak{X} . La famille $(\mathcal{U}_i^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{X}^{\text{rig}})_{i \in I}$ forme une famille couvrante de l'objet final de $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$. Une famille $(\mathfrak{Y}_\alpha^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{Y}^{\text{rig}})_\alpha$ dans $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ est donc couvrante ssi $\forall i \in I$ $(\mathfrak{Y}_\alpha^{\text{rig}} \times_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}} \mathcal{U}_i^{\text{rig}})_\alpha$ l'est. On est donc ramené au cas affine, car l'application

$$\coprod_{i \in I} |\mathfrak{Y}^{\text{rig}} \times_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}} \mathcal{U}_i^{\text{rig}}| \rightarrow |\mathfrak{Y}^{\text{rig}}|$$

est surjective. \square

Remarque IV.6.11. L'auteur de cet article met son lecteur au défi de trouver une démonstration du corollaire précédent sans passer par la théorie des espaces rigides des schémas formels topologiquement de type fini sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$.

IV.7 Le topos rig-étale d'un schéma formel π -adique non-quasicompact

IV.7.1 Le topos

Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion non nécessairement quasicompact (mais toujours quasi-séparé). On fera de plus l'hypothèse de "paracompacité" suivante: \mathfrak{X} peut s'écrire $\mathfrak{X} = \cup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, où les \mathcal{U}_i sont quasicompacts et pour tout i , $\{j \in I \mid \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset\}$ est fini.

On note $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}}$ la catégorie des morphismes $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{Y} \xrightarrow{f} \mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{X}$$

où \mathfrak{U} est un ouvert quasicompact de \mathfrak{X} et f est de type (\mathcal{E}) . On appellera les morphismes $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ dans $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}}$ les morphismes de type (\mathcal{E}) .

Lemme IV.7.1. *Soit $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{U}$ un morphisme de type (\mathcal{E}) vers un ouvert quasicompact de \mathfrak{X} et \mathfrak{V} un ouvert quasicompact de \mathfrak{X} contenant \mathfrak{U} . Alors le composé $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{V}$ est de type (\mathcal{E}) .*

Démonstration. Utiliser le lemme IV.1.30. □

On vérifie alors que $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}}$ est équivalente à

$$\varinjlim_{\substack{\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X} \\ \mathfrak{U} \text{ quasicompact}}} \mathcal{E}_{\mathfrak{U}}$$

limite inductive sur les ouverts quasicompacts de \mathfrak{X} des morphismes de type (\mathcal{E}) au-dessus d'un tel ouvert.

Plus généralement si $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ désigne la catégorie $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}}$ localisée relativement aux éclatements formels admissibles alors

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}} \simeq \varinjlim_{\substack{\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X} \\ \mathfrak{U} \text{ quasicompact}}} \mathcal{E}_{\mathfrak{U}^{\text{rig}}}$$

Définition IV.7.2. On note $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ le site dont la catégorie sous-jacente est $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ et dont la topologie est engendrée par les familles finies de morphismes surjectives au niveau des espaces de Zariski-Riemann.

Si $(\mathfrak{Y}_{\alpha} \longrightarrow \mathfrak{Y})_{\alpha}$ est une famille de morphismes dans $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}^{\text{rig}}}$ et si le morphisme structurel $\mathfrak{Y}^{\text{rig}} \longrightarrow \mathfrak{X}^{\text{rig}}$ se factorise par l'ouvert quasicompact $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$, il en est de même des $\mathfrak{Y}_{\alpha}^{\text{rig}} \longrightarrow \mathfrak{X}^{\text{rig}}$. De cela et du corollaire IV.6.10 on déduit le lemme qui suit.

Lemme IV.7.3. *Une famille de morphismes dans $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ est couvrante ssi il existe une sous-famille finie surjective au niveau des espaces de Zariski-Riemann.*

De là on déduit aisément.

Proposition IV.7.4. *Le topos $(\mathfrak{X}^{\text{rig}})_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim}$ s'identifie au topos des systèmes de faisceaux $\mathcal{F}_{\mathfrak{U}} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim}$, où \mathfrak{U} parcourt les ouverts quasicompacts de \mathfrak{X} munis d'isomorphismes $\mathcal{F}_{\mathfrak{V}|_{\mathfrak{U}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathfrak{U}}$ pour $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V}$, satisfaisant aux conditions de compatibilité (cocycle) naturelles.*

Si $(\mathfrak{U}_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de \mathfrak{X} par des ouverts quasicompacts, alors le topos $(\mathfrak{X}^{\text{rig}})_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim}$ s'identifie au topos recollé des $(\mathfrak{U}_i^{\text{rig}})_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim}$ le long des $\mathfrak{U}_i \cap \mathfrak{U}_j$, $i, j \in I$, i.e., aux objets cartésiens du topos total du diagramme

$$\coprod_{i,j,k} (\mathfrak{U}_i \cap \mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k)_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim} \rightrightarrows \coprod_{i,j} (\mathfrak{U}_i \cap \mathfrak{U}_j)_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim} \rightrightarrows \coprod_i (\mathfrak{U}_i)_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim}$$

IV.7.2 Cycles évanescents

Notons $|\mathfrak{X}|_{qc}$ le site des ouverts quasicompacts de \mathfrak{X} . Tout ouvert quasicompact \mathcal{U} de \mathfrak{X} définit un ouvert $\mathcal{U}^{\text{rig}} \in \mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$. On vérifie que ce foncteur est continu, i.e., qu'il définit un foncteur de spécialisation

$$sp_* : \mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim} \longrightarrow |\mathfrak{X}|_{qc}^{\sim} = |\mathfrak{X}|^{\sim} = |\mathfrak{X}_{red}|^{\sim}$$

en posant $(sp_*\mathcal{F})(\mathcal{U}) = \mathcal{F}(\mathcal{U}^{\text{rig}})$. De plus, si $f : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ est de type (\mathcal{E}) , alors $\text{Im } f$ est un ouvert quasicompact de \mathfrak{X} . Ainsi sp_* a pour adjoint à gauche le foncteur sp^* tel que pour \mathcal{F} , $sp^*\mathcal{F}$ soit le faisceau associé au préfaisceau qui à $\mathfrak{Y}^{\text{rig}}$ associe $\mathcal{F}(\text{Im}(\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}))$. Si $\mathcal{F} \in \Lambda - \mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim}$, alors pour $q > 0$, $R^q sp_*\mathcal{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau qui à \mathcal{U} quasicompact associe $H^q(\mathcal{U}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}, \mathcal{F})$.

IV.7.3 Cohomologie à support compact

On définit ici la cohomologie à support compact de $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$. On prendra garde que la définition donnée bien que suffisante pour nos besoins n'est pas la bonne en général. Par exemple, pour les schémas formels admissibles, ce n'est la bonne définition que pour ceux dont les composantes irréductibles de la fibre spéciale sont propres, par exemple le schéma formel de Deligne-Drinfeld $\widehat{\Omega}$.

Définition IV.7.5. Soit $\mathcal{F} \in \mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim}$. On note $\Gamma_!(\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}, \mathcal{F})$ les sections de $\Gamma(\mathfrak{X}^{\text{rig}}, \mathcal{F}) = \varprojlim_{\mathcal{U} \text{ quasicompact}} \Gamma(\mathcal{U}^{\text{rig}}, \mathcal{F})$, dont le support est quasicompact, i.e., contenu dans un ouvert quasicompact de $|\mathfrak{X}|$.

Il y a un foncteur analogue $\Gamma_!(|\mathfrak{X}|, -)$ sur le topos Zariski de \mathfrak{X} et on a une factorisation

$$\Gamma_!(\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}, -) = \Gamma_!(|\mathfrak{X}|, -) \circ sp_*$$

et donc $R\Gamma_!(\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}, -) = R\Gamma_!(|\mathfrak{X}|, -) \circ Rsp_*$.

IV.8 Le formalisme des faisceaux équivariants lisses

IV.8.1 Hypothèses

Soit G un groupe topologique possédant un sous-groupe ouvert profini. Soit Λ un anneau.

Soit \mathcal{R} une catégorie et X un objet de \mathcal{R} , ou plus généralement de $\widehat{\mathcal{R}}$, la catégorie des préfaisceaux sur \mathcal{R} , muni d'une action du groupe "abstrait" G , $G \longrightarrow \text{Aut}(X)$.

On suppose donnés une sous-catégorie pleine \mathcal{C} de la catégorie \mathcal{R}/X , des morphismes vers X et une topologie sur \mathcal{C} faisant donc de \mathcal{C} un site. On supposera également que tout objet de \mathcal{C} est quasicompact. On suppose de plus que $\forall g \in G$

et $(U \longrightarrow X) \in \mathcal{C}$, le produit cartésien du diagramme U , qui existe dans

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

\mathcal{R} (c'est le composé $U \longrightarrow X \xrightarrow{g^{-1}} X$), est dans \mathcal{C} . On notera $g^{-1}(U)$ ce produit cartésien. On suppose que $U \mapsto g^{-1}(U)$ transforme familles couvrantes en familles couvrantes et définit donc un isomorphisme du site \mathcal{C} dans lui même. Ainsi, il y a une "action" de G sur le site \mathcal{C} . On notera (g^*, g_*) le morphisme de topos associé, où $g^* \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(g(U))$. On a des identifications canoniques $\forall g, g' \in G$, $(gg')^* = g'^* g^*$. Nous ferons l'hypothèse suivante:

Hypothèses de continuité: Pour tout $(U \longrightarrow X) \in \mathcal{C}$ et tout sous-groupe compact ouvert K de G , notons $\text{Rel}(K, U)$ les relèvements de l'action de K sur X à U , c'est-à-dire les $(\beta_k)_{k \in K}$ tels que pour tout $k \in K$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\beta_k} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{k} & X \end{array}$$

$\beta_k \circ \beta_{k'} = \beta_{kk'}$ et $\beta_e = \text{Id}$.

On suppose alors donné, pour tout $(U \longrightarrow X) \in \mathcal{C}$, un germe de relèvements à U de l'action de G sur un sous-groupe compact ouvert, c'est-à-dire un élément de $\varinjlim_K \text{Rel}(K, U)$. Si K est un sous-groupe compact ouvert les éléments de $\text{Rel}(K, U)$ dont le germe associé est égal à celui fixé pour U seront appelés les relèvements canoniques.

On suppose de plus que si $f : U \longrightarrow V$ est un morphisme dans \mathcal{C} , alors il est compatible à de tels relèvements sur un sous-groupe ouvert suffisamment petit, c'est-à-dire si $(\beta_k)_{k \in K}$ est un relèvement canonique de l'action à U et $(\beta'_k)_{k \in K'}$ un relèvement canonique à V , il existe alors un sous-groupe ouvert $K'' \subset K \cap K'$ tel que $\forall k \in K''$, $f \circ \beta_k = \beta'_k \circ f$.

IV.8.2 G -faisceaux lisses

Rappelons que, par définition, un G -faisceau (resp. préfaisceau) sur \mathcal{C} est un faisceau $\mathcal{F} \in \widehat{\mathcal{C}}$ (resp. préfaisceau $\mathcal{F} \in \widehat{\mathcal{C}}$) muni d'isomorphismes

$$\forall g \in G, c_g : g^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

vérifiant la condition de cocycle $\forall g, g' \in G$, $c_{g'} \circ g'^* c_g = c_{gg'}$.

Si \mathcal{F} est un G -faisceau (resp. préfaisceau), $U \in \mathcal{C}$, K est un sous-groupe compact ouvert muni d'un relèvement canonique de l'action de K à U , via ce relèvement

$$\forall k \in K, (k^* \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(k(U)) = \mathcal{F}(U)$$

et donc K agit sur $\mathcal{F}(U)$. Pour tout $U \in \mathcal{C}$, $\mathcal{F}(U)$ est donc muni d'un germe d'action d'un sous-groupe compact ouvert de G . De plus, si $V \rightarrow U$ est un morphisme dans \mathcal{C} , l'application de restriction $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ est K -équivariante pour K compact ouvert suffisamment petit.

Définition IV.8.1. Un G -faisceau (resp. préfaisceau) \mathcal{F} sera dit lisse¹ si $\forall U \in \mathcal{C}$, l'action sur $\mathcal{F}(U)$ d'un relèvement canonique de l'action sur un sous-groupe ouvert suffisamment petit est lisse, i.e., le stabilisateur de tout élément est un sous-groupe ouvert.

Définition IV.8.2. On note $\tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}$, resp. $\tilde{\mathcal{C}}/G$, la catégorie des G -faisceaux, resp. des G -faisceaux lisses. On note $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}$, resp. $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G$, les catégories de faisceaux de Λ -modules associées.

La notation précédente est cohérente au sens où si G^{disc} désigne G muni de la topologie discrète, alors les G^{disc} -faisceaux lisses sont exactement les G -faisceaux.

Exemple IV.8.3. Si l'action de G sur X est triviale, $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}$ s'identifie à la catégorie $\Lambda[G] - \tilde{\mathcal{C}}$ des faisceaux de $\Lambda[G]$ -modules et $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G$ à celle des faisceaux de G -modules lisses à coefficients dans Λ . Lorsque \mathcal{R} est la catégorie à un seul élément et un seul morphisme, on retrouve les G -modules lisses utilisés dans la théorie des représentations des groupes p -adiques ou en cohomologie galoisienne.

IV.8.3 Les différentes opérations reliant G -faisceaux, G -faisceaux lisses et faisceaux

On notera

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{C}}/G^{\mathcal{C}} & \xrightarrow{i} & \tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}} \\ & \searrow k & \swarrow j \\ & \tilde{\mathcal{C}} & \end{array}$$

les foncteurs évidents où k et j sont l'oubli de l'action de G et i est le plongement tautologique. On notera de la même façon le diagramme associé pour les faisceaux de Λ -modules.

IV.8.3.1 Faisceau associé à un préfaisceau Bien sûr, si \mathcal{F} est un G -préfaisceau le faisceau associé est naturellement un G -faisceau.

Lemme IV.8.4. *Le faisceau associé à un G -préfaisceau lisse est un G -faisceau lisse.*

¹Certains préféreront la terminologie G -faisceau discret au lieu de lisse. L'auteur a préféré utiliser le mot lisse provenant de la théorie des représentations des groupes p -adiques, le terme discret pour un faisceau ayant la connotation "somme de faisceaux gratte-ciel". Bien sûr, le problème engendré est que le terme de faisceau lisse existe déjà en géométrie algébrique, mais il y a peu de risques de confusion.

Démonstration. Par définition (cf. SGA4 exposé II section 3), le faisceau associé à \mathcal{F} est $L(L\mathcal{F})$, où l'opération $\mathcal{F} \mapsto L\mathcal{F}$ est

$$L\mathcal{F}(U) = \varinjlim_{R \in J(U)} \text{Hom}(R, \mathcal{F})$$

où $J(U)$ désigne l'ensemble des cribles couvrants de U . Mais U étant quasicompact l'ensemble des cribles engendrés par des familles couvrantes finies est cofinal dans $J(X)$. La limite inductive précédente peut donc se calculer sur ces cribles-là. Or si le crible R est engendré par la famille finie $(V_\alpha \rightarrow U)_\alpha$, alors

$$\text{Hom}(R, \mathcal{F}) \subset \prod_{\alpha} \mathcal{F}(V_\alpha)$$

et, étant donné $(s_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha} \mathcal{F}(V_\alpha)$, il existe un sous-groupe ouvert agissant trivialement sur tous les s_α . \square

Exemple IV.8.5. Sous l'hypothèse du lemme précédent, le faisceau constant $\underline{\Lambda}$ est lisse.

Il est clair que la catégorie $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}$ est abélienne et que le foncteur $j : \Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}} \rightarrow \Lambda - \tilde{\mathcal{C}}$ est exact, i.e., les noyaux et conoyaux de morphismes de G -faisceaux sont les noyaux et conoyaux des morphismes de faisceaux sous-jacents qui sont naturellement munis d'une structure de G -faisceau.

Corollaire IV.8.6. *La catégorie $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G$ des G -faisceaux de Λ -modules lisses est une sous-catégorie abélienne de $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}$, la catégorie des G -faisceaux de Λ -modules.*

Démonstration. Il est clair qu'un sous- G -faisceau d'un G -faisceau lisse est lisse et que donc les noyaux de morphismes dans $\tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}$ entre deux G -faisceaux lisses sont lisses. Pour les conoyaux il suffit d'appliquer le lemme précédent. \square

IV.8.3.2 Inductions brutales. Soit \mathcal{F} un faisceau. On note

$$\text{Ind } \mathcal{F} = \prod_{g \in G} g^* \mathcal{F}, \quad \text{ind } \mathcal{F} = \bigoplus_{g \in G} g^* \mathcal{F}$$

les G -faisceaux munis de l'action de G par permutations (la somme directe définissant $\text{ind } \mathcal{F}$ est prise dans la catégorie des faisceaux, c'est le faisceau associé au préfaisceau somme directe). Cela définit des foncteurs $\tilde{\mathcal{C}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Ind}} \\ \xrightarrow{\text{ind}} \end{array} \tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}$. Ils forment avec j un triplet de foncteurs adjoints

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{F} \in \tilde{\mathcal{C}}, \forall \mathcal{G} \in \tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}, \quad \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(j\mathcal{G}, \mathcal{F}) &\simeq \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}}(\mathcal{G}, \text{Ind } \mathcal{F}) \\ \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{F}, j\mathcal{G}) &\simeq \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}}(\text{ind } \mathcal{F}, \mathcal{G}) \end{aligned}$$

Il en est de même avec les faisceaux de Λ -modules. En particulier, on déduit de ces adjonctions que Ind et j transforment faisceaux injectifs de Λ -modules en faisceaux injectifs. De plus, Ind est exact à gauche (mais pas exact en général). De cela on déduit que la catégorie abélienne $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}$ possède suffisamment d'injectifs (bien sûr, le lecteur avisé sait que $(\tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}, \underline{\Lambda})$ est un topos annelé et que donc $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}$ possède suffisamment d'injectifs, mais Ind permet de construire explicitement de tels objets injectifs à partir de ceux de $\tilde{\mathcal{C}}$).

IV.8.3.3 Lissification. Soit $\mathcal{F} \in \tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}$. On note \mathcal{F}^∞ le préfaisceau

$$U \longmapsto \{\text{sections lisses de } \mathcal{F}(U)\}$$

dont on vérifie facilement, en utilisant l'hypothèse de quasicompacité des objets de \mathcal{C} , que c'est un faisceau. Cela définit un foncteur

$$(-)^\infty : \tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}/G$$

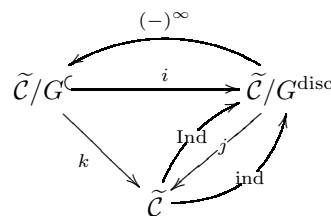
adjoint à droite au foncteur i

$$\forall \mathcal{F} \in \tilde{\mathcal{C}}/G, \forall \mathcal{G} \in \tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}, \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}}(i\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}/G}(\mathcal{F}, \mathcal{G}^\infty)$$

De cela on déduit que pour les faisceaux de Λ -modules, $(-)^\infty$ transforme les injectifs en injectifs et est exact à gauche. On en déduit le lemme suivant.

Lemme IV.8.7. *La catégorie abélienne $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G$ possède suffisamment d'injectifs.*

En résumé, il y a un diagramme



Remarque IV.8.8. Le foncteur composé $(-)^\infty \circ \text{Ind}$ permet donc de construire suffisamment d'injectifs dans $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G$. Néanmoins, en général, l'image par k d'un tel objet injectif n'est pas un faisceau injectif. Cependant, ils vérifient certaines propriétés d'acyclicité (cf. section IV.8.5 et la remarque IV.9.23 de la section IV.9.6).

IV.8.3.4 Induction/restriction. Soit $F \in \hat{\mathcal{C}}$ un préfaisceau. Rappelons (SGA4 exposé III, section 5) que l'on a un site \mathcal{C}/F dont la topologie est induite par celle de \mathcal{C} via le foncteur canonique $\mathcal{C}/F \longrightarrow \mathcal{C}$. Rappelons également que $\tilde{\mathcal{C}}/F$ s'identifie à $(\mathcal{C}/F)^\sim$ et à $\tilde{\mathcal{C}}/aF$, où aF désigne le faisceau associé au préfaisceau F

(ces identifications sont des équivalences de topos et non des isomorphismes). Il y a un triplet de foncteurs adjoints

$$\widetilde{\mathcal{C}}/F = (\mathcal{C}/F) \overset{\sim}{\rightleftarrows} \widetilde{\mathcal{C}}$$

$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{j_*} & \\ \leftarrow j^* & & \rightarrow \\ & \xrightarrow{j!} & \end{array}$

où j^* est le foncteur de restriction aux objets au-dessus de F et $j_! \mathcal{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \longmapsto \lim_{\substack{\longrightarrow \\ m \in F(U)}} \mathcal{F}(U, m)$$

Soit maintenant K un sous-groupe compact ouvert de G et $F \in \widehat{\mathcal{C}}/K^{\text{disc}}$ un K -préfaisceau, i.e., l'action de K sur X s'étend en une action sur F via $F \rightarrow X$. Supposons, de plus, que ce relèvement de l'action soit "canonique" au sens tout simplement où F est un K -préfaisceau lisse, $F \in \widehat{\mathcal{C}}/K$. On prendra par exemple $U \in \mathcal{C}$, un sous-groupe compact ouvert K , un relèvement "canonique" de l'action de K à U et $F = h_U$, le préfaisceau représenté par U . Alors, le site \mathcal{C}/F vérifie les mêmes hypothèses que celles faites sur \mathcal{C} . Plus précisément, pour tout $k \in K$ l'action $F \xrightarrow{\sim} k_* F$ sur F induit des isomorphismes $F(U) \xrightarrow{\sim} F(k^{-1}(U))$ et donc un isomorphisme de sites

$$k^{-1} : \mathcal{C}/F \longrightarrow \mathcal{C}/F$$

Lorsque k varie, ceux-ci se composent naturellement. De plus, tout $U \rightarrow F$ (i.e., un élément de $F(U)$) est muni d'un germe de relèvement de l'action sur un sous-groupe ouvert suffisamment petit (utiliser la lissité de F). Ces germes de relèvement sont compatibles aux morphismes dans \mathcal{C}/F .

On peut donc définir la catégorie $(\widetilde{\mathcal{C}}/F)/K$ des K -faisceaux lisses dans $\widetilde{\mathcal{C}}/F$. On vérifie qu'il y a des identifications

$$(\widetilde{\mathcal{C}}/F)/K = (\widetilde{\mathcal{C}}/K)/F = (\widetilde{\mathcal{C}}/K)/aF,$$

i.e., les K -faisceaux lisses dans $\widetilde{\mathcal{C}}/F$ s'identifient aux K -faisceaux lisses au-dessus de F ou aF . Il y a alors un triplet de foncteurs adjoints

$$(\widetilde{\mathcal{C}}/F)/K \overset{\sim}{\rightleftarrows} \widetilde{\mathcal{C}}/G$$

$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{j_{K*}} & \\ \leftarrow j_K^* & & \rightarrow \\ & \xrightarrow{j_{K!}} & \end{array}$

où

- Le foncteur j_K^* est le foncteur de restriction du faisceau aux objets au-dessus de F et de l'action de G à K .

- Le foncteur $j_{K!}$ est celui qui à $\mathcal{F} \in \widetilde{(\mathcal{C}/F)}/K$ associe

$$\bigoplus_{g \in \Omega} g^* j_! \mathcal{F}$$

où Ω désigne un ensemble de représentants dans G de $K \backslash G$, dont on vérifie aisément qu'il est muni d'une action lisse de G par "permutations" des éléments de Ω .

- Le foncteur j_{K*} associe à \mathcal{F} le G -faisceau lisse $\left(\prod_{g \in \Omega} g^* j_* \mathcal{F}\right)^\infty$, où Ω est comme précédemment.

Définition IV.8.9. On notera

$$\begin{aligned} j_K^*(-) &= \text{Res}_{F/K}^{X/G}(-) && \text{la restriction,} \\ j_{K!}(-) &= \text{c-ind}_{F/K}^{X/G}(-) && \text{l'induction compacte et} \\ j_{K*} &= \text{Ind}_{F/K}^{X/G}(-) && \text{l'induite lisse.} \end{aligned}$$

On a les formules usuelles de réciprocity de Frobenius qui traduisent les adjonctions entre nos trois foncteurs

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}/G}(\text{c-ind}_{F/K}^{X/G} \mathcal{F}, \mathcal{G}) &\simeq \text{Hom}_{(\mathcal{C}/F)^\sim/K}(\mathcal{F}, \text{Res}_{F/K}^{X/G} \mathcal{G}) \\ \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}/G}(\mathcal{G}, \text{Ind}_{F/K}^{X/G} \mathcal{F}) &\simeq \text{Hom}_{(\mathcal{C}/F)^\sim/K}(\text{Res}_{F/K}^{X/G} \mathcal{G}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

et les propriétés de transitivité usuelles.

Le triplet de foncteurs adjoints précédent implique en particulier que $\text{Ind}_{F/K}^{X/G}$ et $\text{Res}_{F/K}^{X/G}$ envoient les injectifs sur des injectifs.

Exemple IV.8.10. Considérons les faisceaux de Λ -modules. Les G -faisceaux lisses $\text{c-ind}_{U/K}^{X/G}(\underline{\Delta})$, pour U dans \mathcal{C} et K agissant sur U relevant canoniquement l'action de G sur X , vérifient

$$\text{Hom}(\text{c-ind}_{U/K}^{X/G}(\underline{\Delta}), \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(U)^K$$

Ainsi, si \mathcal{F} est lisse, $\mathcal{F}(U) = \varinjlim_K \mathcal{F}(U)^K$ et donc les objets $\text{c-ind}_{U/K}^{X/G}(\underline{\Delta})$ forment

un système de générateurs de la catégorie abélienne $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G$.

Exemple IV.8.11. Soit $(U_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ une famille finie de morphismes dans \mathcal{C} , $I = \{i_1, \dots, i_n\}$. On vérifie aisément que le produit fibré $F = h_{U_{i_1}} \times_{h_Y} \cdots \times_{h_Y} h_{U_{i_n}} \in \widehat{\mathcal{C}}$ est naturellement un K -préfaisceau lisse pour K compact ouvert suffisamment petit. Alors $\text{c-Ind}_{F/K}^{X/G} \underline{\Delta}$ vérifie

$$\text{Hom}(\text{c-Ind}_{F/K}^{X/G} \underline{\Delta}, \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(F, \mathcal{F})^K$$

IV.8.4 Les G -faisceaux lisses forment un topos

Proposition IV.8.12. *La catégorie des G -faisceaux lisses $\tilde{\mathcal{C}}/G$ est un topos.*

Démonstration. On applique le critère de Giraud (théorème 1.2 de l'exposé IV de SGA4). L'existence de limites projectives finies ne pose pas de problème puisque les limites projectives finies de G -faisceaux lisses dans la catégorie des faisceaux sont encore des G -faisceaux lisses. L'existence de sommes directes quelconques ainsi que de quotients par les relations d'équivalence est une conséquence du lemme IV.8.4. L'existence d'une petite famille génératrice se déduit des résultats de la sous-section précédente: les faisceaux lisses $\text{c-ind}_{U/K}^{G/X} e$, où e est l'objet final du topos $(\widetilde{\mathcal{C}/U})/K$, forment un système de générateurs de $\tilde{\mathcal{C}}/G$, puisque pour tout $\mathcal{F} \in \tilde{\mathcal{C}}/G$

$$\text{Hom}(\text{c-ind}_{U/K}^{G/X} e, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)^K$$

$$\text{et } \mathcal{F}(U) = \varprojlim_K \mathcal{F}(U)^K. \quad \square$$

Remarque IV.8.13. Le topos $\tilde{\mathcal{C}}/G$ est annelé par $\underline{\Lambda}$. On en déduit donc, d'une autre façon, que la catégorie $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G$ possède suffisamment d'injectifs.

Remarque IV.8.14. Les limites projectives quelconques, non-finies, dans le topos $\tilde{\mathcal{C}}/G$ se calculent de la façon suivante: $\varprojlim_{i \in I} \mathcal{F}_i$ dans $\tilde{\mathcal{C}}/G$ est égal à $(\varprojlim_{i \in I} \mathcal{F}_i)^\infty$, la partie lisse de la limite projective des faisceaux usuels.

IV.8.5 Le théorème d'acyclicité

IV.8.5.1 Un cas simple

Théorème IV.8.15. *Supposons que les produits fibrés existent dans \mathcal{C} et que donc la topologie du site \mathcal{C} soit définie par une prétopologie. Soit $\mathcal{F} \in \Lambda - \tilde{\mathcal{C}}$ un faisceau injectif de Λ -modules. Alors, le faisceau sous-jacent dans $\tilde{\mathcal{C}}$ à $(\text{Ind } \mathcal{F})^\infty \in \tilde{\mathcal{C}}/G$ est acyclique sur tout objet de \mathcal{C} . En particulier, le faisceau sous-jacent à tout objet injectif dans $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G$ est \mathcal{C} -acyclique.*

Démonstration. Il y a un isomorphisme de faisceaux et même de préfaisceaux (utiliser que tout objet de \mathcal{C} est quasicompact)

$$\varprojlim_K \prod_{g \in \Omega_K} g^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (\text{Ind } \mathcal{F})^\infty$$

où pour tout K , Ω_K est un ensemble de représentants dans G de G/K . Maintenant, si $U \in \mathcal{C}$ et $(V_\alpha \rightarrow U)_{\alpha \in A}$ est une famille couvrante finie pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in A$, le produit fibré $V_{\alpha_1} \times_U \dots \times_U V_{\alpha_p}$ existe dans \mathcal{C} et est en particulier quasicompact.

De cela on déduit que pour un tel recouvrement \mathcal{U} , $(\mathcal{G}_i)_i$ un système inductif filtrant de faisceaux et $q \geq 0$,

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \varinjlim_i \mathcal{G}_i) = \varinjlim_i \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}_i)$$

Donc, si pour tout i le faisceau \mathcal{G}_i est injectif, on en déduit que $\varinjlim_i \mathcal{G}_i$ est Čech-acyclique pour tout recouvrement fini tel que précédemment, donc \mathcal{C} -acyclique. On conclut, car $\prod_{g \in \Omega_K} g^* \mathcal{F}$ est injectif. \square

IV.8.5.2 Compléments sur la cohomologie de Čech. Dans cette sous-section, on oublie momentanément les notations précédentes. On reprend ici le formalisme du complexe de Čech développé dans l'exposé V de SGA4, dans le cas d'un recouvrement $(U_i \rightarrow X)_i$ pour lequel les produits fibrés $U_{i_1} \times_X \cdots \times_X U_{i_p}$ n'existent pas.

Soit donc \mathcal{C} une catégorie, Λ un anneau et $(U_i \rightarrow X)_i$ une famille finie de morphismes dans \mathcal{C} . On note $R \in \widehat{\mathcal{C}}$ le crible de X engendré par cette famille. Il y a un couple de foncteurs adjoints

$$(j_!, j^*) : \prod_{i \in I} \widehat{\mathcal{C}}/U_i \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}/R$$

On note $\Lambda \in \widehat{\mathcal{C}}/R$ le préfaisceau constant.

À un tel couple de foncteurs adjoints est associé un complexe simplicial de Λ -modules (cf. [21] chapitre I section 1.5), D^\bullet

$$D^p \rightrightarrows D^{p+1} \quad \cdots \rightrightarrows D^0$$

$$D^p = \underbrace{(j_! j^*) \circ \cdots \circ (j_! j^*)}_{-p+1 \text{ fois}} \Lambda$$

dont les flèches simpliciales sont données par les applications d'adjonction. De plus, ce complexe est augmenté vers Λ , $D^\bullet \rightarrow \Lambda$.

Lemme IV.8.16. $D^\bullet \rightarrow \Lambda$ est une résolution projective de Λ dans $\widehat{\mathcal{C}}/R$.

Démonstration. La famille $(U_i \rightarrow X)_{i \in I}$ étant épimorphique vers l'objet final de $\widehat{\mathcal{C}}/R$, il suffit de montrer que $j^* D^\bullet \rightarrow j^* \Lambda$ est une résolution. Mais, le complexe $[j^* D^\bullet \rightarrow j^* \Lambda]$ est homotope à zéro (cf. [21] chapitre I section 1.5). Les D^p sont projectifs car $j_!$ et j^* , possédant tous deux un adjoint à droite, envoient projectifs sur projectifs. \square

Si $\kappa : \widehat{\mathcal{C}}/R \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$, $\Lambda_R = \kappa_! \Lambda$, on obtient donc une résolution projective

$$[C^\bullet \rightarrow \Lambda_R] = \kappa_! [D^\bullet \rightarrow \Lambda]$$

On a concrètement en notant $\forall i_1, \dots, i_p \in I$,

$$\Lambda_{h_{U_{i_1}} \times_R \cdots \times_R h_{U_{i_p}}} = \delta_! \Lambda \quad \text{où} \quad \delta : \widehat{\mathcal{C}}/h_{U_{i_1}} \times_R \cdots \times_R h_{U_{i_p}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$$

où comme d'habitude h_Y désigne le préfaisceau représenté par Y , ce qui peut encore se réécrire

$$\begin{aligned} \Lambda_{h_{U_{i_1}} \times_R \cdots \times_R h_{U_{i_p}}} &= \Lambda_{U_{i_1}} \otimes_{\Lambda_R} \cdots \otimes_{\Lambda_R} \Lambda_{U_{i_p}} \\ C^{-p+1} &= \bigoplus_{i_1, \dots, i_p \in I} \Lambda_{h_{U_{i_1}} \times_R \cdots \times_R h_{U_{i_p}}} \end{aligned}$$

Si $F \in \Lambda - \widehat{\mathcal{C}}$ est un préfaisceau de Λ -modules, on peut donc calculer

$$\forall q \geq 0, \quad H^q(R, F) = \text{Ext}_{\Lambda}^q(\Lambda_R, F) = H^q(\text{Hom}_{\Lambda}(C^{\bullet}, F))$$

où $H^q(R, -)$ désigne la cohomologie dans le topos $\widehat{\mathcal{C}}$.

Supposons maintenant que \mathcal{C} est un site et soit $\mathcal{F} \in \Lambda - \widetilde{\mathcal{C}}$ un faisceau de Λ -modules. Supposons de plus que le crible R de X soit couvrant. On note, comme dans l'exposé V de SGA4, $\mathcal{H}^0 : \widetilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ le plongement canonique. On a alors

$$H^q(R, \mathcal{H}^0(\mathcal{F})) = H^q(\text{Hom}(C^{\bullet}, \mathcal{H}^0(\mathcal{F}))) = H^q(\text{Hom}(aC^{\bullet}, \mathcal{F}))$$

où aC^{\bullet} est le complexe de faisceaux associé au complexe de préfaisceaux C^{\bullet} . Ce complexe se calcule comme précédemment en remplaçant $\widehat{\mathcal{C}}$ par $\widetilde{\mathcal{C}}$, les catégories $\widehat{\mathcal{C}}/(-)$ par $\widetilde{\mathcal{C}}/(-)$ et les foncteurs $(j_!, j^*)$ par leurs analogues faisceautiques.

Rappelons que si $F \in \widehat{\mathcal{C}}$, alors $\widetilde{\mathcal{C}}/F = \widetilde{\mathcal{C}}/aF$. Étant donné que $aR = X$, on en déduit que

$$aC^{-p+1} = \bigoplus_{i_1, \dots, i_p \in I} \Delta_{h_{U_{i_1}} \times_{h_X} \cdots \times_{h_X} h_{U_{i_p}}} = \bigoplus_{i_1, \dots, i_p \in I} \Delta_{U_{i_1}} \otimes_{\Delta_X} \cdots \otimes_{\Delta_X} \Delta_{U_{i_p}}$$

IV.8.5.3 Le théorème d'acyclicité en général. On reprend maintenant les hypothèses des sections antérieures.

Hypothèse supplémentaire: On suppose que si $(U_i \longrightarrow Y)_{i \in I}$ est une famille couvrante finie, alors $\forall p, \forall i_1, \dots, i_p \in I$, le préfaisceau $h_{U_{i_1}} \times_{h_Y} \cdots \times_{h_Y} h_{U_{i_p}}$ est quasicompact dans $\widehat{\mathcal{C}}$ muni de la topologie définie dans la section 5 de l'exposé II de SGA4. Cette dernière condition, vérifiée par exemple si la topologie sur \mathcal{C} est induite par une prétopologie, signifie qu'il existe une famille finie $(V_{\alpha} \longrightarrow h_{U_{i_1}} \times_{h_Y} \cdots \times_{h_Y} h_{U_{i_p}})_{\alpha}$, où $V_{\alpha} \in \mathcal{C}$, telle que $\forall \mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{C}}, \text{Hom}(h_{U_{i_1}} \times_{h_Y} \cdots \times_{h_Y} h_{U_{i_p}}, \mathcal{F}) \hookrightarrow \prod_{\alpha} \mathcal{F}(V_{\alpha})$.

L'hypothèse compliquée précédente vient de ce que lorsqu'on va appliquer notre formalisme au site $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$, les morphismes dans ce site ne sont pas quarables en général. Par contre, pour les espaces analytiques rigides usuels, cette hypothèse est automatique puisque la topologie est associée à une prétopologie.

Théorème IV.8.17. *Sous les hypothèses précédentes, si $\mathcal{F} \in \Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G$ est un G -faisceau lisse de Λ -modules injectifs, alors le faisceau sous-jacent de Λ -modules est \mathcal{C} -acyclique.*

Démonstration. Soit $(U_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ une famille couvrante finie dans \mathcal{C} . Soit R le crible de Y engendré par cette famille. D'après la proposition 4.3 de l'exposé V de SGA4, on doit montrer que

$$\forall q > 0, H^q(R, \mathcal{H}^0(\mathcal{F})) = 0$$

Utilisons les résultats et notations de la sous-section précédente pour écrire

$$H^q(R, \mathcal{H}^0(\mathcal{F})) = H^q(\text{Hom}_{\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}}(aC^\bullet, \mathcal{F}))$$

où $aC^{-p+1} = \bigoplus_{i_1, \dots, i_p \in I} \underline{\Delta}_{h_{U_{i_1}} \times_{h_X} \dots \times_{h_X} h_{U_{i_p}}}$. Soit donc $i_1, \dots, i_p \in I$ et $F = h_{U_{i_1}} \times_{h_X} \dots \times_{h_X} h_{U_{i_p}} \in \hat{\mathcal{C}}$. Considérons des sous-groupes compacts ouverts K suffisamment petits tels que l'action de K sur X s'étende à chacun des U_i et donc "canoniquement" à F . Un tel sous-groupe K agit sur

$$\mathcal{F}(F) = \text{Hom}_{\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}}(\underline{\Delta}_F, \mathcal{F})$$

Il y a une application injective

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ K}} \mathcal{F}(F)^K \hookrightarrow \mathcal{F}(F)$$

Cette application est bijective, car si $(V_\alpha \rightarrow F)_\alpha$ est une famille finie comme dans les hypothèses de cette section, alors $\mathcal{F}(F) \hookrightarrow \prod_\alpha \mathcal{F}(V_\alpha)$ et $\forall \alpha \mathcal{F}(V_\alpha) = \bigcup_K \mathcal{F}(V_\alpha)^K$. Donc

$$\text{Hom}(aC^\bullet, \mathcal{F}) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K}} \text{Hom}(aC^\bullet, \mathcal{F})^K$$

La limite inductive étant filtrante, il suffit de montrer que $\forall K$ suffisamment petit, $\text{Hom}(aC^\bullet, \mathcal{F})^K$ est acyclique en degré > 0 .

Soit donc K petit. On a un couple de foncteurs adjoints comme dans la section IV.8.3.4

$$(j_{K!}, j_K^*) : \prod_{i \in I} ((\mathcal{C}/U_i)/K)_\infty^\sim \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}/G$$

d'où une résolution dans $\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G$

$$N^\bullet \longrightarrow \underline{\Delta}$$

$$N^{-p+1} = \underbrace{(j_{K!} j_K^*) \circ \dots \circ (j_{K!} j_K^*)}_{p \text{ fois}} = \bigoplus_{i_1, \dots, i_p \in I} \text{c-ind}_{h_{U_{i_1}} \times_{h_X} \dots \times_{h_X} h_{U_{i_p}}/K}^{X/G} \underline{\Delta}$$

et $\text{Hom}_{\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}}(aC^\bullet, \mathcal{F})^K = \text{Hom}_{\Lambda - \tilde{\mathcal{C}}/G}(N^\bullet, \mathcal{F})$. D'où le résultat. \square

Remarque IV.8.18. On aurait également pu appliquer la méthode de la preuve du théorème IV.8.15, qui consiste à vérifier que $(\text{Ind } \mathcal{F})^\infty$ est \mathcal{C} -acyclique si \mathcal{F} est injectif. Cela se ramène à montrer qu'une limite inductive filtrante d'objets \mathcal{C} -acycliques est \mathcal{C} -acyclique. Il suffit pour cela de vérifier que pour une famille couvrante finie dans \mathcal{C} , la cohomologie de Čech associée commute aux limites inductives filtrantes, ce qui est le cas grâce à l'hypothèse de quasi-compacité des produits faite au début de cette sous-section.

IV.8.5.4 Cohomologie des G -faisceaux lisses. Du théorème précédent on déduit.

Corollaire IV.8.19. *Soit U un objet de \mathcal{C} , K un sous-groupe ouvert de G tel que l'action de K sur U se relève "canoniquement". Alors $\forall q \geq 0, \forall \mathcal{F} \in \tilde{\mathcal{C}}/G, H^q(U, \mathcal{F})$ est un K -module lisse. On a, de plus,*

$$H^q(U, \mathcal{F}) = \varinjlim_K \text{Ext}_{\tilde{\mathcal{C}}/G}^q(\text{c-ind}_{U/K}^{X/G}, \mathcal{F}).$$

On peut définir un complexe de cohomologie K -équivariant lisse dans la catégorie dérivée des complexes de Λ -modules munis d'une action lisse de G , complexe qui calcule le complexe de cohomologie usuelle dans $\mathbb{D}^+(\Lambda)$ après oubli de l'action de G .

IV.8.6 Faisceaux lisses sur une tour formée par un pro-torseur

Soit \mathcal{C} un site.

Soit G un groupe fini et $Y \xrightarrow{p} X$ un G -torseur au-dessus de X dans \mathcal{C} . Rappelons qu'il y a une équivalence

$$\begin{array}{ccc} \text{Faisceaux sur } X & \xrightarrow{\sim} & \text{Faisceaux } G\text{-équivariants sur } Y \\ \mathcal{F} & \longmapsto & p^* \mathcal{F} \end{array}$$

où G -équivariant signifie une action compatible à celle de G sur Y (ce que les adeptes des champs notent $[G \backslash Y] = X$). L'équivalence inverse est donnée par

$$\mathcal{G} \longmapsto (p_* \mathcal{G})^G$$

Le but de cette section est de généraliser cela aux pro-torseurs sous un groupe profini.

Exemple IV.8.20. Avant de nous lancer, expliquons ce que l'on veut faire dans un cas particulièrement simple. Soit k un corps de clôture séparable \bar{k} et X un k -schéma de type fini. Le topos étale de $X_{\bar{k}}$ s'identifie à la limite projective des topos étales X_L , où $L|k$ parcourt les extensions galoisiennes de degré fini. En effet, le site étale de $X_{\bar{k}}$ s'identifie à la limite inductive des sites X_L , $L|k$ galois finie, au sens où les $X_{\bar{k}}$ -schémas étales (quasicompacts) sont les germes de X_L -schémas étales lorsque L varie, et un morphisme de germe est couvrant en un niveau suffisamment grand ssi il le devient sur $X_{\bar{k}}$. Les faisceaux étales sur X s'identifient alors, via

p^* où $p : X_{\bar{k}} \rightarrow X$, aux faisceaux étales sur $X_{\bar{k}}$ munis d'une action de $\text{Gal}(\bar{k}|k)$ compatible à celle de $\text{Gal}(\bar{k}|k)$ sur $X_{\bar{k}}$, qui est discrète, au sens où les sections sur un schéma étale quasicompact ont un stabilisateur ouvert. La condition est une condition de continuité sur la donnée de descente relativement au pro- $\text{Gal}(\bar{k}|k)$ -torseur $X_{\bar{k}} \rightarrow X$.

Soit donc G un groupe profini et $(G_i)_{i \geq 0}$ une famille décroissante de sous-groupes ouverts distingués dans G telle que $\bigcap_{i \geq 0} G_i = \{e\}$ et $G_0 = G$. Supposons nous donnée une tour dans \mathcal{C}

$$\dots \rightarrow X_{i+1} \rightarrow X_i \rightarrow \dots \rightarrow X_0$$

où l'on notera $\forall i \geq j$, $\varphi_{ij} : X_i \rightarrow X_j$. Supposons que cette tour est munie d'une action de G , au sens où $\forall i$, G/G_i agit sur X_i et $\forall i \geq j$, le morphisme $X_i \rightarrow X_j$ est compatible à ces actions, via $G/G_i \rightarrow G/G_j$.

Supposons de plus que $\forall i$, l'action de G/G_i sur X_i fasse de X_i un G/G_i -torseur au-dessus de X_0 (et donc $\forall i \geq j$, $X_i \rightarrow X_j$ est un G_i/G_j -torseur).

Considérons le système projectif de topos

$$\dots \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}/X_{i+1} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}/X_i \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}/X_0$$

où rappelons que les topos $\tilde{\mathcal{C}}/U_i$ s'identifient aux $(\mathcal{C}/U_i)^\sim$. La limite projective de ce système $\mathcal{T}_\infty = \varprojlim_{i \geq 0} (\tilde{\mathcal{C}}/X_i)$ est la catégorie des systèmes $(\mathcal{F}_i)_{i \geq 0}$, $\mathcal{F}_i \in \tilde{\mathcal{C}}/X_i$,

munis d'isomorphismes $\forall i \geq j$, $c_{ij} : \varphi_{ij*} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j$, vérifiant une condition de cocycle.

Il y a une "action" de G sur \mathcal{T}_∞ , au sens où pour tout $g \in G$, il y a une équivalence de topos $\alpha_g : \mathcal{T}_\infty \rightarrow \mathcal{T}_\infty$, définie par

$$\alpha_g = (g^*, g_*), \quad \text{où} \quad g^*((\mathcal{F}_i)_i, (c_{ij})_{i \geq j}) = ((g^* \mathcal{F}_i)_i, (g^*(c_{ij}))_{i \geq j}),$$

vérifiant $\forall g, g' \in G$, il y a une transformation naturelle $\alpha_{gg'} \xrightarrow{\sim} \alpha_g \circ \alpha_{g'}$ satisfaisant à une condition de cocycle naturelle. On peut donc définir

$$G - \mathcal{T}_\infty$$

la catégorie des G -objets dans \mathcal{T}_∞ comme étant les $A \in \mathcal{T}_\infty$ munis d'isomorphismes $\forall g \in G$, $g^* A \xrightarrow{\sim} A$, satisfaisant à une condition de cocycle. On vérifie qu'en fait

$$G - \mathcal{T}_\infty \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{i \geq 0} (\widetilde{\mathcal{C}/X_i})/G^{\text{disc}}$$

On remarquera qu'il faudra faire attention à ne pas prendre $(\widetilde{\mathcal{C}/X_i})/(G/G_i)^{\text{disc}}$, mais bien $(\widetilde{\mathcal{C}/X_i})/G^{\text{disc}}$, et que $(\widetilde{\mathcal{C}/X_i})/G^{\text{disc}}$ est, par définition, la catégorie des

faisceaux G -équivariants au-dessus de X_i , au sens où l'action est compatible à l'action de G sur X_i , via $G \rightarrow G/G_i$; en particulier, le faisceau sous-jacent à un objet de $(\widetilde{\mathcal{C}/X_i})/G^{\text{disc}}$ est muni d'une action "abstraite" de G_i .

Pour tout $i \geq 0$, l'objet X_i muni de son action de G via $G \rightarrow G/G_i$, vérifie les hypothèses de la section IV.8.1, puisque G_i agit trivialement sur X_i . On peut donc définir $(\widetilde{\mathcal{C}/X_i})/G$ la catégorie des G -faisceaux lisses. Un $\mathcal{F} \in (\widetilde{\mathcal{C}/X_i})/G^{\text{disc}}$ est lisse ssi le faisceau muni d'une action de G_i , $\text{Res}_{X_i/G_i}^{X_i/G} \mathcal{F}$, l'est.

Lemme IV.8.21. Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \geq 0} \in G - \mathcal{T}_\infty$, où $\forall i$ $\mathcal{F}_i \in (\widetilde{\mathcal{C}/X_i})/G^{\text{disc}}$. Sont équivalents

- $\forall i$, \mathcal{F}_i est lisse
- \mathcal{F}_0 est lisse.

Démonstration. Supposons \mathcal{F}_0 lisse. On a un isomorphisme $\forall i$, $\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\sim} \varphi_{i0*} \mathcal{F}_i$. Donc, si $K \subset G_i$, K agissant trivialement sur U_i ,

$$\mathcal{F}_0^K \xrightarrow{\sim} \varphi_{i0*}(\mathcal{F}_i^K)$$

(puisque φ_{i0*} est le foncteur image directe d'un morphisme de topos, il commute aux limites projectives quelconques et donc aux invariants sous K). Le faisceau \mathcal{F}_i est lisse ssi

$$\alpha : \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K \subset G_i}} \mathcal{F}_i^K \hookrightarrow \mathcal{F}_i$$

est un isomorphisme. Il y a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K}} \mathcal{F}_0^K & \xrightarrow{\simeq} & \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K}} \varphi_{i0*}(\mathcal{F}_i^K) & \xrightarrow{\simeq} & \varphi_{i0*}(\lim_{\substack{\longrightarrow \\ K}} \mathcal{F}_i^K) \\ & \searrow \simeq & & & \downarrow \varphi_{i0*}(\alpha) \\ & & \mathcal{F}_0 & \xrightarrow{\simeq} & \varphi_{i0*} \mathcal{F}_i \end{array}$$

(où φ_{i0*} commute aux limites inductives, car $X_i \rightarrow X_0$ étant un toreur sous un groupe fini, $\varphi_{i0*} = \varphi_{i0!}$ est adjoint à gauche de $\varphi_{i0}^* = \varphi_{i0}^!$). Donc $\varphi_{i0*}(\alpha)$ est un isomorphisme, ce qui implique que α en est un, puisque φ_{i0} est couvrant. \square

Par définition, on notera $(G - \mathcal{T}_\infty)_\infty$ les systèmes projectifs de faisceaux satisfaisant aux hypothèses du lemme précédent.

Théorème IV.8.22. Supposons que tout objet de \mathcal{C} est quasicompact. Il y a alors une équivalence de catégories entre $(G - \mathcal{T}_\infty)_\infty$, les faisceaux en niveau infini munis d'une action lisse de G compatible à l'action sur la tour, et $(\mathcal{C}/X_0)^\sim$, les faisceaux sur la base de la tour.

Démonstration. Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \geq 0}$ un objet de $(G - \mathcal{T}_\infty)_\infty$, où $\forall i$, \mathcal{F}_i est muni d'une action de G compatible à celle de G/G_i sur X_i . Associons-lui $\mathcal{F}_0^G \in (\mathcal{C}/X_0)^\sim$, le faisceau des invariants de \mathcal{F}_0 sous G .

Réciproquement, étant donné $\mathcal{G} \in (\mathcal{C}/X_0)^\sim$, posons

$$\forall i \geq 0, \mathcal{F}_i = \varinjlim_{j \geq i} \varphi_{ji*} \varphi_{j0}^* \mathcal{G}$$

Étant donné que $\varphi_{j0}^* \mathcal{G}$ est muni d'une action de G/G_j compatible à celle de G sur X_j si $j \geq i$, le faisceau $\varphi_{ji*} \varphi_{j0}^* \mathcal{G}$ est muni d'une action de G/G_j compatible à l'action de G/G_j sur X_i , via $G/G_j \rightarrow G/G_i$. De plus \mathcal{F}_i est lisse comme limite inductive de faisceaux lisses (lemme IV.8.4).

Reste à voir que cela définit bien des équivalences inverses.

Si $(\mathcal{F}_i)_i \in (G - \mathcal{T}_\infty)_\infty$, \mathcal{F}_i étant lisse,

$$\mathcal{F}_i = \varinjlim_{j \geq i} \mathcal{F}_i^{G_j}$$

L'isomorphisme $\mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} \varphi_{ji*} \mathcal{F}_j$ induit $\mathcal{F}_i^{G_j} \xrightarrow{\sim} \varphi_{ji*} (\mathcal{F}_j^{G_j})$. Le faisceau $\mathcal{F}_j^{G_j}$ sur X_j est muni d'une action de G/G_j compatible à celle sur X_j . D'après les rappels du début de cette section, puisque $X_j \rightarrow X_0$ est un G/G_j -torseur, cela implique

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j^{G_j} &\simeq \varphi_{j0}^* \left[\varphi_{j0*} (\mathcal{F}_j^{G_j}) \right]^{G/G_j} = \varphi_{j0}^* ((\varphi_{j0*} \mathcal{F}_j)^G) \\ &\simeq \varphi_{j0}^* (\mathcal{F}_0^G) \end{aligned}$$

Donc, au final,

$$\mathcal{F}_i \simeq \varinjlim_{j \geq i} \varphi_{ji*} \varphi_{j0}^* (\mathcal{F}_0^G)$$

Dans l'autre sens, si $\mathcal{G} \in (\mathcal{C}/X_0)^\sim$, soit

$$\mathcal{F}_0 = \varinjlim_{i \geq 0} \varphi_{i0*} \varphi_{i0}^* \mathcal{G}$$

Utilisant l'hypothèse de quasicompacité, on vérifie que le préfaisceau limite inductive précédent est séparé. On en déduit alors, en utilisant la définition du faisceau associé à un préfaisceau séparé couplée à l'hypothèse de quasicompacité, que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0^G &= \varinjlim_{i \geq 0} [(\varphi_{i0*} \varphi_{i0}^* \mathcal{G})^G] \\ &= \varinjlim_{i \geq 0} [(\varphi_{i0*} \varphi_{i0}^* \mathcal{G})^{G/G_i}] \\ &= \varinjlim_{i \geq 0} \mathcal{G} = \mathcal{G} \end{aligned} \quad \square$$

IV.9 Cohomologie à support compact équivariante-lisse des espaces analytiques de Berkovich

Dans cette section, on en fait bien plus que nécessaire pour le résultat auquel on veut arriver. Par exemple, nous n'utiliserons que la troisième suite spectrale du théorème IV.9.2. Néanmoins, l'auteur pense que ces divers résultats pourraient être utiles et il en profite pour mettre au point une théorie complète sur le sujet. Par exemple, les résultats sur les ouverts distingués ont été utilisés dans le chapitre 4 de [12], ainsi que dans [9] et [10], sans référence écrite. Certains résultats sur les faisceaux lisses sont utilisés dans [9] et [10], avec des esquisses de preuves. Nous donnons des preuves détaillées de tout cela. Réciproquement, l'appendice B de [10] fournit une excellente introduction à cette section.

Soit X un K -espace analytique de Berkovich tel que $|X|$ soit séparé. On fixe un anneau Λ qui servira comme coefficients. On note $X_{\text{ét}}$ le site étale de X tel que défini dans [4].

IV.9.1 Rappels sur les faisceaux mous sur le site étale

IV.9.1.1 Rappels sur les faisceaux mous sur un espace topologique localement compact ([14]). Soit Y un espace topologique séparé localement compact. Considérons les faisceaux de groupes abéliens sur Y .

Les faisceaux c -mous sur Y sont les faisceaux \mathcal{F} qui satisfont à l'une des conditions équivalentes ci-dessous:

- pour tout compact K de Y , l'application $\Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(K, \mathcal{F})$ est surjective
- pour tout ouvert U de Y , \mathcal{F} est $\Gamma_c(U, -)$ -acyclique

Ce sont les faisceaux Φ -mous au sens de Godement, où Φ est la famille paracompactifiante des compacts de Y . Ils vérifient:

- pour j l'inclusion d'un ouvert de Y , $j_!$ et j^* conservent la c -mollesse
- pour i l'inclusion d'un fermé de Y , i^* et i_* conservent la c -mollesse.

De plus, la notion de c -mollesse est locale sur Y , il suffit de la vérifier sur un recouvrement de Y . Tout faisceau flasque est c -mou.

Pour un espace paracompact localement compact, les notions de faisceau Φ -mou, pour Φ la famille des compacts ou bien Φ la famille des fermés, coïncident: un faisceau \mathcal{F} est c -mou ssi il est mou, c'est-à-dire pour tout fermé Z de Y , l'application $\Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{F})$ est surjective.

De cela on déduit que sur Y localement compact, les faisceaux c -mous vérifient en plus des propriétés précédentes:

- ils sont $\Gamma(U, -)$ -acycliques, pour tout ouvert paracompact U de Y
- si $j : U \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert paracompact, ils sont stables par j_* .

De plus si tout point de Y possède un voisinage ouvert paracompact (ce qui est le cas des espaces analytiques de Berkovich), un faisceau \mathcal{F} est c -mou ssi pour tout ouvert paracompact U , le faisceau $\mathcal{F}|_U$ est mou.

IV.9.1.2 Faisceaux mous sur le site étale. Pour $U \rightarrow X$ étale notons $\pi_U : \tilde{X}_{\text{ét}} \rightarrow |U|^\sim$ la projection du topos étale de X sur celui de l'espace topologique $|U|$. Rappelons ([5] section 3) qu'un faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur $X_{\text{ét}}$ est dit mou si:

- Pour tout $U \rightarrow X$ étale avec $|U|$ séparé, la projection $\pi_{U*}\mathcal{F} \in |U|^\sim$ est un faisceau c -mou. De façon équivalente, puisque qu'un espace analytique est localement paracompact, pour tout $U \rightarrow X$ étale avec $|U|$ paracompact, $\pi_{U*}\mathcal{F}$ est un faisceau mou.
- $\forall x \in X$, le faisceau $i_x^*\mathcal{F} \in \mathcal{M}(\mathcal{K}(x))_{\text{ét}}^\sim$, $i_x : \mathcal{M}(\mathcal{K}(x)) \rightarrow X$ est flasque (au sens acyclique sur tous les objets de $\mathcal{M}(\mathcal{K}(x))_{\text{ét}}$). Après choix d'un point géométrique $\bar{x} : \mathcal{M}(\widehat{\mathcal{K}(x)^{\text{alg}}}) \rightarrow X$ au-dessus de x , la condition précédente signifie que le module Galoisien lisse $\bar{x}^*\mathcal{F}$ est acyclique sur tous les sous-groupes ouverts de $\text{Gal}(\mathcal{K}(x)^{\text{alg}}|\mathcal{K}(x))$.

Si \mathcal{F} est mou et $U \rightarrow X$ étale, alors $\forall i > 0$, $R^i\pi_{U*}\mathcal{F} = 0$, grâce à l'hypothèse sur les fibres. De cela on déduit:

- les faisceaux mous sur $X_{\text{ét}}$ sont $\Gamma_c(U, -)$ -acycliques, pour tout ouvert étale $U \rightarrow X$ tel que $|U|$ soit séparé, et $\Gamma(U, -)$ -acycliques, pour tout ouvert étale paracompact U
- si $f : U \rightarrow X$ est étale, ils sont stables par $f_!$ et f^*
- Si $i : W \hookrightarrow X$ est un domaine analytique fermé, ils sont stables par i_* et i^*
- plus généralement ([5] lemme 3.2), si $f : W \rightarrow X$ est quasi-étale, ils sont stables par f^*
- tout faisceau injectif est mou
- la notion de mollesse est locale sur $|X|$

On aura besoin du lemme suivant.

Lemme IV.9.1. *Une limite inductive filtrante de faisceaux mous sur $X_{\text{ét}}$ est molle.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = \varinjlim_i \mathcal{F}_i$ avec, pour tout i , \mathcal{F}_i mou. Soit $U \rightarrow X$ étale, avec $|U|$ séparé, et notons $\pi_U : \tilde{X}_{\text{ét}} \rightarrow |U|^\sim$. Commençons par vérifier que le morphisme naturel $\varinjlim_i \pi_{U*}\mathcal{F}_i \rightarrow \pi_{U*}\varinjlim_i \mathcal{F}_i$ est un isomorphisme. Pour $x \in X$, au niveau des fibres en x , le morphisme précédent induit

$$\varinjlim_i \varinjlim_{U \ni x} \Gamma(U, \mathcal{F}_i) \rightarrow \varinjlim_{U \ni x} \Gamma(U, \varinjlim_i \mathcal{F}_i)$$

où U parcourt les voisinages ouverts de x . Mais pour un tel U , si $W \subset U$ est un domaine analytique compact, voisinage de x , on a $\Gamma(W, \varinjlim \mathcal{F}_i) = \varinjlim \Gamma(W, \mathcal{F}_i)$

(utiliser que W est un objet quasicompact du site $W_{\text{ét}}$). Le morphisme précédent est donc un isomorphisme. Pour vérifier que $\pi_{U*} \varinjlim \mathcal{F}_i$ est c-mou il suffit donc

de vérifier que sur un espace topologique localement compact, une limite inductive filtrante de faisceaux c-mous est c-molle, ce qui ne pose aucun problème.

Quand à la flasquitude des fibres sur les points géométriques de X , elle résulte de ce que la cohomologie Galoisienne commute aux limites inductives filtrantes. \square

IV.9.2 Les quatre suites spectrales de cohomologie de Čech permettant de calculer la cohomologie à support compact

Théorème IV.9.2. *Soit \mathcal{F} un faisceau de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$.*

- *Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de X . Supposons, de plus, que $\dim X < +\infty$ et $\text{cd}_\Lambda(K) < +\infty$ (dimension cohomologique des $\Lambda[\text{Gal}(\bar{K}|K)]$ -modules discrets). Il y a alors une suite spectrale concentrée dans le cadran ($p \leq 0, q \geq 0$)*

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\alpha \in I^{-p+1}} H_c^q(U_\alpha, \mathcal{F}) \implies H_c^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

où $U_{(i_1, \dots, i_{-p+1})} = \bigcap_k U_{i_k}$.

- *Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de X tel que $\forall i, \bar{U}_i$ soit compact. Il y a alors une suite spectrale concentrée dans le cadran ($p \geq 0, q \geq 0$)*

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\alpha \in I^{p+1}} H^q(U_\alpha, \mathcal{F}) \implies H_c^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

- *Soit $(W_i)_{i \in I}$ un recouvrement localement fini de X formé de domaines analytiques compacts. Il y a alors une suite spectrale concentrée dans le cadran ($p \geq 0, q \geq 0$)*

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\alpha \in I^{p+1}} H^q(W_\alpha, \mathcal{F}) \implies H_c^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

où $W_{(i_1, \dots, i_{p+1})} = \bigcap_k W_{i_k}$.

- *Reprenons les mêmes hypothèses que dans la suite spectrale précédente. Supposons, de plus, que $\dim X < +\infty$ et $\text{cd}_\Lambda(K) < +\infty$. Il y a alors une suite spectrale concentrée dans le cadran ($p \leq 0, q \geq 0$)*

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\alpha \in I^{-p+1}} H_{W_\alpha}^q(X, \mathcal{F}) \implies H_c^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

Démonstration. On considère les deux morphismes surjectifs

$$j : \prod_{i \in I} U_i \longrightarrow X, \quad i : \prod_{i \in I} W_i \longrightarrow X$$

auxquels sont associés quatre couples de foncteurs adjoints, $(j!, j^*)$ pour la première suite spectrale, (j^*, j_*) pour la seconde, (i^*, i_*) pour la troisième et $(i_*, i^!)$ pour la dernière. De tels triplets de foncteurs adjoints permettent de construire des complexes simpliciaux/cosimpliciaux augmentés qui deviennent homotopiquement triviaux après application de j^* , resp. j_* , resp. i^* , resp. $i^!$. Soit donc \mathcal{G} un faisceau de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$. À chacun de ces couples de foncteurs adjoints est associée une résolution simpliciale $C^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}$, ou co-simpliciale $\mathcal{G} \longrightarrow C^\bullet$, où si $j_\alpha : U_\alpha \longrightarrow X$, $i_\alpha : W_\alpha \longrightarrow X$,

$$C^p = \bigoplus_{\alpha \in I^{-p+1}} j_{\alpha!} j_\alpha^* \mathcal{G}, \quad \Gamma_c(X, C^p) = \bigoplus_{\alpha \in I^{-p+1}} \Gamma_c(U_\alpha, \mathcal{G})$$

pour la première suite spectrale,

$$C^p = \prod_{\alpha \in I^{p+1}} j_{\alpha*} j_\alpha^* \mathcal{G}, \quad \Gamma_c(X, C^p) = \bigoplus_{\alpha \in I^{p+1}} \Gamma(U_\alpha, \mathcal{G})$$

pour la seconde (utiliser l'hypothèse que les \overline{U}_i sont compacts et les U_i localement finis, pour voir que $\Gamma_c(X, C^p) \subset \Gamma(X, C^p) = \prod_\alpha \Gamma(U(\alpha), \mathcal{G})$ est le sous-module formé par la somme directe),

$$C^p = \prod_{\substack{\alpha \subset I \\ |\alpha|=p+1}} i_{\alpha*} i_\alpha^* \mathcal{G}, \quad \Gamma_c(X, \mathcal{G}) = \bigoplus_{\alpha \in I^{p+1}} \Gamma(W_\alpha, \mathcal{G})$$

pour la troisième (pour vérifier qu'il s'agit bien d'une résolution, utiliser que si $\kappa : W \hookrightarrow X$ est un domaine analytique dans X , alors $(\kappa_* \mathcal{H})_{\kappa(x)} = \mathcal{H}_x$),

$$C^p = \prod_{\alpha \in I^{-p+1}} i_{\alpha*} i_\alpha^! \mathcal{G}, \quad \Gamma_c(X, C^p) = \bigoplus_{\alpha \in I^{-p+1}} \Gamma_{W_\alpha}(X, \mathcal{G})$$

pour la dernière (pour vérifier que cette dernière est une résolution, il faut utiliser la même assertion que précédemment sur les fibres des images directes par une immersion d'un domaine analytique et que tout point de X possède un voisinage formé d'une union finie de W_i).

Soit \mathcal{G} un faisceau de Λ -modules injectif.

- Pour la première suite spectrale, $\bigoplus_{\alpha \in I^{-p+1}} j_{\alpha!} j_\alpha^* \mathcal{G}$ est un faisceau mou, car une somme directe finie de faisceaux mous est molle, la notion de mollesse est locale sur $|X|$, les $(U_i)_i$ sont localement finis, donc la somme directe précédente est localement une somme finie et enfin les $j_{\alpha!} j_\alpha^*$ conservent la mollesse.

- Pour la seconde suite spectrale, $\prod_{\alpha \in I^{p+1}} j_{\alpha*} j_{\alpha}^* \mathcal{G}$ est un faisceau injectif comme produit de faisceaux injectifs.
- Pour la troisième, $C^p = \prod_{\alpha \in I^{p+1}} i_{\alpha*} i_{\alpha}^* \mathcal{G}$ est mou, car la notion de mollesse est locale sur $|X|$, localement sur $|X|$ le produit précédent est fini et les $i_{\alpha*} i_{\alpha}^*$ conservent la mollesse.
- Enfin pour la dernière suite spectrale, $C^p = \prod_{\alpha \in I^{-p+1}} i_{\alpha*} i_{\alpha}^! \mathcal{G}$ est injectif comme produit d'injectifs.

Les résolutions $C^{\bullet}(\mathcal{G})$ sont fonctorielles en \mathcal{G} . Si $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^{\bullet}$ est une résolution injective de \mathcal{F} , pour tout p , les $C^{\bullet}(\mathcal{I}^p)$ sont des résolutions $\Gamma_c(X, -)$ -acycliques de \mathcal{I}^p . Pour la première et la troisième suite spectrale, vu l'hypothèse $\dim X + \text{cd}_{\Lambda}(K) < +\infty$, on remplace \mathcal{I}^{\bullet} par $\tau_{\leq d} \mathcal{I}^{\bullet}$, avec $d > 2 \dim X + \text{cd}_{\ell}(K)$. Alors le complexe total $\text{Tot } C^{\bullet}(\mathcal{I}^{\bullet})$ est une résolution $\Gamma_c(X, -)$ -acyclique de \mathcal{F} .

On conclut en appliquant la suite spectrale d'un complexe double, car:

- Pour la première suite spectrale et tout α , $j_{\alpha}^* \mathcal{I}^{\bullet}$ est une résolution molle de $j_{\alpha}^* \mathcal{F}$ donc $\Gamma_c(U(\alpha), -)$ -acyclique.
- Pour la seconde suite spectrale et tout α , $j_{\alpha}^* \mathcal{I}^{\bullet}$ est une résolution injective de $j_{\alpha}^* \mathcal{F}$ donc $\Gamma(U(\alpha), -)$ -acyclique.
- Pour la troisième et tout α , $i_{\alpha}^* \mathcal{I}^{\bullet}$ est une résolution molle de $i_{\alpha}^* \mathcal{F}$ sur l'espace compact $W(\alpha)$, donc $\Gamma(W(\alpha), -)$ -acyclique.
- Pour la quatrième, \mathcal{I}^{\bullet} est une résolution injective de \mathcal{F} donc $\Gamma_{W(\alpha)}(X, -)$ -acyclique. \square

Remarque IV.9.3. Les deux premières suites spectrales, ainsi que les deux dernières, sont Poincaré duales lorsque X est lisse. La première suite spectrale apparaît déjà dans le chapitre 4 de [12].

Remarque IV.9.4. Dans toutes les suites spectrales précédentes, sauf la première, pour qu'il existe de tels recouvrement de X , il faut et il suffit que $|X|$ soit paracompact.

Remarque IV.9.5. Si l'on met un ordre total sur I , alors on peut remplacer les $\bigoplus_{\alpha \in I^{\pm p+1}}$ par $\bigoplus_{\substack{\alpha \subset I \\ |\alpha| = \pm p+1}}$. L'intérêt est que cela permet de borner la suite spectrale en l'indice p , lorsque $\cap_{i \in \alpha} U_i$ est vide, pour $|\alpha| \gg 0$. Le désavantage est qu'alors les applications de bord dépendent de l'ordre sur I .

IV.9.3 Ouverts distingués

Définition IV.9.6 (Berkovich). Un ouvert U de X est distingué s'il peut s'écrire sous la forme $U = W_1 \setminus W_2$, où W_1 et W_2 sont deux domaines analytiques compacts.

Bien sûr, dans la définition précédente, puisque l'intersection de deux domaines analytiques compacts est un domaine analytique compact, on peut toujours supposer $W_2 \subset W_1$. On remarquera qu'une intersection finie d'ouverts distingués est un ouvert distingué.

Exemple IV.9.7. Soit \mathfrak{X} un \mathcal{O}_K -schéma formel π -adique localement topologiquement de type fini sans π -torsion et $Z \subset \mathfrak{X}_{red}$ un fermé quasicompact de sa fibre spéciale réduite. Alors $\mathrm{sp}^{-1}(Z) \subset \mathfrak{X}^{an}$ est un ouvert distingué. En effet, si \mathcal{U} est un ouvert quasicompact contenant Z , alors $Z = \mathcal{U} \setminus (\mathcal{U} \setminus Z)$ et donc $\mathrm{sp}^{-1}(Z) = \mathcal{U}^{an} \setminus (\mathcal{U} \setminus Z)^{an}$.

Exemple IV.9.8. Soit \mathcal{A} une algèbre affinoïde et $f_1, \dots, f_n, g \in \mathcal{A}$ tels que $(f_1, \dots, f_n, g) = \mathcal{A}$. Alors, l'ouvert $\{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid \forall i, |f_i(x)| < |g(x)|\}$ est distingué.

Remarque IV.9.9. Soit U distingué, $U = W_1 \setminus W_2$, avec $W_2 \subset W_1$. D'après Raynaud, il existe un schéma formel admissible \mathfrak{X} muni d'un ouvert \mathcal{V} tel que $\mathfrak{X}^{an} = W_1$ et $\mathcal{V}^{an} = W_2$. Donc, si $Z = \mathfrak{X}_{red} \setminus \mathcal{V}_{red}$, on a $U = \mathrm{sp}^{-1}(Z)$. On remarquera que cela implique en particulier que tout ouvert distingué est union dénombrable de domaines analytiques compacts et est donc paracompact. En effet, si $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ est l'idéal de Z dans \mathfrak{X} , alors, si \mathcal{V}_n désigne l'ouvert de l'éclatement admissible de l'idéal $\mathcal{I}^n + \pi\mathcal{O}_X$, où π engendre le diviseur exceptionnel, on a $\mathrm{sp}^{-1}(Z) = \cup_n \mathcal{V}_n^{an}$.

Lemme IV.9.10. *Supposons X compact et, d'après Raynaud, soit \mathfrak{X} un modèle admissible de X , $X = \mathfrak{X}^{an}$. Une base de la topologie de X stable par intersections finies est formée des ouverts $\mathrm{sp}_{\tilde{\mathfrak{X}}}^{-1}(Z) = (\tilde{\mathfrak{X}}_{/Z})^{an}$, où $\tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$ parcourt les éclatements formels admissibles de \mathfrak{X} et Z parcourt les fermés de $\tilde{\mathfrak{X}}_{red}$.*

Démonstration. Il est clair que l'ensemble donné est bien un ensemble d'ouverts de X stable par intersections finies. Rappelons que dans l'espace $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, avec \mathcal{A} affinoïde, tout point x de X possède une base de voisinages formée de domaines rationnels $X < \frac{f_1, \dots, f_n}{g} >$ tels que

$$x \in \{y \in X \mid \forall i, |f_i(y)| < |g(y)|\}$$

où $f_1, \dots, f_n, g \in \mathcal{A}$ et $(f_1, \dots, f_n, g) = \mathcal{A}$.

Soit maintenant $X = \mathfrak{X}^{an}$ et $x \in X$. Par définition d'un espace de Berkovich, x possède une base de voisinages, formée de domaines analytiques compacts. Soit donc W un tel domaine. Quitte à éclater \mathfrak{X} , on peut supposer que l'on a un ouvert $\mathcal{W} \subset \mathfrak{X}$ tel que $W = \mathcal{W}^{an}$. Fixons un recouvrement affine fini $\mathcal{X} = \cup_i \mathcal{U}_i$. Pour i fixé, puisque $W \cap \mathcal{U}_i^{an}$ est un voisinage de x dans \mathcal{U}_i^{an} , d'après le cas affinoïde précédent, quitte à effectuer un éclatement formel admissible de \mathcal{U}_i , on peut trouver un ouvert $\mathcal{V}_i \subset \mathcal{U}_i$ tel que

$$\overline{\{\mathrm{sp}(x)\}}^{\mathcal{V}_i, red} = \overline{\{\mathrm{sp}(x)\}}^{\mathcal{U}_i, red}$$

où $\text{sp}(x) \in \mathcal{W}_{red}$. De tels éclatements s'étendent, pour tout i , à $\tilde{\mathfrak{X}}$ et donc, quitte à éclater $\tilde{\mathfrak{X}}$, on peut supposer que $\overline{\text{sp}(x)}^{\mathfrak{X}_{red}} \subset \mathcal{W}_{red}$. Alors $\text{sp}^{-1}(\overline{\text{sp}(x)})$ est un voisinage ouvert de x dans X , contenu dans W . \square

Lemme IV.9.11. *Soit \mathfrak{X} un schéma formel admissible et $Z \subset \mathfrak{X}_{red}$ un ensemble constructible. Alors $\text{sp}^{-1}(Z) \subset \mathfrak{X}^{an}$ est ouvert ssi Z est fermé. De plus, si Z est fermé, $\partial(\text{sp}^{-1}(Z)/K) = \emptyset$ ssi Z est propre.*

Démonstration. Soit $z \in Z$ et $x \in \mathfrak{X}^{an}$ tel que $\text{sp}_{\tilde{\mathfrak{X}}}(x) = z$. D'après le lemme précédent, $\text{sp}^{-1}(Z)$ étant ouvert, il existe un éclatement admissible $f : \tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$ tel que $\text{sp}_{\tilde{\mathfrak{X}}}^{-1}(\{\text{sp}_{\tilde{\mathfrak{X}}}(x)\}) \subset \text{sp}^{-1}(Z)$. Cela implique que $\{\text{sp}_{\tilde{\mathfrak{X}}}(x)\} \subset f^{-1}(Z)$, par surjectivité des applications de spécialisation. Le morphisme f étant propre surjectif, on en déduit que $\{z\} \subset Z$ et que donc Z est stable par spécialisation, donc fermé dans \mathfrak{X}_{red} . La dernière assertion est bien connue. \square

Remarque IV.9.12. Plus généralement, si $\mathfrak{Y}_1 \rightarrow \mathfrak{Y}_2$ est un morphisme de schémas formels localement formellement de type fini sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ et sans π -torsion, alors $\partial(\mathfrak{Y}_1^{an}/\mathfrak{Y}_2^{an}) = \emptyset$ ssi le morphisme induit entre les fibres spéciales réduites est propre. Cela est encore équivalent à ce que le morphisme d'espaces adiques $t(\mathfrak{Y}_1) \setminus V(\pi) \rightarrow t(\mathfrak{Y}_2) \setminus V(\pi)$ soit partiellement propre. Par exemple, dans le lemme précédent, si Z est localement fermé, $\text{sp}^{-1}(Z)$ est ouvert ssi $\partial((\tilde{\mathfrak{X}}/Z)^{an}/\mathfrak{X}^{an}) = \emptyset$ ssi $Z \hookrightarrow \mathfrak{X}_{red}$ est propre c'est-à-dire une immersion fermée.

Proposition IV.9.13. *Les ouverts distingués vérifient:*

- (i) *Tout point de X possède une base de voisinages formée d'ouverts distingués.*
- (ii) *Une union finie et une intersection finie d'ouverts distingués est un ouvert distingué.*
- (iii) *Les ouverts distingués sont cofinaux parmi les ouverts relativement compacts de X .*
- (iv) *Si U est un ouvert distingué et W est un domaine analytique compact contenant U , alors $W \setminus U$ est un domaine analytique compact. De plus, il existe un modèle admissible \mathcal{W} de W et un fermé $Z \subset \mathcal{W}_{red}$ tels que $U = \text{sp}_{\mathcal{W}}^{-1}(Z)$.*
- (v) *Si X est compact et \mathfrak{X} un modèle admissible de X , les ouverts distingués sont exactement les tubes au-dessus des fermés dans un éclatement admissible de \mathfrak{X} , c'est-à-dire "les tubes au-dessus d'un fermé dans un niveau fini de la tour des éclatements de \mathfrak{X} ".*
- (vi) *Si $\partial(X/K) = \emptyset$, les ouverts distingués sont exactement les $\text{sp}_{\mathcal{W}}^{-1}(Z)$, où \mathcal{W} est un modèle admissible d'un domaine analytique compact \mathcal{W}^{an} dans X et Z est un fermé propre de \mathcal{W}_{red} .*
- (vii) *Si X est l'espace analytique associé à un espace adique X^{ad} au sens de Huber, les ouverts distingués sont les intérieurs des fermés constructibles quasicompacts dans X^{ad} .*

Démonstration. (i) Soit $x \in X$, W un domaine analytique compact dans X tel que $x \in \overset{\circ}{W}$ et \mathcal{W} un modèle admissible de W . D'après le lemme IV.9.10, il existe un éclatement $\tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$ tel que $\text{sp}_{\tilde{\mathfrak{X}}}^{-1}(\{\overline{\text{sp}_{\tilde{\mathfrak{X}}}(x)}\}) \subset \overset{\circ}{W}$.

(ii) L'assertion sur les intersections finies a déjà été expliquée. Maintenant, si $(U_i)_i$ est un ensemble fini d'ouverts distingués avec $U_i = W_i \setminus W'_i$, on peut trouver un domaine analytique compact W dans X , contenant tous les domaines compacts W_i et W'_i . Il existe alors un modèle admissible \mathcal{W} de W , tel que chacun des W_i et W'_i soient les tubes au-dessus d'ouverts de \mathcal{W} . Dès lors, on en déduit qu'il existe des sous-schémas localement fermés $Z_i \subset \mathcal{W}_{red}$, pour tout i , tels que U_i soit le tube au-dessus de Z_i . D'après le lemme précédent, les Z_i sont en fait fermés dans \mathcal{W} . Alors $\cup_i U_i$ est le tube au-dessus du fermé $\cup_i Z_i$ et est donc un ouvert distingué de X .

(iii) résulte de (i) et (ii).

(vi) Si \mathcal{W}, Z sont comme dans l'énoncé, alors $\text{sp}^{-1}(Z)$ est un ouvert admissible de \mathcal{W}^{an} . De plus, $\text{sp}^{-1}(Z)$ est ouvert dans X , car $\partial(\text{sp}^{-1}(Z)/X) = \emptyset$. Réciproquement, un ouvert distingué dans X s'écrit comme $\text{sp}_{\mathcal{W}}^{-1}(Z)$, où \mathcal{W}^{an} est un domaine compact dans X et Z est fermé dans \mathcal{W} . Mais $\text{sp}^{-1}(Z)$ ouvert dans X implique $\partial(\text{sp}^{-1}(Z)/X) = \emptyset$. Couplé à $\partial(X/K) = \emptyset$, on en déduit que $\partial(\text{sp}^{-1}(Z)/K) = \emptyset$ et donc, d'après le lemme précédent, Z est propre.

(iv) La première assertion résulte de la seconde. Quant à la seconde, la preuve a déjà été donnée au début de la preuve du point (vi).

(v) Tous les arguments ont déjà été donnés précédemment.

(vii) est laissé en exercice aux adeptes de la théorie des espaces adiques. \square

IV.9.4 Les sites quasi-étales, quasi-étales compacts et étales

On note $X_{\text{ét}}$ le site étale de X , $X_{\text{qét}}$ son site quasi-étale ([5]) et enfin $X_{\text{qétc}}$ le site quasi-étale compact qui est le "sous-site" de $X_{\text{qét}}$ formé des morphismes quasi-étales $U \rightarrow X$, avec U compact.

Le site $X_{\text{ét}}$ est à $X_{\text{qét}}$, resp. $X_{\text{qétc}}$, ce qu'est le site des ouverts de X à la G-topologie des domaines analytiques de X , resp. domaines analytiques compacts.

Il y a un morphisme de sites $X_{\text{qét}} \rightarrow X_{\text{ét}}$ qui induit un morphisme de topos ([5] section 3)

$$(\mu^*, \mu_*) : \tilde{X}_{\text{qét}} \rightarrow \tilde{X}_{\text{ét}}$$

Concrètement, si \mathcal{F} est un faisceau sur $X_{\text{ét}}$ et $f : W \rightarrow X$ est quasi-étale, on a $\Gamma(W, \mu^* \mathcal{F}) = \Gamma(W, f^* \mathcal{F})$, où $f^* : \tilde{X}_{\text{ét}} \rightarrow \tilde{W}_{\text{ét}}$. Si $\mathcal{G} \in \tilde{X}_{\text{qét}}$ et $f : U \rightarrow X$ est étale, on a tout simplement $\Gamma(U, \mu_* \mathcal{G}) = \Gamma(U, \mathcal{G})$. Le foncteur μ^* est pleinement fidèle et permet de voir $\tilde{X}_{\text{ét}}$ comme un "sous-topos" de $\tilde{X}_{\text{qét}}$.

Il y a également un morphisme de sites $X_{\text{qét}} \rightarrow X_{\text{qétc}}$, qui induit une équivalence de topos

$$\tilde{X}_{\text{qét}} \xrightarrow{\sim} \tilde{X}_{\text{qétc}}$$

puisque dans un espace analytique tout point possède un voisinage formé d'un domaine analytique compact. Plus précisément, si \mathcal{F} est un faisceau sur $X_{\text{qétc}}$, alors on lui associe le faisceau \mathcal{G} sur $X_{\text{qét}}$ tel que pour $W \rightarrow X$ quasi-étale

$$\Gamma(W, \mathcal{G}) = \varprojlim_{C \subset W} \Gamma(C, \mathcal{F})$$

où C parcourt les domaines analytiques compacts dans W . L'autre sens de la correspondance est évident puisque " $X_{\text{qétc}} \subset X_{\text{qét}}$ ".

On en déduit un morphisme de topos

$$(\nu^*, \nu_*) : \widetilde{X}_{\text{qétc}} \longrightarrow \widetilde{X}_{\text{ét}}$$

Remarque IV.9.14. Si X est paracompact et X^{rig} est l'espace rigide associé à X ([4] section 1.6), alors $\widetilde{X}_{\text{qét}}$ s'identifie au topos rig-étale de X^{rig} . Le foncteur μ^* est pleinement fidèle d'image essentielle des faisceaux rig-étale surconvergens. De même, si X^{ad} désigne l'espace adique sur $\text{Spa}(\mathcal{O}_K, K)$ associé à X ([19] section 8.3), alors $\widetilde{X}_{\text{qét}}$ s'identifie au topos étale de X^{ad} et $\widetilde{X}_{\text{ét}}$ au topos étale partiellement propre de X^{ad} . Dans le cadre des espaces adiques, le morphisme de topos (μ^*, μ_*) est alors celui noté θ_X dans le chapitre 8 de [19].

IV.9.5 Faisceaux équivariants lisses

On applique maintenant le formalisme de la section IV.8. Soit G un groupe topologique possédant un sous-groupe ouvert profini et agissant continûment sur X , au sens de la section 6 de [5]. D'après le théorème 7.1 de [5], le site $X_{\text{qétc}}$ satisfait aux hypothèses de la section IV.8. On note $\widetilde{X}_{\text{qétc}}/G$ le topos des faisceaux G -équivariants lisses sur $X_{\text{qétc}}$.

Définition IV.9.15 (Berkovich). On note $\widetilde{X}_{\text{ét}}/G$ la catégorie des G -faisceaux sur $\widetilde{X}_{\text{ét}}$ tels que $\nu^* \mathcal{F}$ soit lisse. On les appelle les G -faisceaux étales lisses. On note $\widetilde{X}_{\text{ét}}/G^{\text{disc}}$ la catégorie analogue pour le groupe G , vu comme groupe discret, c'est-à-dire la catégorie de tous les G -faisceaux sur $X_{\text{ét}}$.

En d'autres termes, un G -faisceau étale \mathcal{F} est lisse ssi $\forall f : W \rightarrow X$ quasi-étale avec W compact et K un sous-groupe compact ouvert de G dont l'action se relève à W , le K -ensemble $\Gamma(W, f^* \mathcal{F})$ est lisse.

Remarquons maintenant que si $U \rightarrow X$ est étale et $V \subset U$ est un ouvert distingué, alors en restriction à un sous-groupe ouvert de G , l'action sur X se relève à V . On vérifie, de plus, que le germe sur des sous-groupes ouverts suffisamment petits d'un tel relèvement ne dépend pas du choix de domaines analytiques compacts W_1 et W_2 dans U tels que $V = W_1 \setminus W_2$. Ainsi, si \mathcal{F} est un faisceau étale G -équivariant sur X et $s \in \mathcal{F}(U)$, on peut parler de lissité de la section $s|_V$.

Lemme IV.9.16. *Soit \mathcal{F} un faisceau étale G -équivariant sur X . Il est lisse ssi pour tout ouvert étale $U \rightarrow X$ et toute section dans $\mathcal{F}(U)$, tout point de U possède un voisinage distingué en restriction auquel cette section est lisse.*

Démonstration. Un sens est clair: si $\nu^*\mathcal{F}$ est lisse, alors \mathcal{F} vérifie la seconde propriété de l'énoncé.

Réciproquement, soit \mathcal{F} vérifiant la seconde propriété de l'énoncé. Soit $f : W \rightarrow X$ quasi-étale compact. Pour vérifier que $f^*\mathcal{F}(W)$ est lisse il suffit de le faire sur un recouvrement fini de W par des domaines affinoïdes pour la G -topologie. On peut donc supposer, par définition des morphismes quasi-étales, que

$$\begin{array}{ccc} W & \hookrightarrow & U \\ f \downarrow & \swarrow & \\ X & & \end{array}$$

où $U \rightarrow X$ est étale et W un domaine compact dans U . Alors $\Gamma(W, f^*\mathcal{F}) = \varinjlim_V \mathcal{F}(V)$, où V parcourt les voisinages ouverts de W dans U . Puisque tout point de W possède un voisinage qui est un ouvert distingué dans U , on conclut aisément, par compacité de W , que $\Gamma(W, f^*\mathcal{F})$ est lisse. \square

Lemme IV.9.17. *Le foncteur ν_* envoie les faisceaux lisses sur des faisceaux lisses.*

Démonstration. Appliquons le lemme précédent. Soit $\mathcal{F} \in \widetilde{X}_{\text{qétc}}/G$ et $U \rightarrow X$ étale. Notons encore \mathcal{F} pour le faisceau associé sur $X_{\text{qét}}$. Si $s \in \mathcal{F}(U)$ et $x \in U$, soit V un voisinage distingué de x contenu dans le domaine analytique compact W . Alors $s|_V = (s|_W)|_V$ et, $s|_W$ étant lisse, on en déduit que $s|_V$ l'est. \square

Lemme IV.9.18. *La catégorie $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$ est abélienne et possède suffisamment d'injectifs. Elle s'identifie à l'image essentielle par ν_* de $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{qétc}}/G$.*

Démonstration. Le fait que la catégorie soit abélienne résulte de l'exactitude de ν^* et de ce que $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{qétc}}/G$ est abélienne (corollaire IV.8.6). L'assertion concernant l'image essentielle résulte de ce que l'adjonction $Id \rightarrow \nu_*\nu^*$ est un isomorphisme ([5] corollaire 3.5). L'assertion concernant les injectifs résulte de ce que $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{qétc}}/G$ possède suffisamment d'injectifs (lemme IV.8.7). Si $\mathcal{F} \in \Lambda - \widetilde{X}_{\text{qétc}}/G$ et $u : \nu^*\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ est un plongement de $\nu^*\mathcal{F}$ dans un injectif, alors $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \nu_*\nu^*\mathcal{F} \rightarrow \nu_*\mathcal{I}$ est un monomorphisme vers un objet injectif. \square

Proposition IV.9.19. *La catégorie $\widetilde{X}_{\text{ét}}/G$ est un topos.*

Démonstration. L'assertion concernant l'existence de limites projectives finies, de limites inductives quelconques et de "bons" quotients par des relations d'équivalence résulte du cas de $\widetilde{X}_{\text{qétc}}/G$, puisque ν^* commute à ces opérations. Reste à exhiber un petit système de générateurs. Pour cela, remarquons que les ouverts étales distingués engendrent la topologie de $X_{\text{ét}}$. Maintenant, si $f : U \rightarrow X$ est un

morphisme étale distingué, c'est-à-dire il existe une factorisation $U \hookrightarrow W \longrightarrow X$ avec $W \longrightarrow X$ quasi-étale, W compact et $W \setminus U$ un domaine analytique compact, alors, pour un sous-groupe compact-ouvert K suffisamment petit dans G , l'action de K se prolonge à U . Si h_U désigne le faisceau représenté par U sur $X_{\text{ét}}$ on peut alors former comme dans la section IV.8.3.4 le faisceau induit

$$\text{c-ind}_{U/K}^{X/G} h_U = \bigoplus_{g \in \Omega} g^* f_! h_U \in \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$$

où $f_!$ désigne les images à support propre, au sens de [4], et Ω un ensemble de représentants des éléments de $K \backslash G$ dans G (cf. section IV.9.9.2, où cela est fait en détail). Il y a alors une formule de réciprocity de Frobenius, pour $\mathcal{F} \in \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$,

$$\text{Hom}_G(\text{c-ind}_{U/K}^{X/G} h_U, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(U)^K$$

D'après le lemme IV.9.16, ces faisceaux lisses forment alors un système de générateurs. \square

Il y a également un foncteur de lissification adjoint à droite à l'inclusion de $\widetilde{X}_{\text{ét}}/G$ dans la catégorie de tous les G -faisceaux sur $X_{\text{ét}}$. Il est défini, à partir du foncteur de lissification sur $\widetilde{X}_{\text{qétc}}/G^{\text{disc}}$ (cf. section IV.8.3.3), par

$$\mathcal{F}^\infty = \nu_*((\nu^* \mathcal{F})^\infty)$$

En termes d'ouverts distingués, si $U \longrightarrow X$ est étale, $\mathcal{F}^\infty(U)$ consiste en les sections $s \in \mathcal{F}(U)$ telles que tout point de U possède un voisinage distingué V tel que $s|_V$ soit lisse.

Remarque IV.9.20. Les limites projectives quelconques, non-finies, dans $\widetilde{X}_{\text{ét}}/G$ se calculent de la façon suivante: si $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est un système projectif de G -faisceaux étales lisses, alors sa limite projective est $(\varprojlim_{i \in I} \mathcal{F}_i)^\infty$, où la limite projective dans

l'expression précédente est prise dans la catégorie des faisceaux sur le site étale.

Au final, il y a un diagramme de topos

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_{\text{qétc}}/G^{\text{disc}} & \xrightarrow{\nu} & \widetilde{X}_{\text{ét}}/G^{\text{disc}} \\ \downarrow (-)^\infty & & \downarrow (-)^\infty \\ \widetilde{X}_{\text{qétc}}/G & \xrightarrow{\nu_\infty} & \widetilde{X}_{\text{ét}}/G \end{array}$$

où $\widetilde{X}_{\text{qétc}}/G^{\text{disc}}$ et $\widetilde{X}_{\text{ét}}/G^{\text{disc}}$ sont les topos équivariants sans condition de lissité, le morphisme de topos ν_∞ est donné par $\nu = (\nu^*, \nu_*)$ restreint à la catégorie des faisceaux lisses, et $(-)^^\infty$ est le morphisme de topos dont le foncteur image inverse est l'inclusion des faisceaux équivariants lisses dans les faisceaux équivariants et

le foncteur image directe est le foncteur de lissification. Tous les morphismes de topos dans ce diagramme sont des “projections”, les foncteurs image inverse sont pleinement fidèles et les foncteurs images directes essentiellement surjectifs.

Ce diagramme n’est pas “commutatif”, au sens où l’on a plutôt des relations du type $(-)^{\infty} = \nu_{\infty*} \circ (-)^{\infty} \circ \nu^*$.

IV.9.6 Résolutions molles de Godement-Berkovich

Soit $\mathcal{F} \in \widehat{X}_{\text{ét}}/G$. Considérons le morphisme G -équivariant d’espaces analytiques au-dessus de K

$$i : \prod_{x \in X} \mathcal{M}(\mathcal{K}(x)) \longrightarrow X$$

Si $\forall x \in X$, $\bar{x} : \mathcal{M}(\widehat{\mathcal{K}(x)}^{\text{alg}}) \longrightarrow X$ est un point géométrique au-dessus de x , alors $i^* \mathcal{F}$ correspond à la collection de $\Lambda[\text{Gal}(\mathcal{K}(x)^{\text{alg}}|\mathcal{K}(x))]$ -modules lisses $(\bar{x}^* \mathcal{F})_{x \in X}$.

Notons $i_x : \mathcal{M}(\mathcal{K}(x)) \longrightarrow X$. Choisissons pour tout $x \in X$ un plongement $i_x^* \mathcal{F} \hookrightarrow M_x$, où M_x est un faisceau flasque sur $\mathcal{M}(\mathcal{K}(x))_{\text{ét}}$. On prendra par exemple pour M_x le module Galoisien $\text{Ind}_{\{1\}}^{\text{Gal}(\mathcal{K}(x)^{\text{alg}}|\mathcal{K}(x))} \bar{x}^* \mathcal{F}$ (induite lisse). Notons \mathcal{M} le faisceau $(M_x)_{x \in X}$ sur $(\prod_{x \in X} \mathcal{M}(\mathcal{K}(x)))_{\text{ét}}$. Il y a un plongement $i^* \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{M}$, qui induit par réciprocity de Frobenius un plongement de G -faisceaux

$$i^* \mathcal{F} \hookrightarrow \text{Ind } \mathcal{M}$$

où $\text{Ind } \mathcal{M}$ est le G -faisceau induite “brutale” $\prod_{g \in G} g^* \mathcal{M} = (\prod_{g \in G} g^* M_{g \cdot x})_{x \in X}$ avec $g : \mathcal{M}(\mathcal{K}(x)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{K}(g \cdot x))$ (cf. section IV.8.3.2). Il y a alors un plongement G -équivariant

$$\mathcal{F} \hookrightarrow i_* i^* \mathcal{F} \hookrightarrow i_* \text{Ind } \mathcal{M} = \text{Ind } i_* \mathcal{M}$$

Notons alors

$$C^0(\mathcal{F}) = (i_* \text{Ind } \mathcal{M})^{\infty}$$

Par la propriété d’adjonction du foncteur de lissification, il y a un plongement équivariant $\mathcal{F} \hookrightarrow C^0(\mathcal{F})$. Cela permet de construire par récurrence une résolution dans $\Lambda - \widehat{X}_{\text{ét}}/G$, $\mathcal{F} \longrightarrow C^{\bullet}(\mathcal{F})$, en posant $C^{i+1}(\mathcal{F}) = C^0(\text{coker}(C^{i-1}(\mathcal{F}) \longrightarrow C^i(\mathcal{F})))$.

Lemme IV.9.21. *La résolution précédente est formée de faisceaux mous.*

Démonstration. On vérifie que

$$(i_* \text{Ind } \mathcal{M})^{\infty} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K}} \prod_{g \in \Omega_K} g^* \mathcal{M} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K}} \prod_{\substack{g \in \Omega_K \\ x \in X}} i_{x*}(g^* M_{g^{-1} \cdot x})$$

où la limite inductive est prise dans la catégorie des faisceaux (et non des préfaisceaux), K parcourt les sous-groupes compacts ouverts de G et Ω_K est un ensemble de représentants de G/K dans G . D’après le lemme IV.9.1, il suffit donc de montrer

que si I est un ensemble et pour tout x , M_x un faisceau flasque sur $\mathcal{M}(\mathcal{K}(x))_{\text{ét}}$, alors $(\prod_{x \in X} i_{x*} M_x)^I$ est mou.

Si $f : U \rightarrow X$ est étale avec $|U|$ paracompact et $\pi_U : \widetilde{X}_{\text{ét}} \rightarrow |U|^\sim$, alors

$$\pi_{U*} \left(\prod_{x \in X} i_{x*} M_x \right)^I = \left(\prod_{y \in U} \kappa_{y*} \Gamma(\mathcal{M}(\mathcal{K}(y)), M_{f(y)}) \right)^I$$

où $\kappa_y : \{y\} \hookrightarrow |U|$. Ce faisceau est mou.

Soit maintenant $y \in X$ et $L|\mathcal{K}(y)$ une extension séparable finie. Notons $i_{y,L} : \mathcal{M}(L) \rightarrow X$. Soit $\mathcal{G} = (\prod_{x \in X} i_{x*} M_x)^I$. On veut montrer que $i_{y,L}^* \mathcal{G}$ est acyclique. La difficulté vient de ce que la cohomologie d'un produit de faisceau n'est pas en général le produit des cohomologies. C'est cependant le cas pour la cohomologie de Čech. Soit $L'|L$ un extension galoisienne de degré fini. Notons \mathcal{C} la catégorie cofiltrante des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} & & U' \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{M}(L') & & U \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{M}(L) & \xrightarrow{i_{y,L}} & X \end{array}$$

avec $U \rightarrow X$ étale et $U'|U$ étale fini galoisien de groupe $\text{Gal}(L'|L)$. Alors, pour tout faisceau \mathcal{G} sur $X_{\text{ét}}$ et $q \geq 0$, on a

$$\check{H}^q(L'|L, i_{y,L}^* \mathcal{G}) = \lim_{\mathcal{C}} \check{H}^q(U'|U, \mathcal{G})$$

Or, pour un élément de \mathcal{C} ,

$$\check{H}^q(U'|U, (\prod_{x \in X} i_{x*} M_x)^I) = \prod_{x \in X} \check{H}^q(U'|U, i_{x*} M_x)^I$$

Or, pour $x \in X$,

$$\check{H}^q(U'|U, i_{x*} M_x) = \check{H}^q((U' \times_X \mathcal{M}(\mathcal{K}(x)))|(U \times_X \mathcal{M}(\mathcal{K}(x))), M_x)$$

mais, $U' \times_X \mathcal{M}(\mathcal{K}(x))|U \times_X \mathcal{M}(\mathcal{K}(x))$ est soit vide soit galoisien. Le faisceau M_x étant flasque, il est acyclique pour tous les ouverts de $\mathcal{M}(\mathcal{K}(x))_{\text{ét}}$ et donc ce groupe de cohomologie de Čech est nul. \square

Puisque tout faisceau facteur direct d'un faisceau mou est mou on obtient le corollaire suivant.

Corollaire IV.9.22. *Pour tout objet injectif de $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$, le faisceau sous-jacent est mou.*

Remarque IV.9.23. On aurait également pu obtenir le corollaire précédent en remarquant que pour \mathcal{F} injectif l'induite lisse $(\text{Ind } \mathcal{F})^\infty = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K}} \prod_{g \in \Omega_K} g^* \mathcal{F}$ est molle comme limite inductive de faisceaux injectifs, donc mous.

IV.9.7 Le complexe de cohomologie à support compact équivariant lisse

Lemme IV.9.24. Soit $\mathcal{F} \in \Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$. Alors, $\Gamma_c(X, \mathcal{F})$ est un G -module lisse.

Démonstration. Soit $s \in \Gamma_c(X, \mathcal{F})$. Tout point de $\text{supp}(s)$ possède un voisinage distingué en restriction auquel s est lisse. Par compacité de $\text{supp}(s)$, on conclut. \square

Définition IV.9.25. Notons $\Lambda[G] - \text{Mod}_{\infty}$ la catégorie des G -modules lisses à coefficients dans Λ et $\mathbb{D}^+(\Lambda[G]_{\infty})$ la catégorie dérivée associée. On note

$$\begin{aligned} \Gamma_c(X/G, -) : \Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G &\longrightarrow \Lambda[G] - \text{Mod}_{\infty} \\ \mathcal{F} &\longmapsto \Gamma_c(X, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

et $R\Gamma_c(X/G, -) : \mathbb{D}^+(\widetilde{X}_{\text{ét}}/G, \Lambda) \longrightarrow \mathbb{D}^+(\Lambda[G]_{\infty})$ son foncteur dérivé.

Théorème IV.9.26. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^+(\widetilde{X}_{\text{ét}}/G, \Lambda) & \xrightarrow{R\Gamma_c(X/G, -)} & \mathbb{D}^+(\Lambda[G]_{\infty}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}^+(\widetilde{X}_{\text{ét}}, \Lambda) & \xrightarrow{R\Gamma_c(X, -)} & \mathbb{D}^+(\Lambda) \end{array}$$

où les flèches verticales sont celles d'oubli de l'action de G .

Démonstration. Considérons le foncteur composé

$$\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G \longrightarrow \Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}} \xrightarrow{\Gamma_c(X, -)} \Lambda - \text{Mod}$$

Le premier foncteur est exact. D'après la section précédente, en particulier le lemme IV.9.21, tout objet de $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$ possède une résolution formée d'objets acycliques pour le second foncteur. Le théorème découle donc de la formule de composition des foncteurs dérivés. \square

IV.9.8 Le complexe de cohomologie équivariant lisse à support dans un domaine analytique compact

Soit $W \subset X$ un domaine analytique compact dans X et K un sous-groupe compact ouvert de G stabilisant W .

Proposition IV.9.27. Soit $\mathcal{F} \in \Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/K$ un objet injectif. Le faisceau sous-jacent est alors $\Gamma_W(X, -)$ -acyclique.

Démonstration. Soit U un ouvert distingué de X contenant W . Quitte à remplacer U par un nombre fini de ses itérés sous K , on peut le supposer K -invariant. Il y a un isomorphisme

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ V}} \Gamma(V, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(W, \mathcal{F})$$

où V parcourt les ouverts distingués dans X contenant W et contenus dans U (utiliser que les ouverts distingués forment une base de voisinages de tout point et sont stables par union finie). Quitte à remplacer un tel V par une intersection finie de ses itérés sous K , on peut de plus supposer, dans la limite précédente, que les V sont stables sous K . Notons \mathcal{V} l'ensemble des V satisfaisant aux conditions précédentes. Alors

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \begin{array}{l} V \in \mathcal{V} \\ K' \subset K \end{array}}} \Gamma(V, \mathcal{F})^{K'} \xrightarrow{\sim} \Gamma(W, \mathcal{F})$$

est une bijection. Maintenant, pour un tel $K' \subset K$ compact ouvert et $V \in \mathcal{V}$, il y a un monomorphisme dans $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/K$ (cf. section IV.9.9.2 qui suit)

$$c - \text{ind}_{V/K'}^{X/K} \underline{\Delta} \hookrightarrow c - \text{ind}_{U/K'}^{X/K} \underline{\Delta}$$

et, par application de $\text{Hom}(-, \mathcal{F})$, on trouve que l'application $\mathcal{F}(V)^{K'} \rightarrow \mathcal{F}(U)^{K'}$ est surjective. Donc l'application $\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F})$ est surjective. Utilisant la suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H_W^q(U, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(U, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(W, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

on conclut, car si $q > 0$, \mathcal{F} étant mou et U paracompact, $H^q(U, \mathcal{F}) = 0$ et de plus $H^q(W, \mathcal{F}) = 0$. \square

Le foncteur $\Gamma_W(X, -)$ envoie les K -faisceaux lisses sur des ensembles lisses. Il définit donc un foncteur

$$\Gamma_W(X/K, -) : \Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/K \rightarrow \Lambda[K] - \text{Mod}_{\infty}$$

et d'après la proposition précédente on obtient:

Théorème IV.9.28. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^+(\widetilde{X}_{\text{ét}}/K, \Lambda) & \xrightarrow{R\Gamma_W(X/K, -)} & \mathbb{D}^+(\Lambda[K]_{\infty}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}^+(\widetilde{X}_{\text{ét}}, \Lambda) & \xrightarrow{R\Gamma_W(X, -)} & \mathbb{D}^+(\Lambda) \end{array}$$

IV.9.9 Les opérations d'induction/restriction pour les faisceaux équivariants lisses

IV.9.9.1 Induction/restriction de l'action à un sous-groupe ouvert. Soit K un sous-groupe compact ouvert de G . Il y a alors un triplet de foncteurs adjoints

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{c\text{-ind}_{X/K}^{X/G}} & \\ \widetilde{X}_{\text{ét}}/K & \xleftrightarrow{\text{Res}_{X/K}^{X/G}} & \widetilde{X}_{\text{ét}}/G \\ & \xleftarrow{\text{Ind}_{X/K}^{X/G}} & \end{array}$$

où

- $\text{Res}_{X/K}^{X/G}$ est la restriction de l'action de G à K (l'identité au niveau des faisceaux)
- $c\text{-ind}_{X/K}^{X/G} \mathcal{F} = \bigoplus_{g \in \Omega} g^* \mathcal{F}$ l'induite à support compact, où Ω désigne un ensemble de représentants des éléments de $K \backslash G$ dans G et l'action de G est l'action usuelle par permutations
- $\text{Ind}_{X/K}^{X/G} \mathcal{F} = \left(\prod_{g \in \Omega} g^* \mathcal{F} \right)^\infty$ l'induite lisse, le lissifié de l'induite brutale.

En particulier, on retiendra que $\text{Res}_{X/K}^{X/G}$ et $\text{Ind}_{X/K}^{X/G}$ envoient injectifs sur injectifs. La remarque qui suit sera importante dans la suite.

Remarque IV.9.29. Soit $\mathcal{F} \in \widetilde{X}_{\text{ét}}/K$. Supposons que pour tout compact C de X , $\{g \in G/K \mid g.\text{supp}(\mathcal{F}) \cap \text{supp}(\mathcal{F}) \neq \emptyset\}$ soit fini. Alors $c\text{-ind}_{X/K}^{X/G} \mathcal{F} = \text{Ind}_{X/K}^{X/G} \mathcal{F}$.

IV.9.9.2 Induction compacte/restriction relativement à un ouvert étale distingué. Soit $f : U \rightarrow X$ un ouvert étale distingué. Cela signifie qu'il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & W \\ f \downarrow & \searrow g & \\ X & & \end{array}$$

où U est un ouvert distingué dans W , W compact et g quasi-étale. Soit K un sous-groupe ouvert dans G tel que l'action de K sur X se relève à U (il existe toujours un tel K , de plus deux relèvements coïncident sur un sous-groupe ouvert). Il y a alors un foncteur naturel $f_! : \widetilde{U}_{\text{ét}}/K^{\text{disc}} \rightarrow \widetilde{X}_{\text{ét}}/K^{\text{disc}}$, car si \mathcal{F} est K -équivariant sur U , l'image directe à support propre $f_! \mathcal{F}$ est naturellement un faisceau K -équivariant.

Lemme IV.9.30. Le foncteur $f_!$ envoie $\widetilde{U}_{\text{ét}}/K$ sur $\widetilde{X}_{\text{ét}}/K$, i.e., conserve la lissité.

Démonstration. Soit $\varphi : W \rightarrow X$ quasi-étale compact. Notons

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & W \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

le produit cartésien. Alors, puisque W est compact

$$\Gamma(W, \varphi^* f_! \mathcal{F}) = \Gamma(W, h_! \psi^* \mathcal{F}) = \Gamma_c(V, \psi^* \mathcal{F})$$

Le morphisme ψ est quasi-étale et toute section dans $\Gamma_c(V, \psi^* \mathcal{F})$ provient, par restriction, d'une section de $\psi^* \mathcal{F}$ sur un domaine compact dans V . \square

Cela définit donc un foncteur $f_{\infty!} : \widetilde{U}_{\text{ét}}/K \rightarrow \widetilde{X}_{\text{ét}}/K$. Étant donné que $f_!$ envoie les faisceaux mous sur des faisceaux mous on a

$$R\Gamma_c(X/K, -) \circ Rf_{\infty!} = R\Gamma_c(U/K, -)$$

Le foncteur f^* conserve clairement les faisceaux lisses, notons f_{∞}^* le foncteur équivariant associé. Il y a alors un couple de foncteurs adjoints

$$\widetilde{U}_{\text{ét}}/K \begin{array}{c} \xrightarrow{f_{\infty!}} \\ \xleftarrow{f_{\infty}^*} \end{array} \widetilde{X}_{\text{ét}}/K$$

Cela définit un couple de foncteurs adjoints

$$\widetilde{U}_{\text{ét}}/K \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{c-ind}_{U/K}^{X/G}} \\ \xleftarrow{\text{Res}_{U/K}^{X/G}} \end{array} \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$$

où

$$\text{Res}_{U/K}^{X/G} = f_{\infty}^* \circ \text{Res}_{X/K}^{X/G} \quad \text{et} \quad \text{c-ind}_{U/K}^{X/G} = \text{c-ind}_{X/K}^{X/G} \circ f_{\infty!}$$

Il y a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^+(\widetilde{U}_{\text{ét}}/K, \Lambda) & \xrightarrow{\text{c-ind}_{U/K}^{X/G}} & \mathbb{D}^+(\widetilde{X}_{\text{ét}}/G, \Lambda) \\ R\Gamma_c(U/K, -) \downarrow & & \downarrow R\Gamma_c(X/G, -) \\ \mathbb{D}^+(\Lambda[K]_{\infty}) & \xrightarrow{\text{c-ind}_K^G} & \mathbb{D}^+(\Lambda[G]_{\infty}) \end{array}$$

Si $\mathcal{F} \in \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$, alors

$$\text{c-ind}_{U/K}^{G/X} \text{Res}_{U/K}^{G/X} \mathcal{F} = \bigoplus_{\alpha \in K \backslash G} f_{\alpha!} \mathcal{F}|_{U_{\alpha}}$$

où, si $\alpha = \bar{g}$, $U_{\alpha} = g^{-1}(U) \xrightarrow{f_{\alpha}} X$.

IV.9.9.3 Induction lisse/restriction à partir d'un ouvert distingué. Soit $f : U \longrightarrow X$ un ouvert étale distingué. Soit K un sous-groupe compact ouvert muni d'un relèvement de son action à U . Le foncteur f_* induit naturellement un foncteur $f_* : \widetilde{U}_{\text{ét}}/K^{\text{disc}} \longrightarrow \widetilde{X}_{\text{ét}}/K^{\text{disc}}$. Néanmoins il n'y a aucune raison pour qu'en général f_* transforme des faisceaux lisses en des faisceaux lisses (même si f est l'inclusion d'un ouvert distingué de X).

Notons $f_{\infty*} = (-)^{\infty} \circ f_*$ et $f_{\infty}^* = f^*$, qui induisent un couple de foncteurs adjoints

$$\widetilde{U}_{\text{ét}}/K \begin{array}{c} \xrightarrow{f_{\infty*}} \\ \xleftarrow{f_{\infty}^*} \end{array} \widetilde{X}_{\text{ét}}/K$$

Composant ce couple de foncteurs adjoints avec les induites lisses/restriction on obtient un couple adjoint

$$\widetilde{U}_{\text{ét}}/K \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Ind}_{U/K}^{X/G}} \\ \xleftarrow{\text{Res}_{U/K}^{X/G}} \end{array} \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$$

où

$$\text{Res}_{U/K}^{X/G} = f_{\infty}^* \circ \text{Res}_{X/K}^{X/G}$$

n'est rien d'autre au niveau des faisceaux que f^* , et

$$\text{Ind}_{U/K}^{X/G} = \text{Ind}_{X/K}^{X/G} \circ f_{\infty*} = (-)^{\infty} \circ \text{Ind}_{X/K^{\text{disc}}}^{X/G^{\text{disc}}} \circ f_{\text{disc}*}$$

Supposons maintenant que pour tout compact C dans X , l'ensemble $\{g \in G/K \mid g.U \cap C \neq \emptyset\}$ soit fini. Le produit infini définissant $\text{Ind}_{X/K^{\text{disc}}}^{X/G^{\text{disc}}}$ est alors une somme directe et donc

$$\text{Ind}_{U/K}^{X/G} = \text{c} - \text{ind}_{X/K}^{X/G} \circ f_{\infty*}$$

De plus, $U \longrightarrow X$ étant distingué, l'image dans X de U est relativement compacte. Cela implique que $\Gamma_c(X/K, -) \circ (-)^{\infty} \circ f_* = (-)^{\infty} \circ \Gamma(U, -)$, comme foncteurs de $\widetilde{U}_{\text{ét}}/K$ vers les K -ensembles lisses. En effet, si $\mathcal{F} \in \widetilde{U}_{\text{ét}}/K$, alors $\Gamma_c(X, (f_*\mathcal{F})^{\infty})$ est un K -module lisse, d'après le lemme IV.9.24. C'est un sous-module de $\Gamma_c(X, f_*\mathcal{F}) = \Gamma(U, \mathcal{F})$, donc de $\Gamma(U, \mathcal{F})^{\infty}$. Réciproquement, toute section de $\Gamma(U, \mathcal{F})^{\infty}$ est clairement une section de $\Gamma(X, (f_*\mathcal{F})^{\infty})$. De cela on déduit

$$\Gamma_c(X/G, -) \circ \text{Ind}_{U/K}^{X/G} = \text{c} - \text{Ind}_K^G \circ \Gamma(U, -)^{\infty}$$

Par la propriété d'adjonction précédente, $\text{Ind}_{U/K}^{X/G}$ transforme injectifs en injectifs.

Il y a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^+(\widetilde{U}_{\text{ét}}/K, \Lambda) & \xrightarrow{\text{Ind}_{U/K}^{X/G}} & \mathbb{D}^+(\widetilde{X}_{\text{ét}}/G, \Lambda) \\ R(\Gamma(U/K, -)^\infty) \downarrow & & \downarrow R\Gamma_c(X/G, -) \\ \mathbb{D}^+(\Lambda[K]_\infty) & \xrightarrow{c\text{-ind}_K^G} & \mathbb{D}^+(\Lambda[G]_\infty) \end{array}$$

(on prendra garde que le foncteur de lissification $(-)^\infty$ n'est pas exact).

Au final, pour $f : U \rightarrow X$ distingué, on a un triplet de foncteurs adjoints

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{c\text{-ind}_{U/K}^{X/G}} & \\ \widetilde{U}_{\text{ét}}/K & \xleftarrow{\text{Res}_{U/K}^{X/G}} & \widetilde{X}_{\text{ét}}/G \\ & \xrightarrow{\text{Ind}_{U/K}^{X/G}} & \end{array}}$$

analogue du triplet $(f_!, f^*, f_*)$.

IV.9.9.4 Induction lisse/restriction à partir d'un ouvert quasi-étale compact.

Soit $f : W \rightarrow X$ un morphisme quasi-étale avec W compact et K un sous-groupe compact ouvert muni d'un relèvement de son action à W . On vérifie que les foncteurs f_* et f^* conservent la lissité. Cela permet de définir comme précédemment un couple de foncteurs adjoints

$$\widetilde{W}_{\text{ét}}/K \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Ind}_{U/K}^{X/G}} \\ \xleftarrow{\text{Res}_{U/K}^{X/G}} \end{array} \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$$

où, au niveau des faisceaux, la restriction n'est rien d'autre que f^* et $\text{Ind}_{W/K}^{X/G} \mathcal{F} = (\prod_{g \in \Omega} g^* f_* \mathcal{F})^\infty$, avec Ω un ensemble de représentants dans G de $K \backslash G$. Lorsque tout compact de X ne rencontre qu'un nombre fini de $g \cdot \text{Im}(f)$, $g \in G/K$, le produit précédent est une somme directe et est déjà lisse

$$\text{Ind}_{W/K}^{X/G} \mathcal{F} = \bigoplus_{g \in \Omega} g^* f_* \mathcal{F}$$

Le foncteur $\text{Ind}_{W/K}^{X/G}$ envoyant injectifs, sur injectifs il y a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^+(\widetilde{W}_{\text{ét}}/K, \Lambda) & \xrightarrow{\text{Ind}_{U/K}^{X/G}} & \mathbb{D}^+(\widetilde{X}_{\text{ét}}/G, \Lambda) \\ R\Gamma(W/K, -) \downarrow & & \downarrow R\Gamma_c(X/G, -) \\ \mathbb{D}^+(\Lambda[K]_\infty) & \xrightarrow{c\text{-ind}_K^G} & \mathbb{D}^+(\Lambda[G]_\infty) \end{array}$$

On remarquera que si f est l'inclusion d'un domaine analytique compact et $\mathcal{F} \in \Lambda - \widetilde{W}_{\text{ét}}/K$ est mou, alors $\text{Ind}_{W/K}^{X/G} \mathcal{F}$ l'est encore.

IV.9.9.5 Induction compacte/restriction à support pour un domaine analytique compact. Soit $i : W \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un domaine analytique compact et K un sous-groupe compact ouvert stabilisant W . Le foncteur $i^!$ est un sous-foncteur de i^* et conserve donc la mollesse. Il y a alors un couple de foncteurs adjoints

$$\widetilde{W}_{\text{ét}}/K \begin{array}{c} \xrightarrow{c\text{-ind}_{W/K}^{X/G}} \\ \xleftarrow{\text{Res}_{U/K}^{!X/G}} \end{array} \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$$

où, au niveau des faisceaux, $\text{Res}_{W/K}^{!X/G} \mathcal{F} = i^! \mathcal{F}$ et $c\text{-ind}_{W/K}^{X/G} \mathcal{F} = \bigoplus_{g \in \Omega} g^* i_* \mathcal{F}$. Le foncteur $\text{Res}_{W/K}^{!X/G}$ envoie les injectifs de $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$ sur des injectifs de $\Lambda - \widetilde{W}_{\text{ét}}/K$. Supposons, de plus, que pour tout compact C de $|X|$, $\{g \in G/K \mid g.W \cap C \neq \emptyset\}$ soit fini. Alors, $c\text{-ind}_{W/K}^{X/G} = \text{Ind}_{W/K}^{X/G}$.

Dans ce cas-là on a donc un triplet de foncteurs adjoints

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\text{Res}_{W/K}^{X/G}} & \\ \widetilde{W}_{\text{ét}}/K & \xrightarrow{\text{Ind}_{W/K}^{X/G}} & \widetilde{X}_{\text{ét}}/G \\ & \xleftarrow{\text{Res}_{W/K}^{!X/G}} & \end{array}}$$

analogue du triplet $(i^*, i_*, i^!)$.

IV.9.10 Les quatre résolutions/suites spectrales permettant de calculer la cohomologie à support compact équivariante lisse

Le théorème suivant fait suite au théorème IV.9.2. On utilise les résultats et notations de la section précédente.

Théorème IV.9.31. Soit \mathcal{F} un G -faisceau lisse de Λ -modules sur $X_{\text{ét}}$.

- Soit U un ouvert distingué de G tel que $G.U = X$ et K un sous-groupe compact ouvert stabilisant U . Il y a alors une résolution fonctorielle en \mathcal{F} dans $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$, $C^\bullet(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}$, où

$$C^p(\mathcal{F}) = \bigoplus_{\alpha \in G \backslash (G/K)^{-p+1}} c\text{-Ind}_{U_\alpha/K_\alpha}^{X/G} \text{Res}_{U_\alpha/K_\alpha}^{X/G} \mathcal{F}$$

où, si $\alpha = [(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{-p+1})]$, $K_\alpha = \bigcap_i g_i K g_i^{-1}$ et $U_\alpha = \bigcap_i g_i U$. Si le faisceau sous-jacent à \mathcal{F} est mou, il s'agit alors d'une résolution molle de \mathcal{F} . Si $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^*$ est une résolution molle de \mathcal{F} dans $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$, $d > \text{cd}_\Lambda(K) + 2 \dim X \neq +\infty$, il y a alors un isomorphisme dans $\mathbb{D}^+(\Lambda[G]_\infty)$

$$R\Gamma_c(X/G, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Tot} \bigoplus_{\alpha \in G \backslash (G/K)^{-\bullet+1}} c\text{-ind}_{K_\alpha}^G \Gamma_c(U_\alpha/K_\alpha, \tau_{\leq d} \mathcal{I}^*)$$

et une suite spectrale de G -modules lisses associée

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\alpha \in G \backslash (G/K)^{-p+1}} \mathfrak{c} - \text{ind}_{K_\alpha}^G H_c^q(U_\alpha, \mathcal{F}) \implies H_c^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

- Supposons, de plus, que G agisse de façon propre sur X , au sens où pour tout compact C de X , $\{g \in G \mid g.C \cap C \neq \emptyset\}$ est compact. Il y a alors une résolution fonctorielle en \mathcal{F} dans $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$, $\mathcal{F} \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{F})$, où

$$C^p(\mathcal{F}) = \bigoplus_{\alpha \in G \backslash (G/K)^{p+1}} \text{Ind}_{U_\alpha/K_\alpha}^{X/G} \text{Res}_{U_\alpha/K_\alpha}^{X/G} \mathcal{F}$$

Si \mathcal{F} est injectif dans $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$, alors cette résolution est formée d'objets injectifs dans $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$. Si $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^*$ est une résolution injective dans $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$, il y a alors un isomorphisme

$$R\Gamma_c((X/G)_\infty, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Tot} \bigoplus_{\alpha \in G \backslash (G/K)^{\bullet+1}} \mathfrak{c} - \text{ind}_{K_\alpha}^G \Gamma(U_\alpha/K_\alpha^{\text{disc}}, \mathcal{I}^*)^\infty$$

- Soit W un domaine analytique compact tel que $G.W = X$. Supposons de plus que G agisse de façon propre sur X . Il y a alors une résolution fonctorielle en \mathcal{F} dans $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$, $\mathcal{F} \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{F})$, où

$$C^p(\mathcal{F}) = \bigoplus_{\alpha \in G \backslash (G/K)^{p+1}} \text{Ind}_{W_\alpha/K_\alpha}^{X/G} \text{Res}_{W_\alpha/K_\alpha}^{X/G} \mathcal{F}$$

Si \mathcal{F} est mou il s'agit alors d'une résolution molle. Il y a alors pour $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^*$ une résolution dans $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$ formée de faisceaux mous, un isomorphisme

$$R\Gamma_c(X/G, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Tot} \bigoplus_{\alpha \in G \backslash (G/K)^{\bullet+1}} \mathfrak{c} - \text{ind}_{K_\alpha}^G \Gamma(W_\alpha/K_\alpha, \mathcal{I}^*)$$

et une suite spectrale de G -modules lisses

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\alpha \in G \backslash (G/K)^{p+1}} \mathfrak{c} - \text{ind}_{K_\alpha}^G H^q(W_\alpha, \mathcal{F}) \implies H_c^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

- Sous les hypothèses précédentes, il y a alors une résolution fonctorielle en \mathcal{F} dans $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$, $C^\bullet(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}$, où

$$C^p(\mathcal{F}) = \bigoplus_{\alpha \in G \backslash (G/K)^{-p+1}} \mathfrak{c} - \text{ind}_{W_\alpha/K_\alpha}^{X/G} \text{Res}_{W_\alpha/K_\alpha}^{!X/G} \mathcal{F}$$

Si \mathcal{F} est injectif, il s'agit alors d'une résolution injective. Si $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^*$ est une résolution injective dans $\Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$, $d > \text{cd}_\Lambda(K) + 2 \dim X \neq \infty$, alors

$$R\Gamma_c(X/G, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Tot} \bigoplus_{\alpha \in G \backslash (G/K)^{-\bullet+1}} \mathfrak{c} - \text{ind}_{K_\alpha}^G \Gamma_{W(\alpha)}(X/K_\alpha, \tau_{\leq d} \mathcal{I}^*)$$

et il y a une suite spectrale équivariante de G -modules lisses

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\alpha \in G \backslash (G/K)^{-p+1}} c - \text{ind}_{K_\alpha}^G H_{W_\alpha}^q(X, \mathcal{F}) \implies H_c^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

Démonstration. Prenons le cas de la première suite spectrale. Le couple de foncteurs adjoints

$$\Lambda - \widetilde{U}_{\text{ét}}/K \begin{array}{c} \xrightarrow{c - \text{ind}_{U/K}^{X/G}} \\ \xleftarrow{\text{Res}_{U/K}^{X/G}} \end{array} \Lambda - \widetilde{X}_{\text{ét}}/G$$

permet de construire le complexe $C^\bullet(\mathcal{F})$, en posant $C^p(\mathcal{F}) = (c - \text{ind}_{U/K}^{X/G} \circ \text{Res}_{U/K}^{X/G})^{\circ(-p+1)}$. On calcule aisément cette composition et trouve le résultat annoncé. Ce complexe est une résolution, car après application de $\text{Res}_{U/K}^{X/G}$, il est homotope à zéro, et l'hypothèse $G.U = X$ implique que c'est donc une résolution. Tout le reste s'ensuit.

Les autres cas se démontrent de la même façon en utilisant également les diverses propriétés d'acyclicité des résolutions et leur comportement vis-à-vis des diverses inductions/restrictions. La seule chose à vérifier est, pour la seconde résolution faisceautique, la formule annoncée pour la composition $p+1$ -fois du foncteur $\text{Ind}_{U/K}^{X/G} \circ \text{Res}_{U/K}^{X/G}$. Cela se ramène à vérifier que si $j_1 : U_1 \hookrightarrow X$, $j_2 : U_2 \hookrightarrow X$ sont les inclusions de deux ouverts distingués et si $k : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow X$, alors

$$(j_{2*} j_2^* (j_{1*} \mathcal{F})^\infty)^\infty = (k_* (\mathcal{F}|_{U_1 \cap U_2}))^\infty$$

ce qui se fait aisément en construisant deux applications inverses l'une de l'autre grâce aux diverses propriétés d'adjonction. \square

Le lecteur aura remarqué que dans le deuxième point on ne donne pas la suite spectrale associée. Cela vient de ce que le foncteur $(-)^\infty$ n'est pas exact.

IV.10 Cohomologie à support compact équivariante-lisse des espaces rigides généralisés

Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion. On supposera, outre \mathfrak{X} quasi-séparé, que \mathfrak{X} possède un recouvrement localement fini par des ouverts quasicompacts. Supposons-le muni d'une action continue d'un groupe topologique G . La condition de continuité signifie que pour tout ouvert quasicompact \mathfrak{U} de \mathfrak{X} , tout entier n et tout $f \in \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \otimes \mathcal{O}_K / \pi^n \mathcal{O}_K)$, il existe un sous-groupe ouvert de G stabilisant \mathfrak{U} et laissant la section f invariante: $\forall k \in K, k^* f = f$.

Remarque IV.10.1. Une définition naïve de la notion d'action continue consisterait à dire que pour tout \mathfrak{U} quasicompact et tout n , il existe un sous-groupe

compact ouvert K agissant trivialement sur $\mathfrak{U} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^n \mathcal{O}_K$, c'est-à-dire G agit continûment pour "la topologie forte", alors que la définition qu'on a donnée est au sens "faible". Cependant avec cette définition, le groupe topologique $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}|\mathbb{F}_p)$ n'agirait pas continûment sur $\text{Spec}(\overline{\mathbb{F}_p})$. Par exemple, si X est un espace rigide sur \mathbb{Q}_p , $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ n'agirait pas continûment sur $X \hat{\otimes} \mathbb{C}_p$. Plus généralement, si G est un groupe profini et $(\mathfrak{X}_K)_{K \subset G}$ est une "tour" de schémas formels π -adiques munie d'une action de G , G n'agirait pas continûment sur $\varprojlim_K \mathfrak{X}_K$ en général.

Commençons par vérifier que le site $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ satisfait aux différentes hypothèses de la section IV.8. Tout d'abord, d'après le corollaire IV.6.10, tout objet de ce site est quasicompact.

Proposition IV.10.2. *Le site $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ satisfait à l'hypothèse de continuité de la section IV.8.1.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ un morphisme de type (\mathcal{E}) . Ce morphisme se factorisant par un ouvert quasicompact, ouvert stabilisé par un sous-groupe ouvert de G , on peut supposer \mathfrak{X} quasicompact.

Supposons d'abord \mathfrak{X} affine. Écrivons $\mathfrak{X} = \varprojlim_{i \in I} \mathfrak{X}_i$, où les \mathfrak{X}_i sont admissibles affines et $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_i} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. D'après le théorème IV.5.8, il existe $i_0 \in I$ ainsi que $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{X}_{i_0}$ de type (\mathcal{E}) et un isomorphisme

$$\mathfrak{Y} \simeq \mathfrak{Y}' \times_{\mathfrak{X}_{i_0}} \mathfrak{X}$$

On applique le théorème de rigidité, la proposition IV.5.6. Soit N un entier associé à $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$, comme dans cette proposition. Par hypothèse, \mathfrak{X}_{i_0} étant topologiquement de type fini sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$, il existe un sous-groupe ouvert K dans G tel que $\forall k \in K$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^N \mathcal{O}_K & \xrightarrow{k} & \mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^N \mathcal{O}_K \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ \mathfrak{X}_{i_0} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^N \mathcal{O}_K & \xrightarrow{Id} & \mathfrak{X}_{i_0} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^N \mathcal{O}_K \end{array}$$

commute. Alors $k^{-1}(\mathfrak{Y}) = k^{-1}(q^{-1}(\mathfrak{Y}'))$ et donc $k^{-1}(\mathfrak{Y}) \otimes \mathcal{O}_K/\pi^N \mathcal{O}_K = q^{-1}(\mathfrak{Y}' \otimes \mathcal{O}_K/\pi^N \mathcal{O}_K) = \mathfrak{Y} \otimes \mathcal{O}_K/\pi^N \mathcal{O}_K$, comme \mathfrak{X} -schémas. D'après la proposition IV.5.6, on en déduit qu'il existe un prolongement $(\beta_k)_{k \in K}$ de l'action de K à \mathfrak{Y}

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Y} & \xrightarrow{\beta_k} & \mathfrak{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{k} & \mathfrak{X} \end{array}$$

Nous avons besoin de caractériser ce prolongement de manière unique afin de le rendre "canonique". Pour cela, soit $(\mathcal{V}'_\alpha)_\alpha$ un recouvrement affine fini de \mathfrak{Y}' et

$\forall \alpha, (f_{\alpha\beta})_\beta, f_{\alpha\beta} \in \Gamma(\mathcal{V}'_\alpha, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}'})$, un système fini de générateurs topologiques de la $\Gamma(\mathfrak{X}_{i_0}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{i_0}})$ -algèbre topologiquement de type fini $\Gamma(\mathcal{V}'_\alpha, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}'})$. Soit $(\mathcal{V}_\alpha)_\alpha = (\mathcal{V}'_\alpha)_\alpha \times_{\mathfrak{Y}'} \mathfrak{Y}$ et $\forall \alpha, \beta, f_{\alpha\beta} \otimes 1 \in \Gamma(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$, les sections obtenues par changement de base, sections qui engendrent topologiquement la $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ -algèbre $\Gamma(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$. Alors, d'après l'assertion d'injectivité dans la proposition IV.5.6, $(\beta_k)_{k \in K}$ est l'unique relèvement de l'action de K à \mathfrak{Y} tel que

$$\forall \alpha, \beta, \forall k \in K, \beta_k^*(f_{\alpha\beta} \otimes 1) \equiv f_{\alpha\beta} \otimes 1 \pmod{\pi^N}$$

Maintenant, soit $(\mathcal{W}_\gamma)_\gamma$ un autre recouvrement affine fini de \mathfrak{Y} et $\forall \gamma, (g_{\gamma\delta})_\delta, g_{\gamma\delta} \in \Gamma(\mathcal{W}_\gamma, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$, un système de générateurs topologiques de $\Gamma(\mathcal{W}_\gamma, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$, comme $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ -algèbre. On vérifie aisément qu'il existe un sous-groupe ouvert $K' \subset K$ tel que

$$\forall \gamma, \delta, \forall k \in K', \beta_k^* g_{\gamma\delta} \equiv g_{\gamma\delta} \pmod{\pi^N}$$

A partir de cette constatation, le cas \mathfrak{X} général se déduit du cas affine par recollement, en utilisant cette dernière assertion (et toujours quitte à se restreindre à des sous-groupes ouverts plus petits). Plus précisément, si l'entier N est associé à $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$, comme dans la proposition IV.5.6, soient $\mathfrak{X} = \bigcup_\alpha \mathfrak{U}_\alpha$, resp. $\mathfrak{Y} = \bigcup_{\alpha, \beta} \mathcal{V}_{\alpha\beta}$, deux recouvrements affines finis de \mathfrak{X} , resp. \mathfrak{Y} , tels que $\mathcal{V}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathfrak{U}_\alpha$. Soit $\forall \alpha, \beta, (f_{\alpha\beta\gamma})_\gamma, f_{\alpha\beta\gamma} \in \Gamma(\mathcal{V}_{\alpha\beta}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$, un système de générateurs topologiques de la $\Gamma(\mathfrak{U}_\alpha, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ -algèbre $\Gamma(\mathcal{V}_{\alpha\beta}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$. On montre alors qu'il existe un sous-groupe ouvert $K \subset G$ tel qu'il existe un unique relèvement $(\beta_k)_{k \in K}$ de l'action de K sur \mathfrak{X} à \mathfrak{Y} vérifiant

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \forall k \in K, \beta_k^* f_{\alpha\beta\gamma} \equiv f_{\alpha\beta\gamma} \pmod{\pi^N}$$

Le fait que cette action relevée est "canonique" au sens de la section IV.8.1 se déduit par une nouvelle application de l'assertion d'injectivité dans la proposition IV.5.6. \square

Proposition IV.10.3. *Le site $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ satisfait à l'hypothèse de la section IV.8.5.3. Étant donnée une famille finie $(\mathcal{V}_i \rightarrow \mathfrak{Y})_{i \in I}$ de morphismes dans la catégorie $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}}$ des morphismes de type (\mathcal{E}) au-dessus de \mathfrak{X} , si $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ et*

$$\mathfrak{Z} = (\mathcal{V}_{i_1} \times_{\mathfrak{Y}} \cdots \times_{\mathfrak{Y}} \mathcal{V}_{i_n})^{adh}$$

désigne le produit fibré de cette famille au-dessus de \mathfrak{Y} , il existe une famille finie $(\mathfrak{U}_\alpha \rightarrow \mathfrak{Z})_\alpha$ de morphismes au-dessus de \mathfrak{X} , où $\forall \alpha, \mathfrak{U}_\alpha \rightarrow \mathfrak{X}$ est de type (\mathcal{E}) et que $\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim}$, l'application

$$\text{Hom}_{\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}}(\widehat{h}_{\mathcal{V}_{i_1}^{\text{rig}}} \times_{h_{\mathfrak{Y}^{\text{rig}}}} \cdots \times_{h_{\mathfrak{Y}^{\text{rig}}}} h_{\mathcal{V}_{i_n}^{\text{rig}}}, \mathcal{F}) \longrightarrow \prod_{\alpha} \mathcal{F}(\mathfrak{U}_\alpha)$$

soit injective.

Démonstration. Le morphisme $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ se factorisant par un ouvert quasicompact, on peut supposer \mathfrak{X} quasicompact, ce que nous ferons.

Supposons le résultat démontré lorsque \mathfrak{X} est affine. Soit $\mathfrak{X} = \bigcup_k \mathcal{W}_k$ un recouvrement affine. Appliquant le résultat dans le cas affine, on en déduit l'existence de familles $\forall k, (\mathfrak{U}_\alpha \rightarrow \mathfrak{Z} \times_{\mathfrak{X}} \mathcal{W}_k)_{\alpha \in A_k}$, vérifiant les hypothèses voulues lorsqu'on tire la situation en arrière à l'ouvert \mathcal{W}_k . On vérifie qu'alors $(\mathfrak{U}_\alpha \rightarrow \mathfrak{Z})_{k, \alpha \in A_k}$ vérifie bien les conclusions de l'énoncé.

Soit donc maintenant \mathfrak{X} affine. Écrivons $\mathfrak{X} = \varinjlim_{j \in J} \mathfrak{X}_j$, où $\forall j, \mathfrak{X}_j$ est admissible affine. D'après le théorème IV.5.8, il existe $j_0 \in J$ ainsi qu'une famille $(\mathcal{V}'_i \rightarrow \mathfrak{Y}')_{i \in I}$ dans $\mathcal{E}_{\mathfrak{X}_{j_0}}$ induisant la famille $(\mathcal{V}_i \rightarrow \mathfrak{Y})_{i \in I}$ en niveau infini

$$[(\mathcal{V}'_i \rightarrow \mathfrak{Y}')_{i \in I} \times_{\mathfrak{X}_{j_0}} \mathfrak{X}]^{adh} \simeq (\mathcal{V}_i \rightarrow \mathfrak{Y})_{i \in I}$$

Le produit fibré $\mathfrak{Z}' = (\mathcal{V}'_{i_1} \times_{\mathfrak{Y}'} \cdots \times_{\mathfrak{Y}'} \mathcal{V}'_{i_p})^{adh}$ est un \mathfrak{X}_{j_0} -schéma formel rig-étale. D'après le théorème IV.5.5, il existe un \mathfrak{X}_{j_0} -morphisme $\mathcal{W} \rightarrow \mathfrak{Z}'$ tel que $\mathcal{W} \rightarrow \mathfrak{X}_{j_0}$ soit de type (\mathcal{E}) et $\mathcal{W}^{rig} \rightarrow \mathfrak{Z}'^{rig}$ soit un morphisme couvrant.

Alors $(\mathcal{W} \times_{\mathfrak{X}_{j_0}} \mathfrak{X})^{adh} \rightarrow \mathfrak{Z}$ satisfait aux hypothèses, puisque $\forall j \geq j_0$, le morphisme $(\mathcal{W} \times_{\mathfrak{X}_{j_0}} \mathfrak{X}_j)^{rig} \rightarrow (\mathfrak{Z}' \times_{\mathfrak{X}_{j_0}} \mathfrak{X}_j)^{rig}$ est couvrant et $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}-rig-ét} \simeq \varinjlim_{j \geq j_0} (\mathfrak{X}_j)_{rig-ét}$. \square

Définition IV.10.4. On note $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}-rig-ét}/G$ le topos des G -faisceaux lisses sur le site $\tilde{\mathfrak{X}}_{\mathcal{E}-rig-ét}$.

Soit maintenant le foncteur

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\mathfrak{X}^{rig}/G, -) : \Lambda - \mathfrak{X}_{\mathcal{E}-rig-ét}/G &\longrightarrow \Lambda[G] - \text{Mod}_\infty \\ \mathcal{F} &\longmapsto \Gamma_1(\mathfrak{X}^{rig}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

qui est bien à valeurs dans les $\Lambda[G]$ -modules lisses, puisque si $(\mathcal{W}_i)_{i \in I}$ est un recouvrement localement fini par des ouverts quasicompacts, alors

$$\Gamma_1(\mathfrak{X}^{rig}, \mathcal{F}) \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} \Gamma(\mathcal{W}_i, \mathcal{F})$$

Considérons le foncteur dérivé $R\Gamma_1(\mathfrak{X}^{rig}, -)$ à valeurs dans $\mathbb{D}^+(\Lambda[G]_\infty)$. On veut maintenant obtenir l'analogie du théorème IV.9.26.

Lemme IV.10.5. *Soit $\mathcal{F} \in \Lambda - \mathfrak{X}_{\mathcal{E}-rig-ét}/G$ un objet injectif. Il est alors acyclique pour le foncteur des cycles proches sp_* .*

Démonstration. Le faisceau $R^q sp_* \mathcal{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau qui à \mathfrak{U} , un ouvert quasicompact de \mathfrak{X} , associe $H^q(\mathfrak{U}_{\mathcal{E}-rig-ét}, \mathcal{F})$. C'est donc une conséquence du théorème IV.8.17. \square

Considérons maintenant le site des ouverts Zariski quasicompacts $|\mathfrak{X}|_{qc} = |\mathfrak{X}_{red}|_{qc}$. Il satisfait à toutes les hypothèses de la section IV.8.1, puisque tout

ouvert quasicompact de X est stabilisé par un sous-groupe ouvert. Le foncteur des cycles proches est compatible à l'action de G . On a ainsi un couple de foncteurs adjoints

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}/G \begin{matrix} \xrightarrow{sp_*} \\ \xleftarrow{sp^*} \end{matrix} \widehat{|\mathfrak{X}|}_{qc}/G$$

Proposition IV.10.6. *Tout objet injectif de $\Lambda - \widehat{|\mathfrak{X}|}_{qc}/G$ est $\Gamma_1(\mathfrak{X}_{red}, -)$ -acyclique.*

Démonstration. Il suffit de montrer que tout $\mathcal{F} \in \Lambda - \widehat{|\mathfrak{X}|}_{qc}/G$ se plonge dans un objet $\Gamma_1(|\mathfrak{X}|, -)$ -acyclique. Soit $X = \mathfrak{X}_{red}$ et pour $x \in X$, $i_x : \{x\} \hookrightarrow |X|$. Il y a alors un plongement dans $\Lambda - \widehat{|\mathfrak{X}|}_{qc}/G$

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \left(\text{Ind} \left(\prod_{x \in X} i_{x*} i_x^* \mathcal{F} \right) \right)^\infty$$

où Ind désigne l'induite brutale (section IV.8.3.2). Notons $\mathcal{G} = \prod_{x \in X} i_{x*} i_x^* \mathcal{F}$, un faisceau flasque. Alors,

$$(\text{Ind } \mathcal{G})^\infty = \lim_K \prod_{G/K} \mathcal{G}$$

comme faisceau. Si U est un ouvert quasicompact de X , alors

$$\Gamma(U, \lim_K \prod_{G/K} \mathcal{G}) = \lim_K \prod_{G/K} \Gamma(U, \mathcal{G})$$

Soit, plus généralement, $\mathcal{F} = \varinjlim_i \mathcal{F}_i$ une limite inductive filtrante de faisceaux flasques sur $|X|$. Montrons que \mathcal{F} est $\Gamma_1(X, -)$ -acyclique (mais il n'y a pas de raison pour qu'il soit flasque). Remarquons que si $V \subset U$ sont deux ouverts quasicompacts de X , alors $\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{F})$ est surjectif. De plus, pour tout recouvrement fini par des ouverts quasicompacts d'un ouvert quasicompact de X , les groupes de cohomologie de Čech de \mathcal{F} sur un tel recouvrement sont les limites inductives des groupes de cohomologie de Čech des \mathcal{F}_i sur ce recouvrement. De cela on déduit que \mathcal{F} est acyclique sur tout ouvert quasicompact de X . Ces deux propriétés suffisent pour vérifier la $\Gamma_1(X, -)$ -acyclicité. En effet, on a

$$H_1^q(X, \mathcal{F}) = \lim_Z H_Z^q(X, \mathcal{F})$$

où Z parcourt l'ensemble des fermés quasicompacts de X . Utilisant le fait que X est quasi-séparé et union localement finie d'ouverts quasicompacts, on vérifie que les fermés quasicompacts constructibles dans X sont cofinaux parmi les fermés quasicompacts. Par fermé quasicompact constructible, on entend les fermés Z de X contenus dans un ouvert quasicompact U de X tel que $U \setminus Z$ soit quasicompact. Maintenant, si Z est un tel fermé de X contenu dans U et tel que $U \setminus Z$ soit

quasicompact, $H_Z^q(X, \mathcal{F}) = H_Z^q(U, \mathcal{F})$, et il suffit de montrer que si \mathcal{H} est un faisceau sur U acyclique sur tout ouvert quasicompact et tel que pour tout couple d'ouverts quasicompacts $V_1 \subset V_2 \subset U$, l'application $\Gamma(V_2, \mathcal{H}) \rightarrow \Gamma(V_1, \mathcal{H})$ soit surjective, alors \mathcal{H} est $\Gamma_Z(U, -)$ acyclique. Mais, si $0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'' \rightarrow 0$ est exacte avec \mathcal{H}' injectif, le faisceau \mathcal{H}'' vérifie les mêmes hypothèses que \mathcal{H} et est donc acyclique sur tout ouvert quasicompact de U . La suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H_Z^q(U, \mathcal{H}) \rightarrow H^q(U, \mathcal{H}') \rightarrow H^q(U \setminus Z, \mathcal{H}'') \rightarrow \dots$$

permet de conclure. \square

On déduit du lemme et de la proposition précédente:

Théorème IV.10.7. *Pour tout objet injectif dans $\Lambda - \mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}/G$, le faisceau sous-jacent est $\Gamma_!(\mathfrak{X}^{\text{rig}}, -)$ -acyclique. Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^+(\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}/G, \Lambda) & \xrightarrow{R\Gamma_!(\mathfrak{X}^{\text{rig}}/G, -)} & \mathbb{D}^+(\Lambda[G]_{\infty}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}^+(\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}, \Lambda) & \xrightarrow{R\Gamma_!(\mathfrak{X}^{\text{rig}}, -)} & \mathbb{D}^+(\Lambda) \end{array}$$

On a maintenant les outils pour démontrer le théorème qui suit:

Théorème IV.10.8. *Soit Z un sous-groupe fermé central dans G agissant trivialement sur \mathfrak{X} . Supposons que G/Z agisse proprement sur \mathfrak{X} , au sens où pour tout ensemble quasicompact $A \subset |\mathfrak{X}|$, $\{g \in G/Z \mid g.A \cap A \neq \emptyset\}$ soit compact dans G/Z . Soit \mathcal{U} un ouvert quasicompact de \mathfrak{X} et K un sous-groupe compact ouvert de G stabilisant \mathcal{U} . Supposons que $\mathfrak{X} = G.\mathcal{U}$. Soit $\mathcal{F} \in \Lambda - \mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}/G$ et $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^{\bullet}$ une résolution injective. Alors*

$$R\Gamma_!(\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}/G, \mathcal{F}) \simeq \text{Tot} \quad \bigoplus_{\alpha \in G \setminus (G/K.Z)^{\bullet+1}} \text{c-ind}_{K_{\alpha}.Z}^G \Gamma(\mathcal{U}_{\alpha}, \mathcal{I}^{\bullet})$$

où si $\alpha = [(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{p+1})]$, alors $U_{\alpha} = \cap_i g_i \mathcal{U}$ et $K_{\alpha} = \cap_i g_i K g_i^{-1}$.

Démonstration. Il suffit de procéder comme dans la démonstration du théorème IV.9.31. Pour cela on utilise les opérations d'induction/restriction définies dans la section IV.8.3.4.

$$\Lambda - \mathcal{U}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}/K.Z \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{c-ind}_{\mathcal{U}^{\text{rig}}/K.Z}^{\mathfrak{X}^{\text{rig}}/G}} \\ \xleftarrow{\text{Res}_{\mathcal{U}^{\text{rig}}/K.Z}^{\mathfrak{X}^{\text{rig}}/G}} \\ \xrightarrow{\text{Ind}_{\mathcal{U}^{\text{rig}}/K.Z}^{\mathfrak{X}^{\text{rig}}/G}} \end{array} \Lambda - \mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}/G$$

L'existence de l'adjoint c-ind implique que Res conserve les injectifs. Il est également clair que Ind les conserve. On peut alors utiliser le couple (Res, Ind) pour construire des résolutions standards formées d'injectifs et leur appliquer le foncteur $\Gamma_!(\mathfrak{X}^{\text{rig}}, -)$. \square

IV.11 Cohomologie à support compact équivariante- lisse des tours d'espaces analytiques

IV.11.1 Hypothèses et notations

Soient G et H deux groupes topologiques possédant un sous-groupe ouvert profini. On suppose fixé un sous-groupe compact ouvert G^0 de G .

Soit \mathcal{S} la catégorie dont les objets sont les sous-groupes ouverts de G^0 ,

$$\forall K, K' \in \text{Ob}(\mathcal{S}), \quad \text{Hom}_{\mathcal{S}}(K, K') = \{\bar{g} \in K \backslash G \mid g^{-1}Kg \subset K'\}$$

et

$$\forall \bar{g}_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(K, K'), \forall \bar{g}_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(K', K''), \quad \bar{g}_2 \circ \bar{g}_1 = \overline{g_1 g_2}$$

(on vérifie aisément que cette opération de composition est bien définie).

Supposons-nous donné un foncteur covariant $K \mapsto X_K$ de \mathcal{S} dans la catégorie des espaces analytiques de Berkovich paracompacts munis d'une action continue de H . En particulier, $\forall K \subset G^0, \forall g \in G$ tel que $g^{-1}Kg \subset G^0$, il y a un isomorphisme H -équivariant

$$g : X_K \xrightarrow{\sim} X_{g^{-1}Kg}$$

trivial si $g \in K$, et si $K' \subset K \subset G^0$, il y a un morphisme H -équivariant

$$\pi_{K',K} : X_{K'} \longrightarrow X_K$$

Ainsi, si $K' \triangleleft K$, $X_{K'}$ est muni d'une action de K/K' au-dessus de X_K .

Nous ferons l'hypothèse supplémentaire suivante: si $K' \triangleleft K$, alors $\pi_{K',K} : X_{K'} \longrightarrow X_K$ est un K/K' -torseur étale. On en déduit que $\forall K' \subset K$, $\pi_{K',K}$ est étale fini et que l'on a un "pro- K -torseur" $(X_{K'})_{K' \subset K} \longrightarrow X_K$ et, en particulier, un "pro- G^0 -torseur" au-dessus de l'objet final de notre tour $(X_K)_{K \subset G^0} \longrightarrow X_{G^0}$.

Il y a également des correspondances de Hecke: si $K \subset G^0$ et $g \in G$, il y a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{K \cap gKg^{-1}} & \xrightarrow{g} & X_{g^{-1}Kg \cap K} \\ \pi_{K \cap gKg^{-1}, K} \swarrow & & \searrow \pi_{g^{-1}Kg \cap K, K} \\ X_K & & X_K \end{array}$$

Exemple IV.11.1. On peut prendre $X_K = \mathcal{M}_K$ un espace de Rapoport-Zink ([23]), où $G = G(\mathbb{Q}_p)$, G^0 est un sous-groupe compact maximal et $H = J_b$, par exemple la tour d'espaces de Lubin-Tate considérée dans le premier chapitre avec $G = \text{GL}_n(F)$ et $H = D^\times$, ou bien celle de Drinfeld avec $G = D^\times$ et $H = \text{GL}_n(F)$. Plus généralement, si \hat{E} désigne le complété de l'extension maximale non-ramifiée du corps reflex associé à l'espace de Rapoport-Zink, on peut prendre $X_K = \mathcal{M}_K \hat{\otimes}_{\hat{E}} \hat{E}$,

$G = G(\mathbb{Q}_p)$ et $H = J_b \times \text{Gal}(\overline{E}|\check{E})$. Un autre point de vue pour incorporer l'action de Galois consiste à prendre $G = G(\mathbb{Q}_p) \times \text{Gal}(\overline{E}|\check{E})$, $H = J_b$, si $K = K_1 \times K_2$ où $K_1 \subset G(\mathbb{Z}_p)$ et $K_2 = \text{Gal}(\overline{E}|M)$, $X_{K_1 \times K_2} = \mathcal{M}_{K_1} \otimes_{\check{E}} M$ (avec les conditions imposées sur notre tour, cela est suffisant pour la définir puisque les groupes de la forme $K_1 \times K_2$ forment une base de voisinage de l'identité dans $G(\mathbb{Q}_p) \times \text{Gal}(\overline{E}|\check{E})$).

IV.11.2 Faisceaux de Hecke sur la tour

IV.11.2.1 Définitions. Les systèmes

$$K \longmapsto \widetilde{(X_K)_{\text{ét}}}/H, \quad \text{resp.} \quad K \longmapsto \widetilde{(X_K)_{\text{qétc}}}/H,$$

des H -faisceaux étales lisses, resp. sur le site quasi-étale compact, forment deux systèmes de topos fibrés au-dessus de la catégorie \mathcal{S} .

Définition IV.11.2. Nous noterons $\mathcal{H}_{\text{ét}}$, resp. $\mathcal{H}_{\text{qétc}}$, les topos totaux associés aux topos fibrés précédents ([22] chapitre VI).

Par exemple $\mathcal{H}_{\text{ét}}$ est la catégorie des $(\mathcal{F}_K)_{K \subset G^0}$, où \mathcal{F}_K est un H -faisceau étale lisse sur X_K , munis de morphismes H -équivalents

$$\forall g \in G \text{ tel que } g^{-1}Kg \subset G^0, \quad g^* \mathcal{F}_{g^{-1}Kg} \longrightarrow \mathcal{F}_K$$

égaux à l'identité si $g \in K$, satisfaisant à certaines conditions de cocycle lorsqu'on les compose et de morphismes H -équivalents compatibles aux morphismes précédents

$$\forall K' \subset K, \quad \pi_{K',K}^* \mathcal{F}_K \longrightarrow \mathcal{F}_{K'}$$

eux-mêmes soumis à des conditions de compatibilité, lorsque l'on a trois groupes $K'' \subset K' \subset K$. On remarquera, en particulier, que les conditions de cocycle imposent que les morphismes $g^* \mathcal{F}_{g^{-1}Kg} \longrightarrow \mathcal{F}_K$ soient des isomorphismes.

Dans la suite on notera en abrégé $(\mathcal{F}_K)_K$ un tel objet du topos total, sans faire référence aux morphismes de compatibilité précédents, qui seront sous-entendus.

La terminologie faisceaux de Hecke provient de ce que si $(\mathcal{F}_K)_K$ est comme précédemment, $K \subset G^0$ et $g \in G$, il y a une correspondance cohomologique de \mathcal{F}_K dans lui-même, supportée par la correspondance de Hecke associée à K et g

$$g^* \pi_{g^{-1}Kg \cap K, K}^* \mathcal{F}_K \longrightarrow \pi_{K \cap gKg^{-1}, K}^* \mathcal{F}_K$$

et de plus cette correspondance cohomologique ne dépend que de la double classe $KgK \in K \backslash G / K$, au sens qui suit. Si $k_1, k_2 \in K$ et $g' = k_1 g k_2$, il y a un isomor-

phisme entre correspondances de X_K dans lui-même

$$\begin{array}{ccc}
 X_{K \cap g'Kg'^{-1}} & \xrightarrow{g'} & X_{g'^{-1}Kg' \cap K} \\
 \downarrow k_1^{-1} \simeq & & \downarrow \simeq k_2 \\
 X_{K \cap gKg^{-1}} & \xrightarrow{g} & X_{g^{-1}Kg \cap K} \\
 \swarrow \pi_{K \cap gKg^{-1}, K} & & \searrow \pi_{g^{-1}Kg \cap K, K} \\
 X_K & & X_K
 \end{array}$$

Via cet isomorphisme les deux correspondances cohomologiques associées à g et g' se correspondent.

Définition IV.11.3. Pour $\bullet \in \{\text{ét}, \text{qétc}\}$, on notera $\mathcal{H}_\bullet^{\text{cart}}$ les objets cartésiens du topos total \mathcal{H}_\bullet .

En d'autres termes, il s'agit de la sous-catégorie de \mathcal{H}_\bullet formée des $(\mathcal{F}_K)_K$ tels que

$$\forall K' \subset K \subset G^0, \pi_{K',K}^* \mathcal{F}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{K'}$$

soit un isomorphisme. En particulier, si $K' \triangleleft K$, on a $\mathcal{F}_K = (\pi_{K',K}^* \mathcal{F}_{K'})^{K/K'}$.

On notera que le foncteur $(\mathcal{F}_K)_K \mapsto \mathcal{F}_{G^0}$ de $\mathcal{H}_\bullet^{\text{cart}}$ dans le topos $(X_{G^0})_\bullet / H$ des faisceaux sur la base de la tour est fidèle.

Exemple IV.11.4. Considérons l'espace de Rapoport-Zink des déformations d'un groupe p -divisible étale, muni d'une G -structure, où G est un groupe réductif non-ramifié sur \mathbb{Q}_p . On a alors $G = G(\mathbb{Q}_p) = H$, $G^0 = G(\mathbb{Z}_p)$. Alors, si $L = \widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$, on a

$$\mathcal{M}_K = \coprod_{K \setminus G} \mathcal{M}(L)$$

sur lequel H agit à gauche et G à droite par correspondances de Hecke. Les faisceaux de Hecke cartésiens sur la tour s'identifient alors aux ensembles munis d'une action lisse de $G(\mathbb{Q}_p) \times \text{Gal}(\overline{L}|L)$ (il s'agit d'un cas très particulier de la proposition IV.11.20 puisque dans ce cas-là l'espace des périodes est réduit à un point).

IV.11.2.2 Propriétés de base des catégories de faisceaux de Hecke. Il y a des triplets de foncteurs adjoints pour tout $K \subset G^0$ et $\bullet \in \{\text{ét}, \text{qétc}\}$

$$(\widehat{X_K})_{\text{ét}} / H \begin{array}{c} \xrightarrow{i_{K*}} \\ \xleftarrow{i_K^*} \\ \xrightarrow{i_{K!}} \end{array} \mathcal{H}_\bullet$$

où

- $i_K^*((\mathcal{F}_{K'})_{K'}) = \mathcal{F}_K$, qui est le foncteur "restriction à un étage"

- $(i_{K*}\mathcal{F})_{K'} = \prod_{\alpha: K \xrightarrow{\mathcal{S}} K'} \alpha_*\mathcal{F}$ (produit dans la catégorie des H -faisceaux lisses, cf. remarque IV.9.20)
- $(i_{K!}\mathcal{F})_{K'} = \bigoplus_{\alpha: K' \xrightarrow{\mathcal{S}} K} \alpha^*\mathcal{F}$

(cf. [22] chapitre VI section 5). On notera en particulier que l'existence de l'adjoint à droite $i_{K!}$ de i_K^* implique que si $(\mathcal{F}_K)_K$ est un objet injectif de $\Lambda - \mathcal{H}_\bullet$, alors $\forall K, \mathcal{F}_K$ en est un dans $\Lambda - \widetilde{(X_K)_\bullet}/H$.

Si $K' \rightarrow K$ est un morphisme dans \mathcal{S} , il y a un diagramme 1-commutatif de morphisme de topos

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{(X_{K'})_{\text{qétc}}}/H & \xrightarrow{(\nu^*, \nu_*)} & \widetilde{(X_{K'})_{\text{ét}}}/H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{(X_K)_{\text{qétc}}}/H & \xrightarrow{(\nu^*, \nu_*)} & \widetilde{(X_K)_{\text{ét}-\infty}}/H \end{array}$$

(utiliser le fait que le morphisme $X_{K'} \rightarrow X_K$ est étale fini) qui induit un morphisme de topos fibrés, d'où un morphisme de topos

$$(\nu^*, \nu_*) : \mathcal{H}_{\text{qétc}} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{ét}}$$

qui commute à la restriction aux étages: $\nu^*((\mathcal{F}_K)_K) = (\nu^*\mathcal{F}_K)_K$ et $\nu_*((\mathcal{F}_K)_K) = (\nu_*\mathcal{F}_K)_K$. Ce morphisme satisfait donc à toutes les propriétés déjà énoncées dans le cas d'un espace de Berkovich seul (i.e., pas dans le cas d'une tour). En particulier, $\nu^* : \mathcal{H}_{\text{ét}} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{qétc}}$ est pleinement fidèle et il y a un isomorphisme $Id \xrightarrow{\sim} \nu_*\nu^*$.

IV.11.2.3 Propriétés de base des catégories de faisceaux de Hecke cartésiens. Soit $\bullet \in \{\text{ét}, \text{qétc}\}$. L'inclusion $\mathcal{H}_\bullet^{\text{cart}} \hookrightarrow \mathcal{H}_\bullet$ possède un adjoint à gauche κ défini par $\forall (\mathcal{F}_K)_K, \kappa((\mathcal{F}_K)_K) = (\mathcal{G}_K)_K$, où

$$\mathcal{G}_K = \varinjlim_{K' \triangleleft K} (\pi_{K', K*}\mathcal{F}_{K'})^{K/K'}$$

dont on vérifie facilement que c'est naturellement un faisceau de Hecke cartésien. De plus, κ est un foncteur exact.

Proposition IV.11.5. *La catégorie $\mathcal{H}_\bullet^{\text{cart}}$ est un topos.*

Démonstration. L'existence de limites projectives finies résulte de ce que si $K' \subset K \subset G^0$, $\pi_{K', K}^*$ commute à ces limites et donc si $((\mathcal{F}_{i,K})_K)_{i \in I}$ est un système projectif fini de faisceaux cartésiens, sa limite projective dans \mathcal{H}_\bullet , $(\varprojlim_{i \in I} \mathcal{F}_{i,K})_K$, est cartésienne. Il en est de même pour les limites inductives quelconques et les

“bons” quotients par des relations d'équivalence. Reste à voir l'existence d'une famille génératrice. Mais, si $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ en est une de \mathcal{H}_\bullet , alors $(\kappa(C_\alpha))_{\alpha \in A}$ en est une de $\mathcal{H}_\bullet^{\text{cart}}$. \square

Il résulte des discussions précédentes que si $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ est une résolution injective dans $\Lambda - \mathcal{H}_\bullet^{\text{cart}}$, alors c'en est une dans $\Lambda - \mathcal{H}_\bullet$. Comme dans la section précédente, il y a un morphisme de topos $(\nu^*, \nu_*) : \mathcal{H}_{\text{étc}}^{\text{cart}} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{ét}}^{\text{cart}}$.

IV.11.3 Le complexe de cohomologie à support compact de la tour

Si $(\mathcal{F}_K)_K \in \mathcal{H}_{\text{ét}}$ et $K' \subset K$, étant donné que $X_{K'} \rightarrow X_K$ est étale fini, il y a un morphisme

$$\Gamma_c(X_K, \mathcal{F}_K) \xrightarrow{\pi_{K',K}^*} \Gamma_c(X_{K'}, \pi_{K',K}^* \mathcal{F}_K) \rightarrow \Gamma_c(X_{K'}, \mathcal{F}_{K'})$$

où le deuxième morphisme est induit par les morphismes de transition dans la définition du topos total. De plus, on a vu dans la section IV.9 que ce sont des H -modules lisses. On obtient ainsi un système inductif de H -modules lisses munis d'une action de G à la limite.

Définition IV.11.6. On note $\Gamma_c(\mathcal{H}, -) : \Lambda - \mathcal{H}_{\text{ét}} \rightarrow \Lambda[G \times H]_\infty$ le foncteur qui à $(\mathcal{F}_K)_K$ associe

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ K \subset G^0}} \Gamma_c(X_K, \mathcal{F}_K)$$

On note $R\Gamma_c(\mathcal{H}_{\text{ét}}, -)$ le foncteur dérivé correspondant, à valeurs dans $\mathbb{D}^+(\Lambda[G \times H]_\infty)$.

Théorème IV.11.7. *Le foncteur $(\mathcal{F}_K)_K \mapsto R\Gamma_c(\mathcal{H}, (\mathcal{F}_K)_K)$ est tel que*

$$\forall i, H^i(R\Gamma_c(\mathcal{H}_{\text{ét}}, (\mathcal{F}_K)_K)) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K}} H_c^i(X_K, \mathcal{F}_K)$$

Démonstration. C'est une conséquence du fait que $(\mathcal{F}_K)_K$ possède une résolution injective qui, après oubli de l'action de H , est injective étage par étage et du théorème IV.9.26. \square

Remarque IV.11.8. D'après les résultats de la section IV.11.2.3, le foncteur dérivé précédent évalué sur un faisceau de Hecke cartésien peut se calculer avec une résolution injective de faisceaux cartésiens. C'est, par exemple, le cas du faisceau constant $\underline{\Lambda}$. De plus, le foncteur d'oubli $\mathcal{H}_\bullet^{\text{cart}} \hookrightarrow \mathcal{H}_\bullet$ envoie injectifs sur injectifs, donc on peut tout calculer indifféremment, avec des faisceaux cartésiens ou non.

Remarque IV.11.9. Si l'ordre du groupe profini K_0 , $K_0 \subset G^0$, est inversible dans Λ alors le foncteur $M \mapsto M^{K_0}$ de $\Lambda[G \times H]_\infty \rightarrow \Lambda[H]_\infty$ est exact et pour $(\mathcal{F}_K)_K \in \mathcal{H}_{\text{ét}}^{\text{cart}}$, $R\Gamma_c(\mathcal{H}_{\text{ét}}, (\mathcal{F}_K)_K)^{K_0} = R\Gamma_c(X_{K_0}, \mathcal{F}_{K_0})$. Ce foncteur d'invariants sous K_0 se factorise en fait en un foncteur $\Lambda[G \times H]_\infty \rightarrow \mathcal{H}(K_0 \backslash G / K_0) \otimes_\Lambda \Lambda[H]_\infty$,

où $\mathcal{H}(K_0 \backslash G / K_0)$ désigne l'algèbre de Hecke des fonctions bi-invariantes sous K_0 à valeurs dans Λ et $R\Gamma_c(\mathcal{H}_{\text{ét}}, (\mathcal{F}_K)_K)^{K_0}$ est le complexe de modules sur l'algèbre de Hecke donné par l'action des correspondances de Hecke cohomologiques.

IV.11.4 Objets cartésiens sur la tour et domaine fondamental pour l'action des correspondances de Hecke

IV.11.4.1 Introduction: recollement de faisceaux équivariants. Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$. Notons $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$. Le topos X^\sim des faisceaux sur X est équivalent aux objets cartésiens du topos total du diagramme suivant

$$\coprod_{i,j,k} U_{ijk}^\sim \rightrightarrows \coprod_{i,j} U_{ij}^\sim \rightrightarrows \coprod_i U_i^\sim$$

Traduit en termes usuels, cela signifie que se donner un faisceau sur X est équivalent à se donner une collection $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ de faisceaux sur les $(U_i)_i$ munis d'isomorphismes $\beta_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}$, vérifiant $\beta_{ij}|_{U_{ijk}} \circ \beta_{jk}|_{U_{ijk}} = \beta_{ik}|_{U_{ijk}}$.

Soit maintenant G un groupe agissant sur X . Se donner un G -faisceau sur X est équivalent à se donner un objet cartésien du topos total associé au diagramme usuel

$$G \times G \times X^\sim \rightrightarrows G \times X^\sim \rightrightarrows X^\sim$$

c'est-à-dire des isomorphismes $\forall g \in G, \alpha_g : g^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$, vérifiant $\forall g_1, g_2, \alpha_{g_2} \circ g_2^* \alpha_{g_1} = \alpha_{g_1 g_2}$.

Supposons maintenant que G agisse sur I et que $\forall i, g.U_i = U_{g.i}$. Se donner un faisceau G -équivariant sur X est alors équivalent à se donner un objet cartésien du topos total associé au diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_{i,j,k} U_{ijk}^\sim & \rightrightarrows & \coprod_{i,j} U_{ij}^\sim & \rightrightarrows & \coprod_i U_i^\sim \\ & & \uparrow \uparrow & & \uparrow \uparrow \\ G \times \coprod_{i,j} U_{ij}^\sim & \rightrightarrows & G \times \coprod_i U_i^\sim & & \\ & & \uparrow \uparrow \uparrow & & \\ & & G \times G \times \coprod_i U_i^\sim & & \end{array}$$

où on laisse le lecteur deviner les différentes flèches de ce diagramme. Traduit en termes usuels, cela signifie que se donner un G -faisceau sur X est équivalent à se donner des faisceaux $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ sur les $(U_i)_i$ munis

- d'isomorphismes $\beta_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}$ vérifiant $\beta_{ij}|_{U_{ijk}} \circ \beta_{jk}|_{U_{ijk}} = \beta_{ik}|_{U_{ijk}}$
- d'isomorphismes $\forall g, i, \alpha_{g,i} : g^* \mathcal{F}_{g.i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_i$ vérifiant $\alpha_{g_1,i} \circ g_1^* \alpha_{g_2, g_2 g_1.i} = \alpha_{g_2 g_1,i}$

- enfin, on demande que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} g^*(\mathcal{F}_{g,i}|_{U_{g,i,g,j}}) & \xrightarrow{\alpha_{g,i}} & \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \\ g^*\beta_{g,i,g,j} \downarrow & & \downarrow \beta_{ij} \\ g^*(\mathcal{F}_{g,j}|_{U_{g,i,g,j}}) & \xrightarrow{\alpha_{g,j}} & \mathcal{F}_j|_{U_{ij}} \end{array}$$

Soit maintenant $\forall i \in I$, $G_i = \text{Stab}_G(U_i)$. Posons $\forall A \subset I$, $G_A = \bigcap_{i \in A} G_i$, qui stabilise donc $\bigcap_{i \in A} U_i$. Pour un $i \in I$, notons \widetilde{U}_i/G_i le topos des G_i -faisceaux sur U_i .

Pour $g \in G$, on a $G_{g,i} = gG_i g^{-1}$ et il y a une équivalence

$$g^* : \widetilde{U}_{g,i}/G_{g,i} \xrightarrow{\sim} \widetilde{U}_i/G_i$$

induite par l'isomorphisme d'espaces équivariants

$$(g, \text{int}_g) : (U_i, G_i) \longrightarrow (U_{g,i}, G_{g,i}).$$

Si $g \in G_i$, cette équivalence est le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U}_i/G_i & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{U}_i/G_i \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}^g \end{array}$$

où \mathcal{F}^g est le G_i -faisceau "tordu par l'automorphisme intérieur" int_g de G_i .

Pour un tel $g \in G_i$, il y a un isomorphisme de foncteurs

$$\gamma_{i,g} : (-)^g \xrightarrow{\sim} \text{Id}$$

donné, pour un $\mathcal{F} \in \widetilde{U}_i/G_i$, par l'action de $g : g^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$.

Soit maintenant $(\mathcal{F}_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \widetilde{U}_i/G_i$ une collection de faisceaux équivariants. Se donner un G -faisceau \mathcal{F} sur X tel que $\forall i \in I$, $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{F}_i$ comme G_i -faisceaux, est équivalent à la donnée

- d'isomorphismes de G_{ij} -faisceaux $\beta_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}$ vérifiant $\beta_{ij}|_{U_{ijk}} \circ \beta_{jk}|_{U_{ijk}} = \beta_{ik}|_{U_{ijk}}$
- d'isomorphismes de G_i -faisceaux $\forall g, i$, $\alpha_{g,i} : g^*\mathcal{F}_{g,i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_i$ vérifiant $\alpha_{g_1,i} \circ g_1^*\alpha_{g_2,g_2g_1,i} = \alpha_{g_2g_1,i}$ et tels que si $g \in G_i$, on ait $\alpha_{g,i} = \gamma_{i,g}$, l'isomorphisme donné par la structure de G_i -faisceau sur \mathcal{F}_i
- enfin, on demande que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} g^*(\mathcal{F}_{g,i}|_{U_{g,i,g,j}}) & \xrightarrow{\alpha_{g,i}} & \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \\ g^*\beta_{g,i,g,j} \downarrow & & \downarrow \beta_{ij} \\ g^*(\mathcal{F}_{g,j}|_{U_{g,i,g,j}}) & \xrightarrow{\alpha_{g,j}} & \mathcal{F}_j|_{U_{ij}} \end{array}$$

IV.11.4.2 Hypothèses et notations. Nous ferons désormais les hypothèses suivantes. Il existe un domaine analytique compact W dans la base de notre tour X_{G^0} tel que

- Lorsque $(g, h) \in G \times H$ parcourt $G \times H$, les images par les correspondances de Hecke

$$\begin{array}{ccc} & X_{G^0 \cap gG^0 g^{-1}} & \xrightarrow{(g, h)} X_{g^{-1}G^0 g \cap G^0} \\ \pi_{G^0 \cap gG^0 g^{-1}, G^0} \swarrow & & \searrow \pi_{g^{-1}G^0 g \cap G^0, G^0} \\ X_{G^0} & & X_{G^0} \end{array}$$

de W , les $\pi_{g^{-1}G^0 g \cap G^0, G^0} \left((g, h). \pi_{G^0 \cap gG^0 g^{-1}, G^0}^{-1}(W) \right)$, recouvrent X_{G^0} .

- Soit H^0 le stabilisateur dans H de W (qui est nécessairement un sous-groupe ouvert). On suppose l'existence d'un sous-groupe central Z dans $G \times H$ tel que Z agisse trivialement sur la tour. Notons alors

$$\mathcal{I} = (G^0 \backslash G \times H / H^0) / Z$$

et $\forall z \in \mathcal{I}$, $z.W \subset X_{G^0}$ l'image de W donnée par la correspondance de Hecke z . On suppose alors que

$$\forall z \in \mathcal{I}, \{z' \in \mathcal{I} \mid z'.W \cap z.W \neq \emptyset\} \text{ est fini}$$

Exemple IV.11.10. Prenons le cas des espaces de Lubin-Tate étudié dans le premier chapitre. Avec les notations de ce même chapitre, l'espace de Rapoport-Zink sans niveau \mathcal{M} s'écrit $\mathcal{M} = \coprod_{\mathbb{Z}} \mathfrak{X}^{an}$, où \mathfrak{X} désigne l'espace de Lubin-Tate. Alors, le domaine fondamental de Gross-Hopkins dans la composante indexée par $0 \in \mathbb{Z}$ satisfait aux hypothèses demandée à W . L'ensemble \mathcal{I} consiste en les sommets de l'immeuble introduit dans le premier chapitre.

Exemple IV.11.11. Dans le cas de l'espace de Rapoport-Zink associé à l'espace de Drinfeld Ω , $\mathcal{M} = \coprod_{\mathbb{Z}} \Omega$, on peut prendre pour W l'image réciproque d'un simplexe maximal dans l'immeuble, via la rétraction de Ω sur l'immeuble.

IV.11.4.3 Les topos équivariants fibres en un sommet de "l'immeuble"

Définition IV.11.12. Soit $z = [g, h] \in \mathcal{I}$. On note $G_z = g^{-1}G^0 g$, $H_z = hH^0 h^{-1}$. Pour $K \subset G_z \cap G^0$ un sous-groupe ouvert, on note

$$W_{z, K} = (g, h). \pi_{gK g^{-1}, G^0}^{-1}(W) \subset X_K$$

$$\begin{array}{ccc} & X_{gK g^{-1}} & \xrightarrow{(g, h)} X_K \\ & \swarrow \pi_{gK g^{-1}, G^0} & \\ X_{G^0} & & \end{array}$$

De même, si $I \subset \mathcal{I}$ est un sous-ensemble fini, on note $G_I = \bigcap_{z \in I} G_z$, $H_I = \bigcap_{z \in I} H_z$, et pour $K \subset G_I \cap G^0$, $W_{I,K} = \bigcap_{z \in I} W_{z,K} \subset X_K$.

Remarquons que si $K \subset G_I \cap G^0$, $g \in G_I$ et $h \in H_I$ sont tels que $g^{-1}Kg \subset G^0$, alors $g^{-1}Kg \subset G_I \cap G^0$ et (g, h) induit un isomorphisme

$$(g, h) : W_{I,K} \xrightarrow{\sim} W_{I,g^{-1}Kg}$$

On obtient ainsi une tour $(W_{I,K})_{K \subset G_I \cap G^0}$ satisfaisant aux mêmes conditions que la tour $K \mapsto X_K$ en remplaçant G par G_I , G^0 par $G_I \cap G^0$ et H par H_I . Cette tour est plus simple, car pour celle-ci, G_I est compact.

Définition IV.11.13. Soit $I \subset \mathcal{I}$ un ensemble fini. On note $\mathcal{H}_{\text{qétc}, I}^{\text{cart}}$ la catégorie des objets cartésiens du topos total du topos fibré $G_I \cap G^0 \supset K \mapsto (W_{I,K})_{\text{qétc}}^{\sim} / H_I$ au-dessus de la catégorie des sous-groupes ouverts de $G_I \cap G^0$ munis des morphismes $\text{Hom}(K, K') = \{g \in K \setminus G_I \mid g^{-1}Kg \subset K'\}$. On note de même $\mathcal{H}_{\text{ét}, I}^{\text{cart}}$ en remplaçant quasi-étale par étale.

Lemme IV.11.14. Soit $\bullet \in \{\text{ét}, \text{qétc}\}$. Soit I comme précédemment et $K_0 \subset G_I \cap G^0$ tel que $K_0 \triangleleft G_I$. Alors, l'application, qui à $(\mathcal{F}_K)_{K \subset G_I \cap G^0} \in \mathcal{H}_{\bullet, I}^{\text{cart}}$ associe \mathcal{F}_{K_0} muni de son action de $G_I/K_0 \times H_I$ compatible à celle sur W_{I,K_0} , est une équivalence de catégories entre $\mathcal{H}_{\bullet, I}^{\text{cart}}$ et $(W_{K_0, I})_{\bullet}^{\sim} / (G_I/K_0 \times H_I)$.

Démonstration. C'est une conséquence du rappel du début de la section IV.8.6 sur les faisceaux équivariants sur un toseur. En effet, si $K \subset K_0$, il suffit de poser $\mathcal{F}_K = \pi_{K, K_0}^* \mathcal{F}_{K_0}$. Pour $K \subset G_I \cap G^0$ général, il suffit de choisir $K' \triangleleft G_I$ tel que $K' \subset K_0$ et $K' \subset K$. Alors

$$\mathcal{F}_K = (\pi_{K', K}^* (\pi_{K', K_0}^* \mathcal{F}_{K_0}))^{K/K'}$$

On vérifie alors que l'action de G_I/K_0 sur \mathcal{F}_{K_0} définit bien un objet cartésien de notre topos fibré. \square

On a de même le lemme suivant.

Lemme IV.11.15. Soient $\bullet \in \{\text{ét}, \text{qétc}\}$ et I comme précédemment. Soit $K \subset G_I \cap G^0$ tel que $K \triangleleft G_I$. Notons $W_I := W_{I,K} / (G_I/K)$. Alors $W_{I,K} \rightarrow W_I$ est un (G_I/K) -torseur étale et il y a une équivalence

$$\mathcal{H}_{\bullet}^{\text{cart}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{(W_I)_{\bullet}} / H_I$$

Démonstration. Elle ne pose pas de problème. \square

Exemple IV.11.16. Dans le contexte du premier chapitre, on trouve donc que pour un sommet z de l'immeuble, les objets de $\mathcal{H}_{\bullet, z}^{\text{cart}}$ s'identifient aux \mathcal{O}_D^{\times} -faisceaux lisses sur la cellule sans niveau associée au sommet z .

Il y a une action de $G \times H$ sur \mathcal{I} (l'action de G se faisant à droite) telle que $\forall I, G_{(g,h).I} = g^{-1}G_I g$ et $H_{(g,h).I} = hH_I h^{-1}$. Cette action induit un isomorphisme pour I et $K \subset G_I \cap G^0$ suffisamment petits

$$(g, h) : W_{I,K} \xrightarrow{\sim} W_{(g,h).I, g^{-1}Kg}$$

Cela n'induit pas d'isomorphisme entre les tours $(W_{I,K})_{K \subset G_I \cap G^0}$ et $(W_{(g,h).I,K})_{K \subset G_{(g,h).I} \cap G^0}$, car il faut se restreindre à des K suffisamment petits. Néanmoins, d'après le lemme IV.11.14, cela induit une équivalence entre les systèmes de faisceaux cartésiens sur les tours

$$((g, h)^*, (g, h)_*) : \mathcal{H}_{\bullet, I}^{\text{cart}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\bullet, (g,h).I}^{\text{cart}}$$

Plus précisément, à $(\mathcal{F}_K)_{K \subset G_I \cap G^0} \in \mathcal{H}_{\bullet, I}^{\text{cart}}$ est associé

$$(\mathcal{G}_K)_{K \subset G_{(g,h).I} \cap G^0 \cap g^{-1}G^0 g} = ((g, h)_* \mathcal{F}_K g^{-1})_{K \subset G_{(g,h).I} \cap G^0 \cap g^{-1}G^0 g}$$

Le système $(\mathcal{G}_K)_{K \subset G_{(g,h).I} \cap G^0 \cap g^{-1}G^0 g}$ est cartésien sur la tour

$$G_{(g,h).I} \cap G^0 \cap g^{-1}G^0 g \supset K \longmapsto W_{(g,h).I, K}$$

dont les morphismes de transition sont

$$\begin{aligned} \forall K, K' \subset G_{(g,h).I} \cap G^0 \cap g^{-1}G^0 g, \\ \text{Hom}(K, K') = \{\bar{g}' \in K \backslash G_{(g,h).I} \mid g'^{-1}Kg' \subset K'\} \end{aligned}$$

Mais, les systèmes cartésiens sur cette tour s'identifient à ceux sur

$$(W_{(g,h).I, K})_{K \subset G_{(g,h).I} \cap G^0}.$$

Lorsque $(g, h) \in G_I \times H_I$, cette équivalence correspond à une ‘‘torsion intérieure’’ des système de faisceaux sur la tour. Plus précisément, il y a un isomorphisme fonctoriel dans $\mathcal{H}_{\bullet, I}^{\text{cart}}$

$$\forall \mathcal{F} \in \mathcal{H}_{\bullet, I}^{\text{cart}}, \forall (g, h) \in G_I \times H_I, \gamma_{(g,h), I} : (g, h)^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

De plus, si $J \subset I$, il y a une application de restriction

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bullet, J}^{\text{cart}} &\longrightarrow \mathcal{H}_{\bullet, I}^{\text{cart}} \\ (\mathcal{F}_K)_{K \subset G_J \cap G^0} &\longmapsto (\mathcal{F}_K|_{W_{I, K}})_{K \subset G_I \cap G^0} \end{aligned}$$

IV.11.4.4 Reconstruction des systèmes de faisceaux cartésiens sur la tour à partir de ceux sur les tours en chaque sommet de l'immeuble

Théorème IV.11.17. *Il y a une équivalence de catégories entre les systèmes cartésiens de faisceaux quasi-étales sur la tour, $\mathcal{H}_{\text{qétc}}^{\text{cart}}$, et les $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathcal{I}}$, où $\mathcal{F}_i \in \mathcal{H}_{\text{qétc}, i}^{\text{cart}}$,*

- munis d'isomorphismes $\forall i, j, \beta_{ij} : \mathcal{F}_i|_{\mathcal{H}_{ij}^{\text{cart}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{\mathcal{H}_{ij}^{\text{cart}}}$ satisfaisant

$$\beta_{ij}|_{\mathcal{H}_{ijk}^{\text{cart}}} \circ \beta_{jk}|_{\mathcal{H}_{ijk}^{\text{cart}}} = \beta_{ik}|_{\mathcal{H}_{ijk}^{\text{cart}}}$$

- munis d'isomorphismes $\forall (g, h) \in G \times H, \forall i, \alpha_{(g,h),i} : (g, h)^* \mathcal{F}_{(g,h),i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_i$ satisfaisant

$$\forall (g, h), (g', h'), \forall i, \alpha_{(g',h'),(g,h),i} \circ (g, h)^* \alpha_{(g,h),i} = \alpha_{(g'g,h'h),i}$$

et tels que si $(g, h) \in G_i \times H_i$, alors $\alpha_{(g,h),i}$ soit l'action de $G_i \times H_i$ sur le système de faisceau \mathcal{F}_i par "torsion intérieure", $\alpha_{(g,h),i} = \gamma_{(g,h),i}$

- et enfin tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} ((g, h)^* \mathcal{F}_{(g,h),i})|_{\mathcal{H}_{ij}^{\text{cart}}} & \xrightarrow{(\alpha_{(g,h),i})|_{\mathcal{H}_{ij}^{\text{cart}}}} & \mathcal{F}_i|_{\mathcal{H}_{ij}^{\text{cart}}} \\ \downarrow (g,h)^* \beta_{(g,h),i,(g,h),j} & & \downarrow \beta_{ij} \\ ((g, h)^* \mathcal{F}_{(g,h),j})|_{\mathcal{H}_{ij}^{\text{cart}}} & \xrightarrow{(\alpha_{(g,h),j})|_{\mathcal{H}_{ij}^{\text{cart}}}} & \mathcal{F}_j|_{\mathcal{H}_{ij}^{\text{cart}}} \end{array}$$

Lorsque les images par les correspondances de Hecke de $\overset{\circ}{W}$ recouvrent X_{G^0} on peut remplacer quasi-étale par étale.

Démonstration. Il y a un foncteur qui à $(\mathcal{F}_K)_{K \subset G^0} \in \mathcal{H}_{\text{qétc}}^{\text{cart}}$ associe la collection des $(\mathcal{F}_K|_{W_{i,K}})_{K \subset G_i \cap G^0} \in \mathcal{H}_{\text{qétc},i}^{\text{cart}}$, lorsque i varie dans \mathcal{I} , et dont on vérifie que c'est bien un objet cartésien comme dans l'énoncé du théorème.

Montrons que ce foncteur induit une équivalence. Soit donc

$$(\mathcal{F}_{i,K})_{i \in \mathcal{I}, K \subset G_i \cap G^0}$$

un système de faisceaux comme dans l'énoncé. Écrivons

$$\mathcal{I} = \bigcup_{k \geq 1} A_k$$

où $\forall k, A_k$ est un ensemble fini, $A_k \subset A_{k+1}$ et $(G^0 \times H^0).A_k = A_k$. Alors

$$X_{G^0} = \bigcup_{\substack{k \geq 1 \\ K \subset G_{A_k} \cap G^0}} \pi_{K,G^0} \left(\bigcup_{i \in A_k} W_{i,K} \right)$$

où, dans l'union précédente, pour un k donné. $K \subset G_{A_k} \cap G^0$ est quelconque. On peut prendre en particulier $K_k := G_{A_k} \cap G^0 \triangleleft G^0$. Il y a un revêtement galoisien de groupe G^0/K_k

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{i \in A_k} W_{i,K_k} & \xrightarrow{\text{domaine analytique compact}} & X_{K_k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{K_k,G^0} \left(\bigcup_{i \in A_k} W_{i,K} \right) & \xrightarrow{\quad} & X_{G^0} \end{array}$$

Les H^0 -faisceaux quasi-étales lisses $(\mathcal{F}_{i,K_k})_{i \in A_k}$ se recollent grâce aux données de recollement de l'énoncé en un $G^0/K_k \times H^0$ -faisceau lisse quasi-étale \mathcal{G}_k sur $\bigcup_{i \in A_k} W_{i,K_k}$. Ce faisceau descend en un H^0 -faisceau lisse $\mathcal{H}_k = (\pi_{K_k, G^0}^* \mathcal{G}_k)^{G^0/K_k}$ sur $\pi_{K_k, G^0}(\bigcup_{i \in A_k} W_{i,K_k})$. Lorsque $k' \geq k$, il y a des identifications

$$\mathcal{H}_{k'}|_{\pi_{K_k, G^0}(\bigcup_{i \in A_k} W_{i,K_k})} = \mathcal{H}_k.$$

Cela définit par recollement un H^0 -faisceau lisse \mathcal{F}_{K^0} sur X_{G^0} . On pose alors $\forall K \subset G^0$, $\mathcal{F}_K = \pi_{K, G^0}^* \mathcal{F}_{K^0}$.

On doit maintenant montrer que ce système de faisceaux est muni d'une action de $G \times H$, c'est-à-dire définir des isomorphismes naturels $\forall K \subset G^0$, $\forall (g, h)$ tels que $g^{-1}Kg \subset G^0$, $(g, h)^* \mathcal{F}_{g^{-1}Kg} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_K$. Cela est fastidieux, mais ne pose pas de problème particulier. On en laisse donc la vérification au lecteur. \square

Remarque IV.11.18. Quitte à remplacer W par un nombre fini de ses itérés sous des correspondances de Hecke, on peut toujours supposer que les itérés sous les correspondances de Hecke de $\overset{\circ}{W}$ recouvrent X_{G^0} .

IV.11.5 Faisceaux cartésiens sur la tour et espaces de périodes

Supposons maintenant l'existence d'un morphisme étale d'espaces analytiques

$$\Pi : X_{G^0} \longrightarrow P$$

tel que P soit muni d'une action lisse de H et Π commute à cette action. Supposons, de plus, que Π est G -invariant, au sens où $\forall g \in G$, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X_{G^0 \cap gG^0g^{-1}} & \xrightarrow{g} & X_{g^{-1}G^0g \cap G^0} \\ \pi_{G^0 \cap gG^0g^{-1}, G^0} \swarrow & & \searrow \pi_{g^{-1}G^0g \cap G^0, G^0} \\ X_{G^0} & & X_{G^0} \\ & \searrow \Pi & \swarrow \Pi \\ & & P \end{array}$$

On peut alors définir deux foncteurs pour $\bullet \in \{\text{ét}, \text{qétc}\}$

$$\begin{aligned} \alpha : \widetilde{P}_\bullet / H &\longrightarrow \mathcal{H}_\bullet^{\text{cart}} \\ \mathcal{G} &\longmapsto ((\Pi \circ \pi_{K, G^0})^* \mathcal{G})_{K \subset G^0} \\ \beta : \mathcal{H}_\bullet^{\text{cart}} &\longrightarrow \widetilde{P}_\bullet / H \\ (\mathcal{F}_K)_{K \subset G^0} &\longmapsto \left[\varinjlim_{K \subset G^0} (\Pi \circ \pi_{K, G^0})^* \mathcal{F}_K \right]^G \end{aligned}$$

où l'action de G sur $\varinjlim_{K \subset G^0} (\Pi \circ \pi_{K, G^0})_* \mathcal{F}_K$ se fait de la façon suivante. Pour $g \in G$ et K suffisamment petit tel que $K \subset G^0 \cap g^{-1}G^0g$, il y a un isomorphisme $\mathcal{F}_K \simeq g_* \mathcal{F}_{gKg^{-1}}$ qui induit

$$\begin{aligned} (\Pi \circ \pi_{K, G^0})_* \mathcal{F}_K &\simeq (\Pi \circ \pi_{K, G^0})_* (g_* \mathcal{F}_{gKg^{-1}}) \\ &= (\Pi \circ \pi_{K, G^0} \circ g)_* \mathcal{F}_{gKg^{-1}} \\ &= (\Pi \circ \pi_{gKg^{-1}, G^0})_* \mathcal{F}_{gKg^{-1}} \longrightarrow \varinjlim_{K' \subset G^0} (\Pi \circ \pi_{K', G^0})_* \mathcal{F}_{K'} \end{aligned}$$

On vérifie que lorsque K varie, ces morphismes sont compatibles et que donc g induit un automorphisme du faisceau limite inductive.

Une autre description du foncteur β en termes de correspondances de Hecke sphériques plutôt que d'invariants sous G est la suivante. Si $K \subset G^0$, étant donné que $\pi_{K, G^0}^* \mathcal{F}_{G^0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_K$, il y a un monomorphisme $\mathcal{F}_{G^0} \hookrightarrow (\pi_{K, G^0})_* \mathcal{F}_K$ tel que si $K \triangleleft G^0$, on ait

$$[(\pi_{K, G^0})_* \mathcal{F}_K]^{G^0} = \mathcal{F}_{G^0}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \beta((\mathcal{F}_K)_K) &= \left[\varinjlim_{K \subset G^0} (\Pi \circ \pi_{K, G^0})_* \mathcal{F}_K \right]^G \subset \left[\varinjlim_{K \subset G^0} (\Pi \circ \pi_{K, G^0})_* \mathcal{F}_K \right]^{G^0} \\ &= \varinjlim_{K \triangleleft G^0} [(\Pi \circ \pi_{K, G^0})_* \mathcal{F}_K]^{G^0} = \Pi_* \mathcal{F}_{G^0} \end{aligned}$$

Maintenant, si $g \in G$, il y a deux flèches

$$\begin{array}{ccc} \Pi_* \mathcal{F}_{G^0} & \equiv (\Pi \circ \pi_{G^0 \cap g^{-1}G^0g, G^0})_* \mathcal{F}_{G^0 \cap g^{-1}G^0g} \xrightarrow{\sim} (\Pi \circ \pi_{G^0 \cap g^{-1}G^0g, G^0})_* g_* \mathcal{F}_{gG^0g^{-1}} & \\ & \searrow \delta_g & \parallel \\ & & (\Pi \circ \pi_{gG^0g^{-1} \cap G^0, G^0})_* \mathcal{F}_{gG^0g^{-1} \cap G^0} \end{array}$$

ainsi que la flèche tautologique

$$\eta_g : \Pi_* \mathcal{F}_{G^0} \hookrightarrow (\Pi \circ \pi_{gG^0g^{-1} \cap G^0, G^0})_* \mathcal{F}_{gG^0g^{-1} \cap G^0}$$

Alors

$$\beta((\mathcal{F}_K)_K) = \bigcap_{\bar{g} \in G/G^0} \ker \left(\Pi_* \mathcal{F}_{G^0} \xrightarrow[\delta_g]{\eta_g} (\Pi \circ \pi_{gG^0g^{-1} \cap G^0, G^0})_* \mathcal{F}_{gG^0g^{-1} \cap G^0} \right)$$

Lemme IV.11.19. *Les deux foncteurs précédents $\widetilde{P}_\bullet/H \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} \mathcal{H}_\bullet^{\text{cart}}$ entre faisceaux de Hecke cartésiens sur la tour et faisceaux sur l'espace des périodes sont adjoints l'un de l'autre: α est l'adjoint à gauche de β .*

Démonstration. Cela résulte facilement de la seconde description du foncteur β . \square

Proposition IV.11.20. *Supposons l'existence d'un domaine analytique compact $W \subset X_{G^0}$ satisfaisant aux hypothèses de la section IV.11.4 et tel que, de plus, $\Pi|_W$ soit un isomorphisme entre W et $\Pi(W)$. Supposons Π surjectif. Alors, α et β induisent des équivalences de catégories entre faisceaux sur l'espace des périodes et faisceaux cartésiens sur la tour.*

Démonstration. Pour $i \in \mathcal{I}$, $i = [g, h]$ et $K \subset G_i \cap G^0$, $K \triangleleft G_i$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & G^0/gKg^{-1} & \\
 & \curvearrowright \pi_{gKg^{-1}, G^0}^{-1} & \\
 & \pi_{gKg^{-1}, G^0}^{-1}(W) \xrightarrow[\sim]{(g,h)} & W_{i,K} \\
 & \swarrow & \searrow \pi_{K, G^0} \\
 W & & X_{G^0} \\
 \Pi \downarrow \simeq & & \downarrow \Pi \\
 \Pi(W) \subset & \xrightarrow{\Pi \circ \pi_{K, G^0}} & P
 \end{array}$$

montre que le morphisme $W_{i,K} \xrightarrow{\Pi \circ \pi_{K, G^0}} h \cdot \Pi(W)$ est un G_i/K -torseur étale. Donc, d'après les lemmes IV.11.14 et IV.11.15, il y a une équivalence

$$\begin{aligned}
 (h \cdot \Pi(W))_\bullet / H_i &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\bullet, i}^{\text{cart}} \\
 \mathcal{G} &\mapsto ((\Pi \circ \pi_{K, G^0}|_{W_{i,K}})^* \mathcal{G})_{K \subset G_i \cap G^0}
 \end{aligned}$$

Étant donné que Π est surjectif, et que, par hypothèse, les itérés sous $G \times H$ de W recouvrent la tour, $P = \cup_{h \in H} h \cdot \Pi(W)$. Dès lors, \widetilde{P}_\bullet/H s'écrit comme un recollé équivariant des topos équivariants lisses $(h \cdot \Pi(W))_\bullet / hH^0h^{-1}$, pour $h \in H/H^0$, comme dans le théorème IV.11.17. Le parallèle entre la description du théorème IV.11.17 de $\mathcal{H}_\bullet^{\text{cart}}$ comme recollement de topos équivariants et celle de \widetilde{P}_\bullet/H permet de conclure. On vérifie également que le foncteur α induit bien l'équivalence décrite. \square

Remarque IV.11.21. Dans la proposition précédente, pour traiter le cas du site étale, il faut remarquer que si $\Pi|_W$ est un isomorphisme, alors, puisque Π est étale, il existe un domaine analytique compact W' contenant W dans son intérieur et tel que $\Pi|_{W'}$ soit un isomorphisme.

IV.11.6 Résolution de Čech de la cohomologie de la tour par la cohomologie des cellules

Dans cette section nous esquissons seulement les arguments, qui sont similaires à ceux de la troisième suite spectrale du théorème IV.9.31 (le lecteur ayant survécu jusqu'à ce point du chapitre IV comblera aisément les trous).

Soit $I \subset \mathcal{I}$ fini. Commençons par modifier la définition des $\mathcal{H}_{\bullet, I}^{\text{cart}}$ afin de rajouter le sous-groupe central $Z \subset G \times H$, qui agit trivialement sur la tour. On demande en plus qu'un élément de la tour $(\mathcal{F}_K)_{K \subset G_I \cap G^0} \in \mathcal{H}_{\bullet, I}^{\text{cart}}$ soit muni d'une action "abstraite" de Z coïncidant avec celle sur $Z \cap G_I \times H_I$. Il y a alors des foncteurs d'induction/restriction, comme dans la section IV.9.9.4,

$$\mathcal{H}_{\text{ét}, I}^{\text{cart}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Ind}_{H_I \times H_I, Z}^{G \times H}} \\ \xleftarrow{\text{Res}_{H_I \times H_I, Z}^{G \times H}} \end{array} \mathcal{H}_{\text{ét}}^{\text{cart}}$$

Le foncteur de restriction est immédiat à définir, celui d'induction un peu plus délicat. Utilisant ce couple de foncteurs adjoints, on montre:

Théorème IV.11.22. *Soit $\mathcal{F} \in \Lambda - \mathcal{H}_{\text{ét}}^{\text{cart}}$ et $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ une résolution injective. Il y a alors un isomorphisme*

$$R\Gamma_c(\mathcal{H}_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \simeq \text{Tot} \bigoplus_{\alpha \in G \times H \setminus \mathcal{I}^{\bullet+1}} c - \text{ind}_{K_\alpha}^{G \times H} \Gamma(\mathcal{H}_{\text{ét}, I_\alpha}, \mathcal{I}_{I_\alpha}^*)$$

où si $\alpha = [(i_1, \dots, i_{p+1})]$, $I_\alpha = \{i_1, \dots, i_{p+1}\}$, $K_\alpha = G_{I_\alpha} \times H_{I_\alpha} \cdot Z$ et $\mathcal{I}_{I_\alpha}^* = \mathcal{I}_{|\mathcal{H}_{\text{ét}, I_\alpha}^*}$.

On remarquera que la cohomologie à support compact dans $\mathcal{H}_{\text{ét}}$ ou $\mathcal{H}_{\text{ét}}^{\text{cart}}$ est la même (remarque IV.11.8).

IV.11.7 Rajout d'une donnée de descente

Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension de degré fini et $\check{F} = \widehat{F^{nr}}$. On note $\sigma \in \text{Aut}(\check{F})$ le Frobenius de $F^{nr}|F$. Plaçons-nous dans le cadre précédent et supposons que notre tour $K \mapsto X_K$ est une tour de \check{F} -espaces analytiques.

Supposons de plus que la tour est munie d'une donnée de descente à F , c'est-à-dire un morphisme entre foncteurs de \mathcal{S} vers la catégorie des \check{F} -espaces analytiques munis d'une action lisse de H

$$\alpha : (X_K)_{K \subset G^0} \longrightarrow (X_K^{(\sigma)})_{K \subset G^0}$$

Cette donnée de descente ne sera pas nécessairement supposée effective. Notons $pr : (X_K^{(\sigma)})_K \longrightarrow (X_K)_K$ la projection de $(X_K)_K \hat{\otimes}_{\check{F}, \sigma} \check{F}$ vers $(X_K)_K$.

On peut alors considérer les faisceaux de Hecke sur la tour, munis d'une donnée de descente, c'est-à-dire pour $\bullet \in \{\text{ét}, \text{qétc}\}$, le topos total du diagramme

de topos

$$\mathcal{H}_\bullet((X_K)_K) \xrightarrow[\text{pro}\alpha]{Id} \mathcal{H}_\bullet((X_K)_K)$$

dont les objets sont les $(\mathcal{F}_K)_K$, munis de morphismes H -équivariants compatibles aux morphismes de la tour $\alpha^* \mathcal{F}_K^{(\sigma)} \rightarrow \mathcal{F}_K$.

Notons alors ${}_\sigma \mathcal{H}_\bullet$ le topos des faisceaux de Hecke, munis d'une donnée de descente et ${}_\sigma \mathcal{H}_\bullet^{\text{cart}}$ le même en remplaçant faisceaux par faisceaux cartésiens.

Si $(\mathcal{F}_K)_K \in {}_\sigma \mathcal{H}_{\text{ét}}$, notons $(\overline{\mathcal{F}}_K)_K$ le faisceau étendu à la tour $(X_K \otimes_{\widehat{F}} \widehat{F})_K$, où l'on voit cette dernière tour comme associée non plus aux groupes G et H , mais à G et $H \times I_F$, où $I_F = \text{Gal}(\widehat{F}|\check{F})$. On a bien $(\overline{\mathcal{F}}_K)_K \in \mathcal{H}_{\text{ét}}((X_K \otimes_{\widehat{F}} \widehat{F})_K)$ (l'action de l'inertie I_F est lisse). Couplé à la donnée de descente, cela définit un foncteur

$$\begin{aligned} \Gamma_c(\mathcal{H}_{\text{ét}} \widehat{\otimes}_{\widehat{F}} \widehat{F}, -) : {}_\sigma \mathcal{H}_{\text{ét}} &\longrightarrow \Lambda[G \times H \times W_F]_\infty \\ (\mathcal{F}_K)_K &\longmapsto \varinjlim_{K \subset G^0} \Gamma_c(X_K \widehat{\otimes}_{\widehat{F}} \widehat{F}, \overline{\mathcal{F}}_K) \end{aligned}$$

et on note

$$R\Gamma_c(\mathcal{H}_{\text{ét}} \widehat{\otimes}_{\widehat{F}} \widehat{F}, -) : {}_\sigma \mathcal{H}_{\text{ét}} \longrightarrow \mathbb{D}^+(\Lambda[G \times H \times W_F]_\infty)$$

le foncteur dérivé associé. Il jouit de toutes les propriétés précédentes, énoncées dans la section IV.11.3 (utiliser toujours le fait qu'un objet injectif d'un topos total associé à un topos fibré est injectif étage par étage).

Plaçons-nous maintenant dans le cadre de la section IV.11.5. Supposons, de plus, que l'espace de périodes P soit muni d'une donnée de descente et que le morphisme des périodes Π soit compatible à cette donnée. On obtient alors une équivalence entre faisceaux de Hecke cartésiens sur la tour et H -faisceaux lisses sur P munis d'une donnée de descente.

Dans les considérations précédentes, on peut également considérer la variante suivante: remplacer ce qu'on a appelé donnée de descente par la notion plus forte qui consiste à demander que le morphisme $\alpha^* \mathcal{F}_K^{(\sigma)} \rightarrow \mathcal{F}_K$ soit un isomorphisme. Tout ce que l'on vient de dire s'adapte à cette situation.

IV.12 Faisceaux de Hecke cartésiens et faisceaux rigides équivariants en niveau infini

IV.12.1 Faisceaux lisses sur une tour

Soient G et H deux groupes profinis et $(\mathfrak{X}_K)_{K \subset G}$ une tour équivariante de H -schémas formels admissibles quasicompacts. Plus précisément, si \mathcal{S} est la catégorie

dont les objets sont les sous-groupes ouverts de G et

$$\forall K, K' \in \mathcal{S}, \quad \text{Hom}_{\mathcal{S}}(K, K') = \{g \in K \backslash G \mid g^{-1}Kg \subset K'\}$$

on suppose que $K \mapsto \mathfrak{X}_K$ définit un foncteur de \mathcal{S} dans la catégorie des schémas formels admissibles quasicompacts munis d'une action continue de H . On suppose, de plus, que pour $K' \subset K$, le morphisme $\mathfrak{X}_{K'} \rightarrow \mathfrak{X}_K$ est affine et si $K' \triangleleft K$, alors $\mathfrak{X}_{K'}^{\text{rig}} \rightarrow \mathfrak{X}_K^{\text{rig}}$ est un K/K' -torseur étale.

Soit $\mathfrak{X}_{\infty} = \varprojlim_K \mathfrak{X}_K$, qui est donc muni d'une action de $G \times H$.

Lemme IV.12.1. *L'action de $G \times H$ sur \mathfrak{X}_{∞} est continue, au sens de la section IV.10.*

Rappelons (théorème IV.6.7) qu'il y a une équivalence de topos

$$(\mathfrak{X}_{\infty})_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_K (\mathfrak{X}_K)_{\text{rig-ét}}^{\sim}$$

Proposition IV.12.2. *Il y a une équivalence de topos de faisceaux équivariants lisses*

$$(\mathfrak{X}_{\infty})_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim}/(G \times H) \simeq \mathfrak{X}_{\text{rig-ét}}^{\sim}/H$$

qui sont équivalents au topos des faisceaux de Hecke quasi-étales cartésiens H -lisses sur la tour $K \mapsto \mathfrak{X}_K^{an}$.

Démonstration. Il s'agit d'une application du théorème IV.8.22. On laisse en effet le lecteur vérifier que, via l'équivalence $(\mathfrak{X}_{\infty})_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{K \triangleleft G} (\mathfrak{X}_K)_{\text{rig-ét}}^{\sim}$, les

faisceaux $G \times H$ -lisses correspondent aux systèmes projectifs de $G \times H$ -faisceaux lisses. \square

IV.12.2 Principaux résultats

Reprenons toutes les notations de la section IV.11. On supposera que $\forall I \subset \mathcal{I}$, la tour d'espaces analytiques $(W_{I,K})_{K \subset G_I \cap G^0}$ est de la forme $(\mathcal{W}_{I,K}^{an})_{K \subset G_I \cap G^0}$, où

$$(\mathcal{W}_{I,K})_{K \subset G_I \cap G^0}$$

est une tour de schémas formels admissibles quasicompacts, munis d'une action lisse de H_I sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\tilde{F}})$, dont les morphismes de transition sont affines.

On supposera de plus que si $I \subset J$, l'inclusion de tours de domaines analytiques $(W_{J,K})_{K \subset G_J \cap G^0} \hookrightarrow (W_{I,K})_{K \subset G_I \cap G^0}$ est donnée par une immersion ouverte

$$(\mathcal{W}_{J,K})_{K \subset G_J \cap G^0} \hookrightarrow (\mathcal{W}_{I,K})_{K \subset G_I \cap G^0}$$

Ces immersions ouvertes se composent naturellement, puisque c'est le cas en fibre générique. Cela permet de définir un schéma formel π -adique sans π -torsion sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\tilde{F}})$

$$\mathfrak{X}_\infty = \bigcup_{z \in \mathcal{I}} \varprojlim_{K \subset G_z \cap G^0} \mathcal{W}_{z,K}$$

obtenu par recollement des limites projectives des tours au-dessus de chaque sommet de l'immeuble, comme dans la chapitre I. Ce schéma formel est muni d'une action cellulaire continue de $G \times H$.

Théorème IV.12.3. *Il y a des équivalences de topos*

$$(\mathfrak{X}_\infty)_{\tilde{\mathcal{E}}\text{-rig-ét}}/(G \times H) \simeq \mathcal{H}_{\text{qétc}}^{\text{cart}} \simeq P_{\text{qétc}}^{\tilde{}}/H$$

entre faisceaux \mathcal{E} -rig-étales $G \times H$ -équivariants lisses sur \mathfrak{X}_∞ , systèmes de faisceaux de Hecke cartésiens quasi-étales H -lisses sur la tour et faisceaux quasi-étales H -équivariants lisses sur l'espace des périodes.

Démonstration. Il suffit d'empiler la proposition IV.12.2 avec le théorème IV.11.17 et la proposition IV.11.20. \square

Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion. Si $x : \mathrm{Spf}(V) \rightarrow \mathfrak{X}$ est un point rigide de \mathfrak{X} (cf. section IV.3.4.4) et $\mathcal{F} \in \tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$, on peut définir la fibre de \mathcal{F} en x , $x^*\mathcal{F}$, qui est un ensemble muni d'une action lisse de $\mathrm{Gal}(\overline{V}[\frac{1}{p}]|V[\frac{1}{p}])$.

On a défini dans la section IV.3.4 les points analytiques d'un schéma formel π -adique sans π -torsion et la notion de spécialisation dans $|\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$.

Définition IV.12.4. Soit \mathfrak{X} un schéma formel π -adique sans π -torsion. Un faisceau $\mathcal{F} \in \tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ sera dit surconvergent si $\forall x : \mathrm{Spf}(V) \rightarrow \mathfrak{X}, \forall y : \mathrm{Spf}(V') \rightarrow \mathfrak{X}$ deux points rigides tels que $x \succ y$, le morphisme de spécialisation

$$y^*\mathcal{F} \rightarrow x^*\mathcal{F}$$

est un isomorphisme.

On peut alors démontrer le théorème suivant.

Théorème IV.12.5. *Dans les équivalences de topos précédentes, le sous-topos des faisceaux étales sur l'espace des périodes correspond aux faisceaux surconvergents de $(\mathfrak{X}_\infty)_{\tilde{\mathcal{E}}\text{-rig-ét}}/(G \times H)$.*

Théorème IV.12.6. *Soit $(\mathcal{F}_K)_K \in \mathcal{H}_{\text{ét}}^{\text{cart}}$ un système de faisceaux de Hecke étales cartésien sur la tour et $R\Gamma_c(\mathcal{H}_{\text{ét}} \hat{\otimes} \hat{F}, (\mathcal{F}_K)_K) \in \mathbb{D}^+(\Lambda[G \times H \times I_F]_\infty)$, son complexe de cohomologie lisse. Soit $\mathcal{G} \in \Lambda - (\mathfrak{X}_\infty)_{\tilde{\mathcal{E}}\text{-rig-ét}}/(G \times H)$, le faisceau équivariant lisse sur \mathfrak{X}_∞ associé à $\nu^*(\mathcal{F}_K)_K \in \mathcal{H}_{\text{qétc}}^{\text{cart}}$. Il y a alors un isomorphisme dans la catégorie dérivée équivariante lisse $\mathbb{D}^+(\Lambda[G \times H \times I_F]_\infty)$*

$$R\Gamma_c(\mathcal{H}_{\text{ét}} \hat{\otimes} \hat{F}, (\mathcal{F}_K)_K) \simeq R\Gamma_!((\mathfrak{X}_\infty \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\tilde{F}})^{\text{rig}}, \mathcal{G})$$

Démonstration. Utiliser les théorèmes IV.12.3, IV.10.8 et IV.11.22. \square

IV.13 Application aux tours de Lubin-Tate et de Drinfeld

IV.13.1 La correspondance de Jacquet-Langlands locale géométrique

Théorème IV.13.1. *Soit $(\mathbb{P}^{n-1})^{\text{tor}} du$ l'espace des périodes de Gross-Hopkins descendu à F , via la donnée de descente de Rapoport-Zink. Il s'agit de l'espace analytique de Berkovich associé à une variété de Severi-Brauer, définie par l'algèbre à division D d'invariant $\frac{1}{n}$ sur F . Soit $\Omega \subset \mathbb{P}_{/F}^{n-1}$ l'espace de Drinfeld sur F . Il y a une équivalence de topos entre D^\times -faisceaux étales sur $(\mathbb{P}^{n-1})^{\text{tor}} du$ dont l'action de D^\times est lisse et $GL_n(F)$ -faisceaux étales sur Ω pour lesquels l'action de $GL_n(F)$ est lisse*

$$JL : ((\mathbb{P}^{n-1})^{\text{tor}} du)_{\text{ét}}^{\sim} / D^\times \xrightarrow{\sim} \Omega_{\text{ét}}^{\sim} / GL_n(F)$$

Il en est de même en remplaçant étale par quasi-étale (i.e., faisceaux sur le site étale de l'espace rigide, plutôt que sur l'espace analytique de Berkovich).

Démonstration. Dans la chapitre III, on a construit un isomorphisme $GL_n(F) \times D^\times$ -équivariant entre schémas formels π -adiques sur $\text{Spf}(\widehat{\mathcal{O}_{F^{nr}}})$

$$\mathfrak{X}'_\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y}'_\infty$$

où \mathfrak{X}'_∞ est un éclaté équivariant du schéma formel \mathfrak{X}_∞ , construit dans le chapitre I et associé à la tour de Lubin-Tate, et \mathcal{Y}'_∞ est un éclaté d'un schéma formel \mathcal{Y}_∞ associé à la tour de Drinfeld. Par invariance du topos \mathcal{E} -rig-étale par éclatements formels admissibles, on a

$$(\mathfrak{X}'_\infty)_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim} / GL_n(F) \times D^\times \simeq (\mathfrak{X}_\infty)_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim} / GL_n(F) \times D^\times$$

et

$$(\mathcal{Y}'_\infty)_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim} / GL_n(F) \times D^\times \simeq (\mathcal{Y}_\infty)_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim} / GL_n(F) \times D^\times$$

D'après le théorème IV.12.3,

$$(\mathfrak{X}_\infty)_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim} / GL_n(F) \times D^\times \simeq (\mathbb{P}^{n-1})_{\text{qétc}}^{\sim} / D^\times$$

et

$$(\mathcal{Y}_\infty)_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}^{\sim} / GL_n(F) \times D^\times \simeq (\Omega \hat{\otimes} \widehat{F^{nr}})_{\text{qétc}}^{\sim} / GL_n(F)$$

D'où le résultat sur $\widehat{F^{nr}}$ et le site quasi-étale. Le cas du site étale se déduit en remplaçant le topos \mathcal{E} -rig-étale par le topos surconvergent. La descente de $\widehat{F^{nr}}$ à F ne pose pas de problème (imposer une condition de continuité sur la donnée de descente du faisceau), une fois que l'on a vérifié que l'isomorphisme $\mathfrak{X}'_\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y}'_\infty$ est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink. \square

IV.13.2 Comparaison des complexes de cohomologie des deux tours

Théorème IV.13.2. Soit $(\mathcal{M}_K^{\mathcal{L}\mathcal{T}})_{K \subset GL_n(\mathcal{O}_F)}$ la tour de Lubin-Tate, au sens de Rapoport-Zink (une union disjointe indexée par \mathbb{Z} de la tour de Lubin-Tate usuelle), formée d'espaces analytiques sur \check{F} , munie d'une action "horizontale" de D^\times , d'une action "verticale" de $GL_n(F)$ par correspondances de Hecke et d'une donnée de descente à F . Soit

$$\check{\pi}_K^{\mathcal{L}\mathcal{T}} : \mathcal{M}_K^{\mathcal{L}\mathcal{T}} \longrightarrow \mathbb{P}_{\check{F}}^{n-1}$$

l'application des périodes de Gross-Hopkins. À un faisceau \mathcal{F} de

$$((\mathbb{P}^{n-1})^{\text{tor}})_{\check{\text{ét}}}^{\sim} / D^\times$$

est associé un système de faisceaux "de Hecke" $((\check{\pi}_K^{\mathcal{L}\mathcal{T}})^* \mathcal{F})_{K \subset GL_n(\mathcal{O}_F)}$ sur la tour de Lubin-Tate, muni de correspondances de Hecke, d'une action de D^\times et d'une donnée de descente à F compatible à celle sur la tour (ces trois actions commutent). Soit le foncteur

$$\begin{aligned} \Gamma_c(\mathcal{L}\mathcal{T}, -) : \Lambda - ((\mathbb{P}^{n-1})^{\text{tor}})_{\check{\text{ét}}}^{\sim} / D^\times &\longrightarrow \Lambda[GL_n(F) \times D^\times \times W_F] - \text{Mod-lisses} \\ \mathcal{F} &\longmapsto \varinjlim_{K \subset GL_n(\mathcal{O}_F)} \Gamma_c(\mathcal{M}_K^{\mathcal{L}\mathcal{T}} \hat{\otimes}_{\check{F}} \check{\pi}_K^{\mathcal{L}\mathcal{T}*} \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Soit $(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r})_{K \subset \mathcal{O}_D^\times}$ la tour de Drinfeld, au sens de Rapoport-Zink (une union disjointe indexée par \mathbb{Z} de la tour usuelle de revêtements de l'espace Ω de Drinfeld), formée d'espaces analytiques sur \check{F} , munie d'une action "horizontale" de $GL_n(F)$, "verticale" de D^\times et d'une donnée de descente à \check{F} . Soit

$$\check{\pi}_K^{\mathcal{D}r} : \mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r} \longrightarrow \Omega_{\check{F}}$$

l'application des périodes sur la tour de Drinfeld.

À un faisceau \mathcal{G} de $\Omega_{\check{\text{ét}}-GL_n(F)-\infty}^{\sim}$ est associé un système de faisceaux de Hecke muni d'une donnée de descente à F sur la tour de Drinfeld, $(\check{\pi}_K^{\mathcal{D}r*} \mathcal{G})_{K \subset \mathcal{O}_D^\times}$. Soit le foncteur

$$\begin{aligned} \Gamma_c(\mathcal{D}r, -) : \Lambda - \Omega_{\check{\text{ét}}-GL_n(F)}^{\sim} &\longrightarrow \Lambda[GL_n(F) \times D^\times \times W_F] - \text{Mod-lisses} \\ \mathcal{G} &\longmapsto \varinjlim_{K \subset GL_n(\mathcal{O}_F)} \Gamma_c(\mathcal{M}_K^{\mathcal{D}r} \hat{\otimes}_{\check{F}} \check{\pi}_K^{\mathcal{D}r*} \mathcal{G}) \end{aligned}$$

Il y a alors un isomorphisme de foncteurs à valeurs dans $\mathbb{D}^+(\Lambda[GL_n(F) \times D^\times \times W_F]_\infty)$

$$R\Gamma_c(\mathcal{D}r, -) \circ JL \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathcal{L}\mathcal{T}, -)$$

En particulier, si $\underline{\Lambda}$ désigne le faisceau constant, $JL(\underline{\Lambda}) = \underline{\Lambda}$ et donc il y a un isomorphisme entre la cohomologie à support compact à coefficients constants des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld.

Démonstration. Il s'agit d'une application du théorème IV.12.6 et du théorème principal du chapitre III comme dans la démonstration précédente. \square

Bibliographie

- [1] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2.* Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270.
- [2] V. Berkovich. Secret notes on equivariant compactly supported cohomology of analytic spaces. pages 1–5.
- [3] V. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, 1990.
- [4] V. Berkovich. Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78:5–161, 1993.
- [5] V. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. *Invent. Math.*, 115(3):539–571, 1994.
- [6] S. Bosch and W. Lütkebohmert. Formal and rigid geometry. II. Flattening techniques. *Math. Ann.*, 296(3):403–429, 1993.
- [7] S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud. Formal and rigid geometry. III. The relative maximum principle. *Math. Ann.*, 302(1):1–29, 1995.
- [8] S. Bosch and W. Lütkebohmert. Formal and rigid geometry. I. Rigid spaces. *Math. Ann.*, 295(2):291–317, 1993.
- [9] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques. *À paraître à Invent. Math.*
- [10] Jean François Dat. Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 39(1):1–74, 2006.
- [11] R. Elkik. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 6((4)):553–603, 1974.
- [12] L. Fargues. Cohomologie des espaces de modules de groupes p -divisibles et correspondances de langlands locales. In *Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et Correspondances de Langlands locales*, *Astérisque* 291, 2004.
- [13] K. Fujiwara. Theory of tubular neighborhood in étale topology. *Duke Math. J.*, 80(1):15–57, 1995.

- [14] Roger Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris, 1973. Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252.
- [15] A. Grothendieck and J.-L. Verdier. Conditions de finitude, topos et sites fibrés. application aux questions de passage à la limite. In *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2, exposé VI*, pages iv+418, Berlin, 1972. Springer-Verlag. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270.
- [16] M. Hochster. Prime ideal structure in commutative rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 142:43–60, 1969.
- [17] M.J. Hopkins and B.H. Gross. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [18] R. Huber. A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties. *Math. Z.*, 217(no. 4):513–551, 1994.
- [19] R. Huber. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*. Aspects of Mathematics. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1996.
- [20] R. Huber and M. Knebusch. On valuation spectra, 1994.
- [21] L. Illusie. *Complexe cotangent et déformations. I*, volume 239 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [22] L. Illusie. *Complexe cotangent et déformations. II*, volume 283 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [23] M. Rapoport, Th. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*. Number 141 in *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [24] M. Raynaud and L. Gruson. Critères de platitude et de projectivité. Techniques de platisation d'un module. *Invent. Math.*, 13:1–89, 1971.

Index

- $\Gamma_c(X/G, -)$, sections à support compact G -équivariantes lisses, 287
 $(-)^{\infty}$, foncteur de lissification, 263
 D , algèbre à division d'invariant $\frac{1}{n}$ sur F , 12, 138
 F , corps de base, 10, 85, 138
 $F/\mathcal{O}, F/\mathcal{O}_F$, 87
 H , groupe de Lubin-Tate universel, 11
 $H_{\underline{x}}$, spécialisé du groupe de Lubin-Tate universel au point \underline{x} , 14
 L , 85
 $W_{\mathcal{O}}$, vecteurs de Witt ramifiés, 16
 X , matrice des périodes cristallines, 104
 $X_{\text{ét}}$, site étale de l'espace de Berkovich X , 281
 $X_{\text{qét}}$, site quasi-étale de l'espace de Berkovich X , 281
 $X_{\text{qétc}}$, site quasi-étale compact de l'espace de Berkovich X , 281
 $\mathbb{D}_{a \rightarrow a', k}$, 153
 Δ , 98, 138
 \mathbb{G} , \mathcal{O}_D -module formel spécial sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, 85, 138
 $\Lambda[G] - \text{Mod}_{\infty}$, G -modules lisses à coefficients dans Λ , 287
 \mathcal{M} , espace rigide de Rapoport-Zink, 11
 $\mathcal{M}^{\text{Dr}}(K)/\sim$, points à valeurs dans K de l'espace de Drinfeld "à isogénie près", 88
 $\mathcal{M}_{\infty}^{\text{LT}}(K)$, point à valeurs dans K de la tour de Lubin-Tate en niveau infini, 87
 $\mathcal{M}_{\Lambda, K}$, espace de Rapoport-Zink/Lubin-Tate en niveau K rel. à Λ , 31
 $\widehat{\mathcal{M}}$, schéma formel de Rapoport-Zink, 11
 Ω , 90
 Π , uniformisante de D , 12, 85, 138
 \mathfrak{X} , schéma formel de Lubin-Tate, 11
 \mathfrak{X}_{∞} , schéma formel cellulaire de Lubin-Tate en niveau infini, 46
 $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$, site des morphismes de type (\mathcal{E}) vers \mathfrak{X} , 253
 $\mathfrak{X}_{\text{rig-ét}}$, site rigide-étale classique de $\mathfrak{X}^{\text{rig}}$, 254
 α_G , application de Hodge-Tate de G , 79
 $\alpha_{G^{\vee}[\pi^k], j}$, 174
 $\alpha_{G^{\vee}}$, application de Hodge-Tate de G^{\vee} , 172
 $\alpha_{H^{\vee}}$, application de Hodge-Tate de H^{\vee} , 144
 \check{F} , 86
 \check{F} , complété de l'extension maximale non-ramifiée de F , 10
 $\check{\mathcal{O}}$, anneau des entiers de \check{F} , 10, 138
 $\check{\pi}_1$, application des périodes de Gross-Hopkins, 15
 \mathcal{O} -extension vectorielle universelle, 56
 \mathcal{O} -module π -divisible, 56
 $\mathcal{O}, \mathcal{O}_F$, anneau des entiers de F , 10, 85, 138

- \mathcal{O}_D , ordre maximal de D , 12, 138
 η , structure de niveau, 32, 87, 88, 143
 $\mathbb{D}(-)$, module de Dieudonné de $-$, 16, 85
 $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(-)$, module de Dieudonné relatif à \mathcal{O} de $-$, 69, 85
 $\mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$, modèle entier de la cellule $\mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$, 41
 $\mathbb{D}_{\sigma, \infty}$, cellule indexée par le simplexe σ en niveau infini, 45
 $\mathbb{D}_{a, \infty}$, cellule indexée par le sommet a en niveau infini, 44
 $\mathbb{D}_{a, \infty}$, cellule indexée par le sommet a en niveau infini, 142
 $\mathbb{D}_{a \rightarrow a', K}$, modèle entier de $\mathcal{D}_{a \rightarrow a', K}$, 43
 \mathbb{H} , groupe de Lubin-Tate sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, 11, 85, 138
 \mathcal{D} , domaine fondamentale de Gross-Hopkins, 21
 $\mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$, cellule indexée par $[\Lambda, M] \in \mathcal{I}$ en niveau K , 34
 $\mathcal{D}_{a \rightarrow a', K}$, cellule indexée par l'arête $a \rightarrow a'$ en niveau K , 37
 \mathcal{I} , immeuble paramétrant la décomposition cellulaire de la tour de Lubin-Tate, 30
 \mathcal{W} , 177
 \mathcal{Y}_K , modèle entier de la tour de Drinfeld en niveau K , 141
 \mathcal{Y}_{∞} , modèle entier de la tour de Drinfeld en niveau infini, 142
 \mathcal{Y}_k , 172
 $\partial_i \mathcal{D}$, strate indexée par i du bord de \mathcal{D} , 22
 $\partial_i \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$, strate indexée par l'entier i du bord de la cellule $\mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$, 35
 $\partial_i \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$, modèle entier de $\partial_i \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$, 41
 $\partial_{i, E} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$, modèle entier de $\partial_{i, E} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$, 42
 $\partial_{i, E} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$ composante de $\partial_i \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$ où $\eta(E)$ est le sous-groupe canonique, 36
 ρ , déformation, 11, 87, 88
 $|\mathfrak{X}^{\text{rig}}|$, espace de Zariski-Riemann de \mathfrak{X} , 233
 $\widetilde{X}_{\text{ét}}/G$, topos des faisceaux G -équivariants lisses sur $X_{\text{ét}}$, 282
 $\widetilde{X}_{\text{qétc}}/G$, topos des faisceaux G -équivariants lisses sur $X_{\text{qétc}}$, 282
 $\widetilde{\mathcal{C}}/G$, G -faisceaux lisses, 261
 $\widetilde{\mathcal{C}}/G^{\text{disc}}$, G -faisceaux, 261
 \mathbb{D}_{∞} , cellule éclatée en niveau infini, 152
 $\widetilde{\mathbb{D}}_{a \rightarrow a', k}$, 153
 $\widetilde{\mathcal{Y}}_{\infty}$, premier éclatement de \mathcal{Y}_{∞} , 173
 $\widetilde{\mathcal{Y}}_k$, 173
 $\widetilde{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$, 177
 $\widetilde{\mathbb{P}}$, 181
 $\widetilde{\mathcal{Y}}_{\infty}$, 179
Éclatements formels admissibles, 217
 $\mathbb{D}^+(\Lambda[G]_{\infty})$, catégorie dérivée de $\Lambda[G] - \text{Mod}_{\infty}$, 287
 $\mathcal{M}_{\infty}^{\text{Dr}}(K)$, points à valeurs dans K de la tour de Drinfeld en niveau infini, 88
 $\mathcal{M}^{\text{LT}}(K)/\sim$, point à valeurs dans K de l'espace de L.T. "à isogénie près", 87
 $\widetilde{\mathfrak{X}}_{\infty}$, premier éclatement de \mathfrak{X}_{∞} , 156
 $\widetilde{X}_{\text{ét}}/G^{\text{disc}}$, G -faisceaux étales, 282
Adhérence "schématique" de la fibre générique, 215
Faisceau équivariant lisse, 260
Morphisme de schémas formels étales, 249
affines, 213
de type (\mathcal{E}) , 249

- fini localement libre, 239
- fini localement libre rig-étale, 241
- finis, 214
- localement topologiquement de
présentation finie, 213
- localement topologiquement de
type fini, 212
- topologiquement plat, 214
- Ouvert admissible, 221
- Schéma formel
 - π -adique, 212
 - sans π -torsion, 212
- Topologie admissible, 221
- Transformée stricte, 219

Deuxième partie

**L'isomorphisme des deux tours
Une autre approche en égales
caractéristiques**

par

Alain Genestier et Vincent Lafforgue

Introduction

La véritable introduction “mathématique” apparaîtra plus tard (I.5) lorsque nous aurons fixé les notations et effectué quelques rappels. Pour le moment, nous nous contenterons de donner un bref aperçu de notre plan.

Dans le premier chapitre, après quelques préparatifs, nous énonçons le théorème principal de l'article. Le paragraphe I.5 que nous consacrons à cet énoncé (et en particulier, l'analyse critique de la conjecture I.5.1) a été fortement influencé par l'exposé d'introduction de Laurent Fargues, pour le groupe de travail à l'IHES sur l'isomorphisme de Faltings.

Le deuxième chapitre est essentiellement composée de rappels. Nous y résumons une partie de [G], notamment une équivalence de catégories due à Drinfeld (le “module de coordonnées”, voir [G, ch. I]) qui nous permettra de ramener la construction de l'isomorphisme des deux tours à de l'algèbre linéaire, ainsi que les résultats explicites sur la tour de Drinfeld des chapitres II et IV de [G]. Utilisant un théorème de Drinfeld [D1], nous y développons aussi des résultats explicites analogues pour la tour de Lubin-Tate.

Dans le troisième chapitre, nous introduisons un recouvrement de la tour de Lubin-Tate indexé par l'ensemble des simplexes d'un immeuble de Bruhat-Tits. En fait, un recouvrement de la tour de Drinfeld de même ensemble d'indices (dont nous rappelons la définition dans le deuxième chapitre) apparaît déjà dans [BC] et [G]. Ce chapitre recoupe l'article [Far2], qui généralise considérablement son résultat principal III.1.4 et traite aussi du cas d'inégales caractéristiques.

Dans le quatrième chapitre, fixant un simplexe maximal de l'immeuble de Bruhat-Tits, nous ramenons la construction de l'isomorphisme des deux tours à celle d'un isomorphisme des ouverts de ces deux tours associés au simplexe fixé – ces ouverts seront donc considérés comme des “domaines fondamentaux” et ce chapitre est consacré à l'étude des recollements.

Dans le cinquième chapitre, qui est en fait le cœur de ce travail, nous construisons finalement l'isomorphisme des domaines fondamentaux.

Chapitre I

Rappels sur les deux tours et énoncé du théorème

I.1 Notations

Soit \mathcal{O} un anneau de valuation discrète localement compact d'égalité caractéristiques $p > 0$. On identifie son corps résiduel à \mathbb{F}_q (où $q = p^r$) et on note K son corps des fractions. On note v la valuation sur K . On fixe une uniformisante π de \mathcal{O} , ce qui induit des identifications $\mathcal{O} \simeq \mathbb{F}_q[[\pi]]$, $K \simeq \mathbb{F}_q((\pi))$.

On fixe un entier $d \geq 1$ et on note D l'unique K -algèbre à division centrale simple (à isomorphisme non-unique près) d'invariant $1/d$ et \mathcal{O}_D l'ordre maximal de D . Si l'on note K_d l'extension non-ramifiée de degré d de K , \mathcal{O}_d son anneau d'entiers et $\tau \in \text{Gal}(K_d/K)$ l'automorphisme induisant $(\lambda \mapsto \lambda^q)$ sur le corps résiduel, les algèbres D et \mathcal{O}_D s'écrivent simplement comme des algèbres de polynômes non-commutatifs $K_d[\Pi]$ (resp. $\mathcal{O}_d[\Pi]$) en une indéterminée Π vérifiant les relations $\Pi^d = \pi$ et $\Pi a = \tau(a)\Pi$, $\forall a \in K_d$.

On note $\mathcal{B} \subset M_d(\mathcal{O})$ l'ordre d'Iwahori des matrices triangulaires supérieures modulo π et

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \pi & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B},$$

de sorte que l'on a

$$\mathcal{B} = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diag}(\lambda_{i,0}, \dots, \lambda_{i,d-1}) P_\pi^i, \lambda_{i,j} \in \mathbb{F}_q \right\} = \text{diag}(\mathbb{F}_q^d)[[P_\pi]].$$

On appellera immeuble étendu de $\text{GL}_d(K)$ le produit de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\text{PGL}_d(K)$ par \mathbb{Z} . Cette terminologie n'est pas standard car l'im-

meuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{GL}_d(K)$ est plutôt le produit de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$ par \mathbb{R} ! On munira cet immeuble étendu de l'action de $\mathrm{GL}_d(K)$ produit de l'action standard sur l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$ et de l'action $(\gamma, n) \in \mathrm{GL}_d(K) \times \mathbb{Z} \mapsto n - v(\det \gamma)$ sur \mathbb{Z} .

On note $\widetilde{K} \supset K_d$ le complété de l'extension maximale non-ramifiée de K , $\widetilde{\mathcal{O}}$ son anneau d'entiers et on note encore τ l'automorphisme de Frobenius de \widetilde{K} .

On note $\mathrm{Nilp} \mathcal{O}$ (resp. $\mathrm{Nilp} \widetilde{\mathcal{O}}$) la catégorie des \mathcal{O} -schémas (resp. $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schémas) sur lesquels l'image de π est localement (pour la topologie de Zariski) nilpotente. Les \mathcal{O} -schémas formels (resp. $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schémas formels) seront considérés comme des ind-objets de $\mathrm{Nilp} \mathcal{O}$ (resp. $\mathrm{Nilp} \widetilde{\mathcal{O}}$). Lorsque S est un schéma (ou un schéma formel), on commettra souvent l'abus de notation consistant à écrire $s \in \mathcal{O}_S$ pour signifier que s est une section globale de \mathcal{O}_S . Pour $S \in \mathrm{Nilp} \mathcal{O}$, on note $S_0 = V(\pi)$ le sous-schéma fermé de S le long duquel π s'annule et $\mathrm{Fr}_{\mathcal{O}_S}$ le morphisme d'élévation à la puissance q -ième. Pour $S \in \mathrm{Nilp} \widetilde{\mathcal{O}}$, on note $S[\tau]$ le $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma de morphisme structural, le composé $S \rightarrow \mathrm{Spec} \widetilde{\mathcal{O}} \xrightarrow{\tau} \mathrm{Spec} \widetilde{\mathcal{O}}$. Enfin, on note encore $\tau : \widehat{\mathbb{G}}_{a,S} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}_{a,S}$ l'isogénie de Frobenius ($x \mapsto x^q$) du groupe formel $\widehat{\mathbb{G}}_{a,S}$.

I.2 \mathcal{O} et \mathcal{O}_D -modules formels

On rappelle maintenant quelques définitions.

Définition I.2.1. Soit $S \in \mathrm{Nilp} \mathcal{O}$.

- 1) Un \mathcal{O} -module formel X sur S est un groupe formel lisse sur S muni d'une action de \mathcal{O} telle que l'action tangente de \mathcal{O} sur $\mathrm{Lie} X$ coïncide avec celle provenant des structures de \mathcal{O} -algèbre de \mathcal{O}_S et de \mathcal{O}_S -module de $\mathrm{Lie} X$; sa dimension est celle du groupe formel sous-jacent.
- 2) Un \mathcal{O} -module formel est dit π -divisible (ou de hauteur finie) lorsque l'endomorphisme $X(\pi)$ est une isogénie. Sa hauteur (normalisée) est $\mathrm{ht} X(\pi)/r$, où ht désigne la hauteur usuelle (c'est-à-dire, non-normalisée); cette hauteur normalisée est un entier.
- 3) Lorsque X et Y sont deux \mathcal{O} -modules formels, une quasi-isogénie $\rho : X \dashrightarrow Y$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, Y) \otimes_{\mathcal{O}} K$ ayant un inverse dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(Y, X) \otimes_{\mathcal{O}} K$. Le composé $\rho \circ X(\pi^N)$ est alors une isogénie pour N assez grand; la hauteur (normalisée) de ρ est $(\mathrm{ht}(\rho \circ X(\pi^N)) - \mathrm{ht} X(\pi^N))/r$ ($N \gg 0$) – cette hauteur normalisée est un entier.

Dans la suite on appellera simplement hauteurs les hauteurs normalisées. De même, la notation ht désignera la hauteur normalisée.

Définition I.2.2. Soit $S \in \mathrm{Nilp} \mathcal{O}$.

- 1) Un \mathcal{O}_D -module formel est un \mathcal{O} -module formel muni d'une action \mathcal{O} -linéaire de \mathcal{O}_D .

- 2) Un \mathcal{O}_D -module formel X est dit spécial lorsque l'action tangente de \mathcal{O}_d sur $\text{Lie}X$ fait de $\text{Lie}X$ un $\mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_S$ -module inversible.

On va maintenant donner deux exemples de \mathcal{O} (et même \mathcal{O}_D)-modules formels qui serviront respectivement de points-base dans la définition des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld. Ces deux \mathcal{O} -modules formels seront définis sur le corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_q$ de la \mathcal{O} -algèbre $\widetilde{\mathcal{O}}$.

La proposition suivante est due à Lubin et Tate [LT].

Proposition I.2.3. *Les \mathcal{O} -modules formels \mathbb{X} de dimension 1 et hauteur d sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ sont tous isomorphes. La \mathcal{O} -algèbre $\text{End}_{\mathcal{O}}\mathbb{X}$ des endomorphismes d'un tel \mathcal{O} -module formel \mathbb{X} est isomorphe à \mathcal{O}_D .*

Plutôt que de répéter la démonstration de [LT], on se contentera de dire qu'en égaies caractéristiques un tel \mathbb{X} est défini par

$$\mathbb{X} = \widehat{\mathbb{G}}_{a, \overline{\mathbb{F}}_q} \text{ en tant que groupe formel et } \mathbb{X}(\pi) = \tau^d$$

et que l'action de \mathcal{O}_D sur \mathbb{X} est définie par

$$\mathbb{X}(\lambda) = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}) \text{ et } \mathbb{X}(\Pi) = \tau.$$

Le \mathcal{O}_D -module formel

$$\mathbb{Y} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathbb{X}(\Pi^i \bullet \Pi^{-i})$$

(où $\mathbb{X}(\Pi^i \bullet \Pi^{-i})$ désigne le \mathcal{O}_D module formel obtenu en tordant l'action de \mathcal{O}_D sur \mathbb{X} par l'automorphisme $\Pi^i \bullet \Pi^{-i}$ de \mathcal{O}_D) est spécial. La proposition suivante est due à Drinfeld [D2].

Proposition I.2.4. *Les \mathcal{O}_D -modules formels spéciaux de hauteur d^2 sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ sont tous isogènes à \mathbb{Y} . La \mathcal{O} -algèbre $\text{End}_{\mathcal{O}_D}\mathbb{Y}$ des endomorphismes de \mathbb{Y} s'identifie à l'ordre d'Iwahori ${}^t\mathcal{B}$ des matrices triangulaires inférieures modulo π .*

Là encore, au lieu de répéter la démonstration de [D2], on se contentera de dire que l'isogénie $r_{\mathcal{O}^d} = \text{diag}(1, \tau, \dots, \tau^{d-1}) : \mathbb{X}^d \rightarrow \mathbb{Y}$ identifie $\text{End}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{Y}) \otimes_{\mathcal{O}} K$ à $\text{End}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{X}^d) \otimes_{\mathcal{O}} K = M_d(K)$ et que, pour cette identification, $\text{End}_{\mathcal{O}_D}\mathbb{Y} \subset M_d(K)$ est l'ordre des matrices entières triangulaires inférieures modulo π .

I.3 Tour de Lubin-Tate

On considère le foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$ qui à $S \in \text{Nilp } \widetilde{\mathcal{O}}$ associe l'ensemble des classes d'isomorphie de couples (X, ρ) , où

- X est un \mathcal{O} -module formel sur S de dimension 1 et hauteur d
- $\rho : \mathbb{X}_{S_0} \dashrightarrow X_{S_0}$ est une quasi-isogénie

et à un morphisme $S' \rightarrow S$ associe le morphisme de changement de base évident.

Le théorème suivant est dû à Lubin et Tate [LT] – voir aussi Rapoport-Zink [RZ] pour une démonstration dans un cadre beaucoup plus général, englobant en fait ce paragraphe et le suivant consacré à la tour de Drinfeld.

Théorème I.3.1. *Le foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$ est (ind)-représentable par un $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma formel.*

On donnera dans le troisième chapitre (théorèmes de représentabilité explicites) un énoncé beaucoup plus précis.

Définition I.3.2. Soit X un \mathcal{O} -module formel de dimension 1. Une structure de niveau à la Drinfeld [D1] d'échelon π^n sur X est un morphisme de \mathcal{O} -modules

$$\sigma : (\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^d \rightarrow X$$

dont l'image coïncide (en tant que diviseur) avec le sous-groupe $X[\pi^n]$ des points de π^n -torsion.

L'ensemble des classes d'isomorphie de triplets (X, ρ, σ) , où $(X, \rho) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}}(S)$ et σ est une structure de niveau à la Drinfeld d'échelon π^n sur X , définit un foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n}$, qui est (ind-) représenté par un $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma formel fini et plat au-dessus de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$.

La tour $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n})_n$ est munie d'une action (à gauche) du groupe $\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$ (cf. [D1], [C] et [RZ]) dont on va maintenant rappeler la définition.

Soient $\gamma \in \mathrm{GL}_d(K)$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\pi^N \gamma M_d(\mathcal{O}) \gamma^{-1} \subset M_d(\mathcal{O})$. L'élément γ induit un morphisme $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n+N} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n}$ de la manière suivante. Soient $m \in \mathbb{Z}$ le plus petit entier tel que $\pi^m \gamma \in M_d(\mathcal{O})$ et $\gamma' = \pi^m \gamma$. Grâce au théorème des diviseurs élémentaires on voit aisément que $\pi^N \mathcal{O}^d \subset \gamma' \mathcal{O}^d \subset \mathcal{O}^d$. Soient $H = \gamma'^{-1} \mathcal{O}^d / \mathcal{O}^d \subset \pi^{-(n+N)} \mathcal{O}^d / \mathcal{O}^d$ et $X' = X / \sigma(H)$ (comme pour les structures de niveau à la Drinfeld, cette image $\sigma(H)$ doit être considérée comme un diviseur). Le morphisme composé $\pi^{-(n+N)} \mathcal{O}^d / \mathcal{O}^d \rightarrow X \rightarrow X'$ se factorise à travers $\gamma' : \pi^{-(n+N)} \mathcal{O}^d / \mathcal{O}^d \rightarrow \gamma' \pi^{-(n+N)} \mathcal{O}^d / \mathcal{O}^d$ et la structure de niveau σ induit donc un morphisme $\sigma' = \pi^{-n} \mathcal{O}^d / \mathcal{O}^d \subset \gamma' \pi^{-(n+N)} \mathcal{O}^d / \mathcal{O}^d \rightarrow X'$; il résulte de [D1, prop. 4.4] que ce morphisme σ' est une structure de niveau à la Drinfeld d'échelon π^n sur X' . On obtient finalement un triplet $(X', \rho', \sigma') \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n}(S)$ en prenant pour ρ' la quasi-isogénie composée $\mathbb{X}_{S_0} \xrightarrow{\pi^{-m}} \mathbb{X}_{S_0} \xrightarrow{\rho} X_{S_0} \rightarrow X'_{S_0}$.

Soit $\delta \in D^\times$. L'élément δ induit un morphisme $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n}$ associant à un triplet $(X, \rho, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n}(S)$ le triplet $(X' = X, \rho', \sigma' = \sigma)$, où ρ' est la quasi-isogénie composée $\mathbb{X}_{S_0} \xrightarrow{\delta^{-1}} \mathbb{X}_{S_0} \xrightarrow{\rho} X_{S_0}$.

On notera que les groupes $\mathrm{GL}_d(K)$ et D^\times ont deux actions de nature très différente: le groupe $\mathrm{GL}_d(K)$ agit par "correspondances de Hecke" sur les structures de niveau alors que le groupe D^\times agit sur la quasi-isogénie.

Le sous-groupe $K^\times \subset \mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$ (plongé diagonalement) agit trivialement et l'action qu'on vient de définir se factorise donc en une action de $(\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times)/K^\times$.

Enfin, la tour $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n})_n$ est munie d'une donnée de descente à la Weil (au sens de Rapoport-Zink [RZ, 3.44]), qui est l'endomorphisme τ -semi-linéaire associant à (X, ρ, σ) le triplet $(X, \rho \circ \tau^{-1}, \sigma)$ sur $S[\tau]$, où $\rho \circ \tau^{-1}$ est la quasi-isogénie composée $\mathbb{X}_{S_0[\tau]} = \mathbb{X} \times_{(\mathrm{Spec} \overline{\mathbb{F}}_q, \tau)} S_0 \xrightarrow{\tau^{-1}} \mathbb{X}_{S_0} \xrightarrow{-\rho} X_{S_0}$. Cette donnée de descente est effective et le $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma formel $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$ provient donc, par changement de base, d'un \mathcal{O} -schéma formel $\mathcal{M}_{\mathcal{LT},n}$ – ce \mathcal{O} -schéma formel $\mathcal{M}_{\mathcal{LT},n}$ s'identifie d'ailleurs à la partie ouverte et fermée de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$ sur laquelle la hauteur de la quasi-isogénie ρ est nulle.

L'action de $\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$ sur la tour $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n})_n$ commute à cette donnée de descente et descend donc en une action sur la tour $(\mathcal{M}_{\mathcal{LT},n})_n$.

En principe, on appellera “tour de Lubin-Tate” la tour $(\mathcal{M}_{\mathcal{LT},n})_n$. Il pourra cependant arriver qu'on appelle ainsi la tour $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n})_n$ – afin de ne pas créer de confusions, on précisera à chaque fois laquelle des deux versions on utilise.

I.4 Tour de Drinfeld

On considère le foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ qui à $S \in \mathrm{Nilp} \widetilde{\mathcal{O}}$ associe l'ensemble des classes d'isomorphie de couples (Y, ρ) , où

- Y est un \mathcal{O}_D -module formel spécial sur S de hauteur d^2
- $\rho : \mathbb{Y}_{S_0} \dashrightarrow Y_{S_0}$ est une quasi-isogénie compatible à l'action de \mathcal{O}_D

et à un morphisme $S' \rightarrow S$ associe le morphisme de changement de base évident.

Le théorème suivant est dû à Drinfeld [D2] – voir aussi Rapoport-Zink [RZ], ainsi que [G], pour d'autres démonstrations (celle de [G] ne vaut – hélas! – qu'en égales caractéristiques).

Théorème I.4.1. *Le foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ est (ind)-représentable par un $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma formel.*

On donnera dans le troisième chapitre (théorèmes de représentabilité explicites) un énoncé beaucoup plus précis qui est une reformulation du résultat principal de [G, ch. II].

On considère maintenant la fibre générique au sens de Raynaud $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}^{\mathrm{rig}}$ (voir [B] et [RZ, prop. 5.3]) de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$. La fibre générique au sens de Raynaud $Y[\pi^n]^{\mathrm{rig}}$ est un schéma en groupes (et même en \mathcal{O}_D -modules) fini et étale au-dessus de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}r}$ qui est localement (pour la topologie étale) isomorphe à $\pi^{-n} \mathcal{O}_D / \mathcal{O}_D$. Les structures

de niveau d'échelon $\pi^n: \pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} Y[\pi^n]^{\text{rig}}$ définissent alors un revêtement fini étale galoisien $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}^{\text{rig}}$, de groupe de Galois $(\mathcal{O}_D/\pi^n\mathcal{O}_D)^\times$.

On munit la tour $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}})_n$ de l'action à gauche suivante de $\text{GL}_d(K) \times D^\times$. A un triplet $(Y, \rho, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}}(S)$ (où S est une \widetilde{K} -variété rigide analytique, (Y, ρ) un point de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ défini sur un modèle entier convenable S^{ent} de S et $\sigma: \pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} Y[\pi^n]^{\text{rig}}$ est une structure de niveau d'échelon π^n sur Y) et à l'élément $(\gamma, \delta) \in \text{GL}_d(K) \times D^\times$, elle associe le triplet

$$Y' = Y(\Pi^{-m} \bullet \Pi^m)$$

$$\rho' = (\mathbb{Y}_{S_0^{\text{ent}}} \xrightarrow{t\gamma_{S_0^{\text{ent}}}} \mathbb{Y}_{S_0^{\text{ent}}} \xrightarrow{\rho} Y_{S_0^{\text{ent}}} \xrightarrow{Y_{S_0^{\text{ent}}}(\Pi^{-m})} Y'_{S_0^{\text{ent}}})$$

$$\sigma' = (\pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D \xrightarrow{(\bullet \Pi^{-m} \delta)} \pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D \xrightarrow{\sigma} Y[\pi^n]^{\text{rig}} = Y'[\pi^n]^{\text{rig}})$$

où $m \in \mathbb{Z}$ est l'entier tel que $\delta \in \Pi^m\mathcal{O}_D^\times$, $(\bullet \Pi^{-m} \delta)$ est la multiplication à droite par $\Pi^{-m}\delta$ et $Y[\pi^n]^{\text{rig}} = Y'[\pi^n]^{\text{rig}}$ est l'isomorphisme \mathcal{O} -linéaire évident (il *n'est pas* \mathcal{O}_D -linéaire si m n'est pas multiple de d).

On remarque que, par rapport à l'action précédemment définie sur la tour de Lubin-Tate, les groupes $\text{GL}_d(K)$ et D^\times ont inversé leur rôle. Le groupe $\text{GL}_d(K)$ agit sur les quasi-isogénies, tout comme D^\times sur la tour de Lubin-Tate. En notant que lorsque $m \leq 0$ le morphisme $Y \xrightarrow{Y(\Pi^{-m})} Y'$ n'est autre que le morphisme de passage au quotient par $Y[\Pi^{-m}]$, l'action de D^\times est analogue à l'action de $\text{GL}_d(K)$ sur la tour de Lubin-Tate.

Le sous-groupe $K^\times \subset \text{GL}_d(K) \times D^\times$ (plongé diagonalement) agit trivialement et l'action qu'on vient de définir se factorise donc en une action de $(\text{GL}_d(K) \times D^\times)/K^\times$.

Remarque I.4.2. Cette action de $\text{GL}_d(K)$ n'est pas l'action "usuelle" figurant dans [D2], [RZ], [C], [G], ... Elle en diffère en fait¹ par une torsion par l'automorphisme $\gamma \mapsto t\gamma^{-1}$ de $\text{GL}_d(K)$. Comme on le verra, c'est là le prix à payer pour obtenir un isomorphisme $\text{GL}_d(K)$ -équivariant des deux tours.

Enfin, la tour $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}})_n$ est munie d'une donnée de descente à la Weil (au sens de Rapoport-Zink [RZ, 3.44]), qui est l'endomorphisme τ -semi-linéaire associant à (Y, ρ, σ) le triplet $(Y, \rho \circ \tau^{-1}, \sigma)$ sur $S^{\text{ent}}[\tau]$, où $\rho \circ \tau^{-1}$ est la quasi-isogénie composée $\mathbb{Y}_{S_0^{\text{ent}}[\tau]} \xrightarrow{\tau^{-1}} \mathbb{Y}_{S_0^{\text{ent}}} \xrightarrow{\rho} Y_{S_0^{\text{ent}}}$. Cette donnée de descente est effective et la

¹Nous avons adopté ici le point de vue de [RZ] consistant à considérer des quasi-isogénies de hauteur arbitraire et une donnée de descente à la Weil. Le point de vue utilisé dans les autres références, qui consiste à ne considérer que des quasi-isogénies de hauteur nulle, donne directement $\mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}}$. Les formules qui expriment l'action de $\text{GL}_d(K)$ (et de D^\times) y sont, de ce fait, plus compliquées et ne se comparent pas directement à l'action que nous définissons ici.

\widetilde{K} -variété rigide-analytique $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}}$ provient donc, par changement de base, d'une K -variété rigide-analytique $\mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}}$ – qui s'identifie d'ailleurs à la partie ouverte et fermée de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}}$ sur laquelle la hauteur de la quasi-isogénie ρ est nulle.

L'action de $\text{GL}_d(K) \times D^\times$ sur la tour $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}})_n$ commute à cette donnée de descente et descend donc en une action sur la tour $(\mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}})_n$.

En principe, on appellera “tour de Drinfeld” la tour $(\mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}})_n$. Il pourra cependant arriver qu'on appelle ainsi la tour $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}})_n$ – de même que du côté Lubin-Tate, on précisera à chaque fois laquelle des deux versions on utilise.

I.5 Énoncé du théorème

Hopkins et Gross (dans leur prépublication [HG2]; voir aussi Rapoport-Zink [RZ, 5.54] pour une référence plus facile à se procurer) ont formulé la conjecture suivante, que nous énonçons ici volontairement sous une forme un peu vague.

Conjecture I.5.1. *On a une égalité*

$$\varprojlim_n \mathcal{M}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n}^{\text{rig}} = \varprojlim_n \mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}}$$

où “ \varprojlim ” est une sorte de limite projective (en un sens à préciser).

Nous allons maintenant faire une analyse critique de cet énoncé.

1) Il n'existe manifestement pas de couple de morphismes $\text{GL}_d(K) \times D^\times$ -équivariants, mutuellement inverses

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{L}\mathcal{T},m}^{\text{rig}} &\rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}} & (m \gg n) \\ \mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}} &\rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}\mathcal{T},m}^{\text{rig}} & (n \gg m) \end{aligned}$$

des deux systèmes projectifs (pour dissiper tout malentendu, précisons tout de suite que cet énoncé trop naïf n'est pas celui figurant dans les références que nous venons de citer!). En effet, si x_m est un point de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}\mathcal{T},m}^{\text{rig}}$ à valeurs dans une extension L de K et si y_n est un point de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n}$ à valeurs dans L , le stabilisateur de x_m vis-à-vis de l'action de $\text{GL}_d(K)$ est ouvert (pour la topologie π -adique) alors que celui de y_n ne l'est pas; de même, le stabilisateur de x_m vis-à-vis de l'action de D^\times n'est pas ouvert alors que celui de y_n l'est.

Pour répondre à cette objection, une idée simple est d'utiliser une complétion. Le morphisme de comparaison des deux tours enverra donc un point $x = (x_m)_m$ de $(\mathcal{M}_{\mathcal{L}\mathcal{T},m})_m$ sur un point $y = (y_n)_n$ de $(\mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n})_n$, où y_n sera défini à l'aide de séries (dont la convergence requiert cette complétion) dépendant de tous les x_m et non seulement d'un nombre fini comme dans le cas du morphisme de systèmes projectifs envisagé ci-dessus – en particulier, si x est à valeurs dans une extension L

de K (nécessairement infinie), y sera un point à valeurs dans *le complété π -adique* de L .

La “limite projective complétée” d’un système projectif de variétés rigide-analytiques n’a pas de sens dans la théorie “classique” des espaces rigides². Pour donner un sens à cette complétion, Faltings construit des modèles entiers des deux tours. Nous adopterons aussi cette approche, mais nos modèles entiers seront différents de ceux utilisés par Faltings.

2) Cette idée se heurte tout de suite à une nouvelle difficulté. En effet, le modèle entier $\mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n} = (\mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}})^{\sim}$ de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}}$ obtenu par normalisation de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}r}$ dans $\mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}}$ (voir [Far1, appendice A]) est π -adique alors que $\mathcal{M}_{\mathcal{L}T,m}$ ne l’est pas. Pour pouvoir comparer les deux tours, Faltings modifie (“ π -adifie!”) le modèle entier de la tour de Lubin-Tate (voir [Fal1], [Far1]); il modifie aussi un peu le modèle entier de la tour de Drinfeld. Nous π -adifierons aussi la tour de Lubin-Tate en employant une variante de la construction de Faltings. Nous n’aurons en revanche pas besoin de modifier le modèle entier de la tour de Drinfeld obtenu par normalisation.

3) Pour obtenir un modèle entier π -adique d’une K -variété rigide-analytique, il suffit de se donner un recouvrement affinoïde admissible *pur* de cette variété (voir le paragraphe 3.7 de [vdPV]; nous allons rappeler à l’instant en quoi consiste cette condition de pureté). En fait, ni le recouvrement affinoïde de la tour de Lubin-Tate qu’utilise Faltings ni celui que nous utiliserons ne s’obtiennent comme l’image réciproque d’un recouvrement défini à un niveau fini de la tour et il faut donc légèrement modifier cette construction. Pour cela, nous posons la définition suivante.

Définition I.5.2. Un recouvrement affinoïde admissible $(\tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}T,\bullet,i}^{\text{rig}})_{i \in \mathcal{I}}$ de la tour de Lubin-Tate $(\tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}T,n}^{\text{rig}})_n$ consiste en la donnée

- d’un ensemble \mathcal{I} d’indices
- d’un entier $n(i)$, pour tout $i \in \mathcal{I}$
- d’un ouvert affinoïde $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}T,n(i),i}^{\text{rig}} \subset \tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}T,n(i)}^{\text{rig}}$, pour tout $i \in \mathcal{I}$, induisant donc par image réciproque un ouvert affinoïde $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}T,n,i}^{\text{rig}} \subset \tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}T,n}^{\text{rig}}$, pour tout $n \geq n(i)$

tels que pour tout ouvert affinoïde connexe $\mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}T}^{\text{rig}}$, il existe une partie finie $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ telle que l’image réciproque \mathcal{U}_n de \mathcal{U} dans $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}T,n}^{\text{rig}}$ ($n \geq \sup_{i \in \mathcal{I}(\mathcal{U})} n(i)$) soit recouverte par les ouverts $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}T,n,i}^{\text{rig}}$ ($i \in \mathcal{I}(\mathcal{U})$).

²Laurent Fargues (voir [Far1, ch. IV. 1]) a récemment développé un formalisme d’espaces rigides généralisés; nous n’utiliserons pas ce point de vue dans notre texte mais l’isomorphisme de notre théorème principal I.5.3 – tout comme l’isomorphisme original de Faltings – se réinterprète immédiatement en ces termes.

Ce recouvrement est dit pur si pour tout couple (i, j) d'éléments de \mathcal{I} , l'ouvert $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,i}^{\text{rig}} \cap \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,j}^{\text{rig}}$ ($n \geq i, j$) de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,i}^{\text{rig}}$ provient d'un ouvert de Zariski $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,(i,j)}$ du modèle entier affine

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,i} = \text{Spf}(\{f \in H^0(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,i}^{\text{rig}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,i}^{\text{rig}}}); |f(x)| \leq 1, \forall x \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,i}^{\text{rig}}\})$$

de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,i}^{\text{rig}}$.

Soit $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty,i}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,(i,j)}$) la limite projective (complétée, cf. [Far1, IV.1.7]) des schémas formels $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,i}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,(i,j)}$). En recollant les schémas formels π -adiques $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty,i}$ le long de leurs ouverts $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty,(i,j)}$, le recouvrement $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\bullet,i}^{\text{rig}})_i$ induit un schéma formel π -adique $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty,\mathcal{I}}$. Ce schéma formel peut être considéré comme une “ π -adification” de la tour de Lubin-Tate.

Le recouvrement $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\bullet,i}^{\text{rig}})_{i \in \mathcal{I}}$ que nous utiliserons sera précisé dans le troisième chapitre. Nous nous contentons pour l'instant de dire qu'il est muni d'une action de $\text{GL}_d(K) \times D^\times$ et d'une donnée de descente à la Weil (de sorte qu'il en est de même pour $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty,\mathcal{I}}$).

Du “côté Drinfeld”, comme nous l'avons déjà dit, la situation est beaucoup plus simple puisqu'il suffit de considérer le modèle entier $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty} = \varprojlim_n \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}$ de la tour de Drinfeld (bien sûr, cette limite projective est elle aussi complétée, cf. [Far1, IV.1.7]).

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal.

Théorème I.5.3. *Il existe un isomorphisme (explicite) $(\text{GL}_d(K) \times D^\times)/K^\times$ -équivariant*

$$\varphi : \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty,\mathcal{I}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty}$$

qui est de plus compatible aux données de descente de Weil.

Nous allons finalement faire quelques remarques.

Remarque I.5.4.

- 1) En égales caractéristiques, il est encore possible d'utiliser le point de vue de Faltings pour construire un isomorphisme “de Faltings” des deux tours. En effet, la construction de Faltings repose uniquement sur la théorie de Grothendieck-Messing – seule la conservation du degré [Far1, II. 11] utilise la théorie de Fontaine. En égales caractéristiques, [G] (cf. I.3: théorie de déformations) fournit un analogue de la théorie de Grothendieck-Messing qui s'avère suffisant pour transposer la construction de Faltings.

Au niveau des points à valeurs dans un anneau de valuation (comme dans le chapitre II de [Far1]) notre isomorphisme φ coïncide avec celui de

Faltings. De plus, notre résultat a les mêmes conséquences cohomologiques (cf. [Fal1, §6] et [Far1, IV.13]) que le théorème original de Faltings. En fait, l'isomorphisme d'*espaces rigides généralisés* (au sens de [Far1, IV.1])

$$\varphi^{\text{rig}} : \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, \mathcal{I}}^{\text{rig}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r, \infty}^{\text{rig}}$$

induit par notre isomorphisme coïncide vraisemblablement avec celui induit par l'isomorphisme de Faltings.

- 2) Notre recouvrement $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \bullet, i}^{\text{rig}})_{i \in \mathcal{I}}$ aura comme ensemble \mathcal{I} d'indices l'ensemble des simplexes maximaux de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\text{PGL}_d(K)$. L'action de $\text{GL}_d(K) \times D^\times$ sur \mathcal{I} sera le produit de l'action évidente de $\text{GL}_d(K)$ et de l'action triviale de D^\times ; la donnée de descente agira trivialement sur \mathcal{I} (si bien que ce recouvrement proviendra en fait d'un recouvrement $(\mathcal{M}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \bullet, i}^{\text{rig}})_{i \in \mathcal{I}}$ de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \bullet}^{\text{rig}}$).

En particulier, l'ouvert $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n, (P \bullet \mathcal{O}^d)}^{\text{rig}}$ que nous associerons au simplexe maximal $(P^{-i} \mathcal{O}^d)_{i \in \mathbb{Z}}$ sera une sorte de "domaine fondamental" pour l'action de $\text{GL}_d(K)$ sur la tour de Lubin-Tate.

La tour de Drinfeld est, elle aussi, munie d'un recouvrement affinoïde (provenant d'un recouvrement de son rez-de-chaussée³ $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r, 0}^{\text{rig}}$) ayant le même ensemble d'indices (cf. [D1], [BC] ou [G]). Pour construire l'isomorphisme du théorème I.5.3, il suffira donc de construire un isomorphisme $\varphi_{P \bullet \mathcal{O}^d} : \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, P \bullet \mathcal{O}^d} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r, \infty, P \bullet \mathcal{O}^d}$ équivariant sous $\mathcal{B}^\times \times D^\times$ et compatible aux données de descente de Weil puis de vérifier que les translatsés sous l'action de $\text{GL}_d(K)$ de cet isomorphisme se recollent. C'est ce que nous ferons dans les deux derniers chapitre.

³ *first floor*

Chapitre II

Théorèmes de représentabilité explicites

II.1 Modules de coordonnées

La théorie du module de coordonnées, esquissée dans une lettre de Drinfeld à Carayol et développée dans [G], est une sorte d'analogie en égales caractéristiques de la théorie de Dieudonné. Elle ramène l'étude des \mathcal{O} -modules formels à de l'algèbre semi-linéaire – plus précisément, elle fournit une équivalence contravariante entre la catégorie des \mathcal{O} -modules formels et une certaine catégorie de chtoucas locaux. La construction de l'isomorphisme des deux tours dans le chapitre V reposera sur cette théorie. On va donc faire quelques rappels à son sujet (voir [G, ch. I] pour plus de précisions).

Soit X un \mathcal{O} -module formel de hauteur h et de dimension d sur un \mathcal{O} -schéma $S \in \text{Nilp } \mathcal{O}$. Son module de coordonnées est $M_X = \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{F}_q}(X, \widehat{\mathbb{G}}_{a,S})$, où \mathbb{F}_q agit sur $\widehat{\mathbb{G}}_{a,S}$ de la manière évidente. C'est un faisceau de $\mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_S$ -modules sur S , où $\mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_S$ est le complété de $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_S$ pour la topologie $\pi \otimes 1$ -adique – l'action de \mathcal{O} provient de l'action de \mathcal{O} sur X et l'action de \mathcal{O}_S vient de l'action de \mathcal{O}_S sur $\widehat{\mathbb{G}}_{a,S}$ par homothéties. De plus, l'isogénie de Frobenius $\tau : \widehat{\mathbb{G}}_{a,S} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}_{a,S}$ induit une application $\text{Id}_{\mathcal{O}} \otimes \text{Fr}_{\mathcal{O}_S}$ -linéaire $F : M_X \rightarrow M_X$. Pour tout $\mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_S$ -module M , on note ${}^{\tau}M = (\text{Id}_{\mathcal{O}} \otimes \text{Fr}_{\mathcal{O}_S})^*(M)$, de sorte que F induit un morphisme de $\mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_S$ -modules ${}^{\tau}M_X \rightarrow M_X$.

A partir de maintenant, on notera $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ le produit tensoriel $\mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_S$. Pour simplifier, on notera $z = \pi \otimes 1$ et lorsque s est une section de \mathcal{O}_S , on notera encore s la section $1 \otimes s$ de $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ – remarquer que ceci s'applique en particulier pour $s = \pi$. On notera aussi $K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S = \mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S[z^{-1}]$ le complété de $K \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_S$ pour la topologie z -adique.

Proposition II.1.1. ([G], ch. I, prop. 2.2.3 et 2.2.6)

- 1) Soit X un \mathcal{O} -module formel de hauteur h et de dimension d sur un \mathcal{O} -schéma $S \in \text{Nilp } \mathcal{O}$. Son module de coordonnées M_X a les propriétés suivantes:
 - a) M_X est, localement pour la topologie de Zariski sur S , un $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ -module libre de rang h ,
 - b) le conoyau de $F : {}^\tau M_X \rightarrow M_X$ est supporté schématiquement par le graphe du morphisme de S dans $\text{Spec } \mathcal{O}$ (ce qui revient à dire qu'il est annulé par $z - \pi$), et il est localement libre de rang d sur ce graphe (comme \mathcal{O}_S -module il est canoniquement isomorphe au dual de $\text{Lie } X$),
 - c) l'endomorphisme semi-linéaire F de M_X/zM_X est, localement pour la topologie de Zariski sur S , nilpotent.
- 2) Le module de coordonnées établit une équivalence de catégories contravariante de la catégorie des \mathcal{O} -modules formels de hauteur h et de dimension d vers la catégorie des couples (M, F) satisfaisant aux conditions 1), a), b), c).
- 3) La donnée d'une quasi-isogénie $X \dashrightarrow X'$ équivaut à celle d'un isomorphisme de $K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ -modules $M_{X'} \otimes_{\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S} K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S \rightarrow M_X \otimes_{\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S} K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ compatible aux morphismes de Frobenius $F_{X'}$ et F_X .

Lorsque S est un \mathcal{O} -schéma formel, la proposition ci-dessus s'adapte – il suffit de lire “le graphe du morphisme de S dans $\text{Spf } \mathcal{O}$ ” dans la condition (b) et de remplacer la condition (c) par “l'endomorphisme semi-linéaire F de M_X/zM_X est, localement pour la topologie de Zariski sur S , topologiquement nilpotent”.

Dans ce cadre, on rencontrera souvent des *limites de quasi-isogénies*, c'est-à-dire, lorsque S est défini par un système inductif de nil-immersions fermées $S_n \hookrightarrow S_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}, S_n \in \text{Nilp } \mathcal{O}$), des systèmes compatibles $(\rho_n : X_{S_n} \dashrightarrow X'_{S_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de quasi-isogénies. De telles limites de quasi-isogénies ne proviennent pas nécessairement d'une quasi-isogénie $X \dashrightarrow X'$, car le dénominateur de ρ_n (c'est-à-dire, le plus petit entier N tel que $\rho_n \circ X(\pi^N)$ soit un morphisme) est en général une fonction non-bornée de n – on en rencontrera d'ailleurs un exemple dès le paragraphe suivant avec la limite de quasi-isogénies ρ universelle sur la fibre spéciale de l'espace de modules de Lubin-Tate. Notant

$$\begin{aligned} K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S &= \varprojlim_n K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S_n} \\ &= \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j z^j; a_j \in \mathcal{O}_S \text{ et } \lim_{j \rightarrow -\infty} a_j = 0 \right\} \end{aligned}$$

la $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ -algèbre complétée de $K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ vis-à-vis de la topologie induite par celle de \mathcal{O}_S , la donnée d'une telle limite de quasi-isogénies équivaut alors à celle d'un isomorphisme $M_{X'} \otimes_{\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S} K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S \rightarrow M_X \otimes_{\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S} K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ compatible aux morphismes de Frobenius $F_{X'}$ et F_X .

On peut remarquer qu'on a, là encore, commis l'abus de notations consistant à écrire $a_j \in \mathcal{O}_S$ pour dire que a_j est une section globale de \mathcal{O}_S . En fait, les constructions de $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$, $K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ et $K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ se “faisceautisent” visiblement et

fournissent des faisceaux de \mathcal{O}_S -algèbres sur S . Ces faisceaux ne sont pas quasi-cohérents mais proviennent de faisceaux quasi-cohérents de $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ -algèbres sur $\mathrm{Spf} \mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathrm{Spf} \mathbb{F}_q} S$.

Dans les deux paragraphes suivants, on va respectivement décrire les schémas formels (ind-)représentant les foncteurs $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{DT}}$, ainsi que les modules de coordonnées des objets universels.

II.2 Côté Lubin-Tate

Il résulte de [D1] (voir aussi [HG1]) que le foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ est ind-représenté par $\coprod_{h \in \mathbb{Z}} \mathrm{Spf} \widetilde{\mathcal{O}}[[u_1, \dots, u_{d-1}]]$ muni de l'objet universel (X, ρ) suivant. En tant que groupe formel avec action de \mathbb{F}_q , $X = \widehat{\mathbb{G}}_a$; l'action de $\pi \in \mathcal{O}$ est $X(\pi) = \pi + u_1\tau + \dots + u_{d-1}\tau + \tau^d$. La quasi-isogénie ρ est uniquement déterminée par la condition $\rho \equiv \tau^h$ modulo $(\pi, u_1, \dots, u_{d-1})$ (dans la suite elle sera explicitée à l'aide de modules de coordonnées). Sur cette écriture, la donnée de descente de Weil est facile à expliciter: elle applique la h -ième copie de $\mathrm{Spf} \widetilde{\mathcal{O}}[[u_1, \dots, u_{d-1}]]$ sur la $(h-1)$ -ième, fixe les u_i et agit sur $\widetilde{\mathcal{O}}$ par τ .

Dans toute la suite, plutôt qu'avec $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ on travaillera avec l'espace de modules avec structures de niveau "de type Iwahori" $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \mathcal{B}^\times}$ suivant (intermédiaire entre $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, 1}$).

Au sous-groupe d'Iwahori \mathcal{B}^\times est naturellement associé un problème de modules

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \mathcal{B}^\times} &= \{(X, \rho), H_1 \subset \dots \subset H_{d-1} \subset X(\pi)\} \\ &= \{(X, \rho), X = X_0 \xrightarrow{\alpha_1} X_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots X_d \xrightarrow{\alpha_d} X_0, \alpha_d \circ \dots \circ \alpha_1 = X(\pi)\}, \end{aligned}$$

où (X, ρ) est comme dans la définition de l'espace de Lubin-Tate $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$, H_i est un sous-schéma en groupes avec action de \mathbb{F}_q de $X[\pi]$, fini et plat d'ordre q^i , $X_i = X/H_i$ est un \mathcal{O} -module formel de hauteur d et de dimension 1, et α_i est une isogénie de degré q .

Ce foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \mathcal{B}^\times}$ est ind-représenté par

$$\coprod_{h \in \mathbb{Z}} \mathrm{Spf}(\widetilde{\mathcal{O}}[[x_1, \dots, x_d]]/(x_1 \cdots x_d - (-1)^d \pi))$$

(dans la suite on considérera toujours $(x_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$ comme une suite périodique $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$) et les objets universels sont les suivants:

- $X = \widehat{\mathbb{G}}_a$ comme groupe formel avec action de \mathbb{F}_q et l'action de π est donnée par $X(\pi) = (\tau - x_d) \cdots (\tau - x_1)$,
- $H_i = \mathrm{Ker}[(\tau - x_i) \cdots (\tau - x_1)]$,

- $X_i = \widehat{\mathbb{G}}_a$ comme groupe formel avec action de \mathbb{F}_q , l'action de π est donnée par $X_i(\pi) = (\tau - x_i) \cdots (\tau - x_1)(\tau - x_d) \cdots (\tau - x_{i+1})$ et $\alpha_i = \tau - x_i$,
- la quasi-isogénie ρ est encore déterminée par la condition

$$\rho \equiv \tau^h \text{ modulo } (x_1, \dots, x_d).$$

On va maintenant traduire ceci en termes de modules de coordonnées. Pour énoncer le résultat, il est commode d'introduire la notation suivante: $P = P_\pi \otimes 1$ – il aurait certes été plus logique de noter P_z cette matrice...

Théorème II.2.1. *Le module de coordonnées (M_X, F_X) du \mathcal{O} -module formel universel X sur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}$ est*

- $M_X = \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}}$
- $F_X = \Phi_X \circ \tau$

où l'on note Φ_X la matrice $\text{diag}(x_1, \dots, x_d) + {}^tP$ et $\tau = \text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr}_{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}}}$. La matrice $R_{X_{S_0}}$ du morphisme

$$M_\rho : M_X / \pi M_X \rightarrow K^d \widehat{\otimes} (\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}} / (\pi))$$

associé à la quasi-isogénie ρ est la réduction modulo π de

$$\begin{aligned} R_X &= {}^tP^h [\dots ({}^tP^3 \tau^2 \Phi_X^{-1} {}^tP^{-2}) ({}^tP^2 \tau \Phi_X^{-1} {}^tP^{-1}) ({}^tP \Phi_X^{-1})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} {}^tP^{n+h} \tau^{n-1} \Phi_X^{-1} \dots \Phi_X^{-1} \end{aligned}$$

– ce produit converge pour la topologie (x_1, \dots, x_d) -adique sur le complété (x_1, \dots, x_d) -adique de ${}^tP^h \text{diag}(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}}^d) [{}^tP^{-1}]$ et définit donc une matrice à coefficients dans $K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}}$; cette matrice R_X satisfait l'équation $R_X \Phi_X = {}^tP \tau R_X$.

On note $R_X = {}^tP^h \sum_{j \geq 0} \text{diag}(r_{1,j}, \dots, r_{d,j}) {}^tP^{-j}$ (avec $r_{i,0} = 1$); l'équation matricielle $R_X \Phi_X = {}^tP \tau R_X$ se traduit alors par les équations $r_{i-1,j+1}^q - r_{i,j+1} = r_{i,j} x_{i+j}$ ($j \geq 0$).

Démonstration. La famille $(1, \tau - x_1, (\tau - x_2)(\tau - x_1), \dots, (\tau - x_{d-1}) \cdots (\tau - x_1))$ est visiblement une base de M_X et, en utilisant cette base, on obtient l'isomorphisme de la proposition. La matrice $R_{X_{S_0}}$ est congrue à ${}^tP^h$ modulo (x_1, \dots, x_d) et telle que $R_{X_{S_0}} \Phi_X = {}^tP \tau R_{X_{S_0}}$. On a donc

$$R_{X_{S_0}} = {}^tP^n \tau^n R_{X_{S_0}} \tau^{n-1} \Phi_X^{-1} \dots \Phi_X^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} {}^tP^{n+h} \tau^{n-1} \Phi_X^{-1} \dots \Phi_X^{-1}.$$

Enfin, il reste à vérifier que R_X s'exprime comme un somme de puissances de tP d'exposants $\leq h$. La matrice $\Phi_X {}^tP^{-1}$ est de la forme

$$\text{Id}_d + \varepsilon, \text{ où } \varepsilon \in (x_1, \dots, x_d) \text{diag}(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}}^d) [{}^tP^{-1}]$$

et a donc un inverse $\text{Id}_d - \varepsilon + \varepsilon^2 - \dots$ dans le complété (x_1, \dots, x_d) -adique de la $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}}$ -algèbre $\text{diag}(\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}}^d)[{}^tP^{-1}]$; en utilisant l'expression de R_X sous forme de produit, il en résulte que R_X appartient au complété (x_1, \dots, x_d) -adique de ${}^tP^h \text{diag}(\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}}^d)[{}^tP^{-1}]$. \square

Remarque II.2.2. Le fait que la matrice $R_{X_{S_0}}$ se relève en une matrice R_X satisfaisant la même équation est à rapprocher du lemme de rigidité [**K**, lemma 1.1.3] utilisé dans la démonstration de Drinfeld ([**D2**], [**K**]) du théorème de Serre-Tate.

Il faut cependant souligner que $(\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S, {}^tP \circ \tau)$ n'est pas le module de coordonnées d'un \mathcal{O} -module formel si l'image de π est non nulle dans \mathcal{O}_S . On peut néanmoins considérer la matrice R_X comme celle associée à une limite de quasi-isogénies généralisées au sens suivant. Revenant à la définition rappelée en (I.2) des \mathcal{O} -modules formels, on peut aussi appeler \mathcal{O} -module formel sur un \mathbb{F}_q -schéma S tout groupe formel muni d'une action de \mathcal{O} telle que l'action tangente de \mathcal{O} se fasse par une homothétie de rapport nilpotent (qui fait alors de S un objet de $\text{Nilp } \mathcal{O}$). Avec ce point de vue on peut ensuite définir des morphismes généralisés $X \rightarrow X'$ en n'imposant plus que les morphismes $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_S$, induits par X et par X' , coïncident.

II.2.1 Structures de niveau

On va maintenant interpréter les structures de niveau en termes du module de coordonnées.

Puisqu'on utilise dans la suite le problème de modules $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}$, on travaille avec des \mathcal{O} -modules formels déjà munis d'une structure de niveau de type Iwahori. Il est alors naturel de demander que la structure de niveau additionnelle $\sigma : \pi^{-n} \mathcal{O}^d / \mathcal{O}^d \rightarrow X[\pi^{-n}]$ sur X soit compatible à la structure de niveau de type \mathcal{B}^\times sur X , c'est-à-dire que $\sigma(\pi^{-1} \mathcal{O} / \mathcal{O}_{e_1} \oplus \dots \oplus \pi^{-1} \mathcal{O} / \mathcal{O}_{e_i}) \subset H_i$ (où $(e_i)_i$ désigne la base canonique de \mathcal{O}^d).

Soit $S \in \text{Nilp } \mathcal{O}$ et X un \mathcal{O} -module formel sur S . En identifiant le \mathbb{F}_q -dual de K/\mathcal{O} à \mathcal{O} par le résidu $\mathcal{O} \otimes K/\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{F}_q$, la donnée d'un morphisme $\sigma : \pi^{-n} \mathcal{O} / \mathcal{O} \rightarrow X[\pi^n]$ correspond à celle d'un morphisme $M_\sigma : M_X / z^n M_X \rightarrow (\mathcal{O} / \pi^n \mathcal{O}) \otimes \mathcal{O}_S$ compatible aux Frobenius F_X sur la source et τ sur le but. Lorsque (X, H_i, ρ) est un point de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}$ à valeurs dans $S \in \text{Nilp } \widetilde{\mathcal{O}}$, la donnée de $\sigma : \pi^{-n} \mathcal{O}^d / \mathcal{O}^d \rightarrow X[\pi^n]$ correspond à celle d'une matrice $S_X \in M_d(\mathcal{O} / \pi^n \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}_S)$ telle que $S_X \Phi_X = {}^\tau S_X$ (où l'on note encore Φ_X la matrice obtenue à partir de $\Phi_X \in M_d(\mathcal{O} \otimes \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times})$ par le changement de base $S \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}$). Le morphisme σ est tel que $\sigma(\pi^{-1} \mathcal{O} / \mathcal{O}_{e_1} \oplus \dots \oplus \pi^{-1} \mathcal{O} / \mathcal{O}_{e_i}) \subset H_i$ si et seulement si la matrice S_X est triangulaire inférieure modulo z ; lorsque c'est le cas, on va expliciter les conditions pour que σ soit une structure de niveau à la Drinfeld.

Soit $S_X \equiv \sum_{j \geq 0} \text{diag}(s_{1,j}, \dots, s_{d,j}) {}^t P^j$ (modulo $z^n M_d(\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$) une matrice triangulaire inférieure modulo z . L'équation matricielle $S_X \Phi_X = {}^t S_X$ s'écrit encore $s_{i,j}^q - x_{i-j} s_{i,j} = s_{i,j-1}$. En particulier, on a $s_{i,0}^q - x_i s_{i,0} = 0$ et $s_{i,0}$ est donc un point du noyau de $\alpha_i = (\tau - x_i) : X_{i-1} \rightarrow X_i$; plus généralement, $s_{i,j}$ est un point de $(\alpha_{i-1} \circ \dots \circ \alpha_{i-j})^{-1}(s_{i,0}) \subset \text{Ker}(\alpha_i \circ \dots \circ \alpha_{i-j}) \subset X_{i-j-1}[\pi^{[j/d]+1}]$ (où $[j/d]$ désigne la partie entière de j/d) et on a $\alpha_{i-j}(s_{i,j}) = s_{i,j-1}$.

Le morphisme σ associé à S_X est une structure de niveau à la Drinfeld si et seulement si on a $s_{i,0}^{q-1} = x_i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. En effet, ce morphisme σ est une structure de niveau à la Drinfeld lorsqu'on a les égalités de diviseurs $\sigma(\pi^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O}e_1 \oplus \dots \oplus \pi^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O}e_i) = H_i$ et $\sigma(\pi^{-1}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d) = X[\pi]$ sur $X = X_0$, qui sont elles-mêmes équivalentes aux égalités de diviseurs $\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda s_{i,0} = \text{Ker}(\tau - x_i)$ sur X_{i-1} , pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Remarque II.2.3. Au lieu de considérer une matrice S_X définie modulo $z^n M_d(\mathcal{O} \otimes \mathcal{O}_S)$ comme ci-dessus, il est plus naturel de considérer une matrice S_X définie modulo $z^n {}^t \mathcal{B} \otimes \mathcal{O}_S$ (autrement dit, $S_X \in ({}^t \mathcal{B}/\pi^n {}^t \mathcal{B}) \otimes \mathcal{O}_S$). L'espace de module $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}_n^\times}$ ainsi obtenu (qui est associé au sous-groupe $\mathcal{B}_n^\times = (\text{Id} + \pi^n \mathcal{B})^\times$ de $\text{GL}_d(K)$) est intermédiaire entre $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n+1}$. Il est en fait régulier (une suite régulière de paramètres est $(s_{i, nd-1})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$).

II.2.2 Action du groupe $\text{GL}_d(K) \times D^\times$ et de la donnée de descente

Tout comme en I.3, on se donne $\gamma \in \text{GL}_d(K)$, $N \in \mathbb{N}$ tel que $\pi^N \gamma M_d(\mathcal{O}) \gamma^{-1} \subset M_d(\mathcal{O})$, $m \in \mathbb{Z}$ le plus petit entier tel que $\pi^m \gamma \in M_d(\mathcal{O})$, $\gamma' = \pi^m \gamma$ et $H = \gamma'^{-1} \mathcal{O}^d / \mathcal{O}^d$. Soit $(X, \rho, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n+N}(S)$. Le sous-groupe $\sigma(H) \subset X$ image (au sens des diviseurs) de H par σ est aussi l'unique sous-groupe fini et plat de X d'ordre $|H| = q^{v(\det \gamma')}$ et contenant (ensemblément cette fois) l'image de H par σ . Par conséquent, à isomorphisme unique près, il existe un unique triplet $(X', \tilde{\gamma}' : X \rightarrow X')$, où $\tilde{\gamma}'$ est une isogénie de hauteur $v(\det \gamma')$ et σ' est une structure de niveau à la Drinfeld sur X' , rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \gamma'^{-1} \pi^{-n} \mathcal{O}^d / \mathcal{O}^d & \xrightarrow{\gamma'} & \pi^{-n} \mathcal{O}^d / \mathcal{O}^d \\ \sigma \downarrow & & \sigma' \downarrow \\ X & \xrightarrow{\tilde{\gamma}'} & X' \end{array}$$

commutatif (le morphisme $\tilde{\gamma}'$ est, bien sûr, le morphisme de passage au quotient par $\sigma(H)$). On rappelle (I.3) que l'image de (X, ρ, σ) par γ est alors $(X', \sigma', X'_0(\pi^m)^{-1} \circ \tilde{\gamma}'_0 \circ \rho)$ (où l'indice 0 désigne la restriction à S_0).

Traduisant ceci en termes de modules de coordonnées, à isomorphisme unique près, il existe un unique quintuplet $(M_{X'}, F_{X'}, \Gamma', S_{X'}, R_{X'})$, où

$$(M_{X'}, F_{X'}, S_{X'}, R_{X'}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n}(S)$$

et

$$\Gamma' = M(\tilde{\gamma}') : \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S = M_X \rightarrow M_{X'} = \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$$

est un morphisme

- compatible aux Frobenius F_X et $F_{X'}$
- dont le déterminant $\det \Gamma'$ – qui est compatible aux Frobenius $\det F_X$ et $\det F_{X'}$ et est donc un élément de $\mathbb{F}_q[[z]] \subset \mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ – est de valuation (z -adique) $v(\det \gamma')$
- rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} M_{X'} & \xrightarrow{\Gamma'} & M_X \\ S_{X'} \downarrow & & S_X \downarrow \\ \mathcal{O}^d/\pi^n \mathcal{O}^d \otimes \mathcal{O}_S & \xrightarrow{t\gamma'_z} & \mathcal{O}^d/\pi^n t\gamma' \mathcal{O}^d \otimes \mathcal{O}_S \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} M_{X'} & \xrightarrow{z^{-n}\Gamma'} & M_X[z^{-1}] \\ R_{X'} \downarrow & & R_X \downarrow \\ K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S & = & K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S \end{array}$$

(où l'on note $\gamma'_z = \gamma' \otimes \text{Id}_{\mathcal{O}_S}$).

L'image de (M_X, F_X, R_X, S_X) par γ est alors $(M_{X'}, F_{X'}, R_{X'}, S_{X'})$.

Lorsqu'on dispose d'un système compatible $(M_X, F_X, R_X, S_{n,X}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n}(S)$ ($n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1,X} \equiv S_{n,X}$ modulo z^n), l'élément

$$(M_{X'}, F_{X'}, R_{X'}, S_{\bullet, X'}) = \gamma(M_X, F_X, R_X, S_{\bullet, X})$$

s'écrit plus agréablement de la manière suivante. En notant $S_X = \varprojlim_n S_{n,X} : M_X \rightarrow \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ (resp. $S_{X'} = \dots$), $(M_{X'}, F_{X'}, R_{X'}, S_{X'})$ est, à isomorphisme unique près, l'unique quadruplet tel qu'il existe $\Gamma : M_{X'} \rightarrow M_X[z^{-1}]$, compatible aux Frobenius F_X et $F_{X'}$ et tel que $\det \Gamma$ soit de valuation (z -adique) $v(\det \gamma)$, rendant les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} M_{X'} & \xrightarrow{\Gamma} & M_X[z^{-1}] \\ S_{X'} \downarrow & & S_X \downarrow \\ \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S & \xrightarrow{t\gamma_z} & \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S[z^{-1}] \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} M_{X'} & \xrightarrow{\Gamma} & M_X[z^{-1}] \\ R_{X'} \downarrow & & R_X \downarrow \\ K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S & = & K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S \end{array}$$

commutatifs – on a donc $S_{X'} = t\gamma_z^{-1} S_X \Gamma$ et $R_{X'} = R_X \Gamma$. Lorsque $\gamma \in \mathcal{B}^\times$, Γ est un isomorphisme; dans ce cas on peut en fait prendre $X = X'$ et $\Gamma = \text{Id}_X$.

Pour exprimer l'action de D^\times sur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n}$ en termes de modules de coordonnées, on utilise le morphisme d'algèbres

$$D \rightarrow M_d(K_d), \quad \lambda \in \mathbb{F}_{q^d} \mapsto \text{diag}(\lambda, \lambda^q, \dots, \lambda^{q^{d-1}}), \quad \Pi \mapsto P_\pi$$

qui permet de considérer les éléments de D comme des matrices. Pour

$$\delta = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \lambda_j \Pi^j \in D,$$

on note

$$\delta_z = \sum_j \text{diag}(\iota(\lambda_j), \dots, \iota(\lambda_j^{q^{d-1}})) P^j \in \text{diag}(\mathcal{O}_S^d)((P)) = M_d(K) \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$$

(où $\iota : \widetilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}_S$ est le morphisme structural du $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma S).

Soient $\delta \in D^\times$ et $(X, \rho, \sigma) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n}(S)$, de module de coordonnées (M_X, F_X, R_X, S_X) . Le module de coordonnées de $(X, \rho \circ \delta^{-1}, \sigma)$ est alors $(M_X, F_X, {}^t\delta_z^{-1}R_X, S_X)$.

En travaillant avec des modules de coordonnées normalisés comme dans le théorème II.2.1, on obtient des objets uniquement déterminés, plutôt que des objets uniquement déterminés à isomorphisme unique près. L'action ci-dessus de D^\times ne respecte pas cette normalisation; avec ce point de vue, il faut alors remplacer $(M_X, F_X, {}^t\delta_z^{-1}R_X, S_X)$ par l'unique module de coordonnées normalisé $(M_X, \Delta^{-1}F_X {}^\tau\Delta, {}^t\delta_z^{-1}R_X\Delta, S_X\Delta)$ qui lui soit isomorphe (où Δ est un élément uniquement déterminé de $({}^t\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)^\times = \mathcal{O}_S[[{}^tP]]^\times$).

Finalement, la donnée de descente à la Weil est le morphisme τ -semi-linéaire associant à $(M_X, F_X, R_X, S_X) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n}(S)$ le quadruplet $(M_X, F_X, {}^tP^{-1}R_X, S_X) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n}(S[\tau])$ – elle commute visiblement à l'action de $\text{GL}_d(K)$ et on laisse au lecteur l'exercice amusant consistant à vérifier qu'elle commute à l'action de D^\times (indication: même si cela n'apparaît pas sur la notation, δ_z dépend du morphisme $\widetilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}_S$).

Remarque II.2.4. Pour un système compatible $(M_X, F_X, R_X, S_{\bullet, X})$ comme ci-dessus, induisant donc $S_X : M_X \rightarrow \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ par passage à la limite projective, on peut considérer le produit $T_X = S_X R_X^{-1} \in M_d(K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$ (voire, dans le cas où $S = \varprojlim_m S_m$, $S_m \in \text{Nilp } \widetilde{\mathcal{O}}$ est un $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma formel, $T_X = S_X R_X^{-1} \in M_d(K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$). Cette matrice satisfait l'équation $T_X {}^tP = {}^\tau T_X$. L'action de $(\gamma, \delta) \in \text{GL}_d(K) \times D^\times$ sur T_X est aussi très simple puisqu'elle associe ${}^t\gamma_z^{-1} T_X {}^t\delta_z$ à T_X . Enfin, l'action de la donnée de descente est $T_X \mapsto T_X {}^tP \in M_d(K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$.

Comme nous le verrons (remarque II.3.7), un produit analogue T_Y du côté Drinfeld possède – à une transposition près – les mêmes propriétés. C'est sur cette observation que reposera notre construction de l'isomorphisme des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld – comme le lecteur l'aura sans doute deviné, cet isomorphisme identifiera les matrices $T_{\mathcal{L}\mathcal{T}} = T_X$ et ${}^tT_{\mathcal{D}r} = {}^tT_Y$.

II.3 Côté Drinfeld

Ce qui suit est simplement une reformulation des résultats du chapitre II et d'une partie du chapitre IV de [G]. Attention: certaines de nos notations et conventions diffèrent de celles utilisées dans [G] (par exemple, P y désigne la matrice que nous notons ici tP).

On va d'abord utiliser la théorie du module de coordonnées pour réinterpréter le foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}$ comme un problème de modules de chaînes de réseaux (voir [G], ch. I, variante 4.4.2).

Lorsque la base $S \in \text{Nilp } \mathcal{O}$ est un $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma, le module de coordonnées M_Y du \mathcal{O}_D -module formel Y admet une graduation naturelle¹

$$M_Y = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M_{i,Y}, \text{ où } M_{i,Y} = \{m \in M_Y ; (1 \otimes \lambda^{q^{i-1}})m = (\lambda \otimes 1)m, \forall \lambda \in \mathbb{F}_{q^d}\}.$$

On note que cette graduation dépend de la structure de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma de S – il sera important de s'en souvenir lorsqu'on voudra écrire la donnée de descente de Weil.

Le Frobenius F_Y et l'élément $\Pi \in \mathcal{O}_D$ induisent des morphismes de degré 1

$$F_{i,Y} : {}^\tau M_{i,Y} \rightarrow M_{i+1,Y} \quad \text{et} \quad \Pi_{i,Y} : M_{i,Y} \rightarrow M_{i+1,Y} \quad (i \in \mathbb{Z})$$

et la quasi-isogénie ρ induit une famille de morphismes

$$R_{i,Y_{S_0}} : M_{i,Y_{S_0}} \rightarrow K \otimes_{\mathcal{O}} M_{i,Y_{S_0}}$$

compatibles aux Frobenius $F_{\bullet,Y_{S_0}}$ et $F_{\bullet,Y_{S_0}}$ ainsi qu'aux morphismes de degré 1 $\Pi_{\bullet,Y_{S_0}}$ et $\Pi_{\bullet,Y_{S_0}}$. Identifiant $M_{i,Y}$ à $P^{-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \overline{\mathbb{F}}_q$ (de sorte que le morphisme $\Pi_{\bullet,Y}$ est l'inclusion évidente et que le Frobenius $F_{i,Y}$ est le composé $\tau(P^{-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S) = P^{-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S \hookrightarrow P^{-(i+1)}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$), cette condition de compatibilité s'écrit

$$R_{i,Y_{S_0}} = R_{i+1,Y_{S_0}} \circ \Pi_{i,Y}, \quad {}^\tau R_{i,Y_{S_0}} = R_{i+1,Y_{S_0}} \circ F_{i,Y}.$$

Comme du côté Lubin-Tate (prop. II.2.1 et remarque II.2.2) le système $R_{\bullet,Y_{S_0}}$ se relève de manière unique en un système $(R_{i,Y} : M_{i,Y} \rightarrow K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)_{i \in \mathbb{Z}}$ tel que $R_{i,Y} = R_{i+1,Y} \circ \Pi_{i,Y}$ et ${}^\tau R_{i,Y} = R_{i+1,Y} \circ F_{i,Y}$ (voir [G], ch. I prop. 4.4.1 pour une démonstration).

Identifiant $M_{i,Y}$ à son image par le morphisme $R_{i,Y}$ dans $K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$, l'ensemble $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}(S)$ se réinterprète alors comme l'ensemble des chaînes

$$\cdots \subsetneq M_{i,Y} \subsetneq M_{i+1,Y} \subsetneq \cdots \subsetneq K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$$

de $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ -réseaux dans $K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ vérifiant

- (périodicité) pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $M_{i+d,Y} = z^{-1}M_{i,Y}$ et $M_{i+1,Y}/M_{i,Y}$ est un \mathcal{O}_S -module inversible,
- (2.1, 1.b) pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^\tau M_{i,Y} \subset M_{i+1,Y}$, le quotient $M_{i+1,Y}/{}^\tau M_{i,Y}$ est supporté (schématiquement) par le graphe de $S \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}$ et est localement libre de rang 1 sur ce graphe (c'est donc un \mathcal{O}_S -module inversible)

¹Le décalage ($i - 1$ au lieu de i) est en fait commode – voir ci-dessous la description de $M_{i,Y}$ ainsi que la description (2.3.1) des structures de niveau; il sera en fait encore plus commode d'y penser comme un décalage de $d - 1$.

- (2.1, 1.c) localement pour la topologie de Zariski sur S , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\tau^N M_{i,Y} \subset z M_{i+N,Y}$.

La condition (2.1, 1.c) est en fait automatiquement vérifiée lorsque la condition de périodicité l'est. En effet, localement pour la topologie de Zariski sur S , il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $z^m \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S \subset M_i \subset z^{-m} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ et il suffit de prendre $N = 2m + 1$.

On va maintenant voir que cette interprétation du foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D},r}$ permet de le plonger dans une ind-variété de drapeaux affine sur $\widetilde{\mathcal{O}}$ (au sens de [BL], [Fal2] ou [PS]).

Le foncteur \mathcal{D} associant à un $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma S l'ensemble des systèmes

$$\cdots \subsetneq M_i \subsetneq M_{i+1} \subsetneq \cdots \subsetneq K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$$

de $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ -réseaux dans $K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ vérifiant la condition de périodicité ci-dessus est limite inductive de ses sous-foncteurs fermés \mathcal{D}_N définis par

$$\mathcal{D}_N(S) = \{(M_i)_i \in \mathcal{D}(S); P^{N-i} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S \subset M_i \subset P^{-N-i} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S\}.$$

Ces sous-foncteurs fermés sont représentables par des $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schémas et \mathcal{D} est donc un $\widetilde{\mathcal{O}}$ -ind-schéma.

On rappelle maintenant comment l'ind-variété de drapeaux \mathcal{D} s'écrit comme un quotient de groupes de lacets. Lorsque $(M_i)_i \in \mathcal{D}(S)$ est un tel système, localement pour la topologie de Zariski sur S , il existe une base $(r_i)_{1 \leq i \leq d}$ de $K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ telle que

$$M_i = z^{-1}(\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)r_1 \oplus \cdots \oplus z^{-1}(\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)r_i \oplus (\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)r_{i+1} \oplus \cdots \oplus (\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)r_d$$

pour $0 \leq i \leq d$, ou, de manière équivalente, telle qu'en notant R la matrice ayant pour colonnes les vecteurs r_i , on ait $M_i = RP^{-i}(\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$.

Remarque II.3.1. Appliqué au système de morphismes $R_{i,Y}$ comme ci-dessus ceci signifie simplement que, localement pour la topologie de Zariski sur S , on peut choisir des bases des $M_{i,Y}$ telles que la matrice de $\Pi_{i,Y} : M_{i,Y} \hookrightarrow M_{i+1,Y}$ soit P et que, par conséquent, la matrice (encore notée R_i) du morphisme R_i soit $R_0 P^{-i}$.

L'ind-variété de drapeaux \mathcal{D} s'écrit donc comme le quotient de groupes de lacets $\underline{\mathrm{GL}}_d(K) / \underline{\mathcal{B}}^\times$, où $\underline{\mathrm{GL}}_d(K)$ est l' $\widetilde{\mathcal{O}}$ -ind-schéma en groupes tel que $\underline{\mathrm{GL}}_d(K)(S) = \underline{\mathrm{GL}}_d(K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$ (limite inductive de ses sous-schémas fermés $\underline{\mathrm{GL}}_d(K)_N$ définis par $\underline{\mathrm{GL}}_d(K)_N(S) = \{R \in \underline{\mathrm{GL}}_d(K)(S); R \in z^{-N} M_d(\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S) \text{ et } R^{-1} \in z^{-N} M_d(\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)\}$) et $\underline{\mathcal{B}}^\times$ est le $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma en groupes tel que $\underline{\mathcal{B}}^\times(S) = (\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)^\times$.

La condition (2.1, 1.b) définit $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D},r}$ comme un sous-foncteur localement fermé de \mathcal{D} (ou, plus précisément, de la restriction $\mathcal{D} \times_{\mathrm{Spf} \widetilde{\mathcal{O}}} \mathrm{Spf} \widetilde{\mathcal{O}}$ de \mathcal{D} à $\mathrm{Nilp} \widetilde{\mathcal{O}}$), qu'on va maintenant expliciter en suivant [G].

Indices critiques

Soit $S \in \text{Nilp } \check{\mathcal{O}}$ un $\check{\mathcal{O}}$ -schéma intègre sur lequel l'image de π est nulle. Lorsque $(M_i)_i \in \check{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}(S)$, le morphisme composé

$$M_0 / {}^\tau M_{-1} \rightarrow M_1 / {}^\tau M_0 \rightarrow \cdots \rightarrow M_d / {}^\tau M_{d-1} = M_0 / {}^\tau M_{-1},$$

qui est la multiplication par π , est nul. L'un au moins des morphismes de \mathcal{O}_S -modules inversibles $M_i / {}^\tau M_{i-1} \rightarrow M_{i+1} / {}^\tau M_i$ est donc nul et pour un tel i on a donc $M_i = {}^\tau M_i$. Le réseau M_i est donc définissable sur \mathbb{F}_q , en ce sens qu'il existe un \mathcal{O} -réseau $\Lambda \subset K^d$ tel que $M_i = \Lambda \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$.

Soit $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,(\Lambda,i)}$ le sous-foncteur fermé de la fibre spéciale $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0}$ de $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ défini par $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,(\Lambda,i)}(S) = \{(M_j \subset K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)_j \in \check{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}(S); M_i = \Lambda \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S\}$, pour tout $S \in \text{Nilp } \check{\mathcal{O}}$. La fibre spéciale $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0}$ est alors "réunion" des $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,(\Lambda,i)}$ au sens où $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}(S) = \bigcup_{(\Lambda,i)} \check{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,(\Lambda,i)}$, pour tout schéma intègre (et en particulier, tout spectre de corps) $S \in \text{Nilp } \check{\mathcal{O}}$.

En fait, les foncteurs $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,(\Lambda,i)}$ sont représentables par des $\overline{\mathbb{F}}_q$ -schémas intègres (isomorphes au schéma obtenu en éclatant $\mathbb{P}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1}$ le long de ses points \mathbb{F}_q -rationnels, puis des transformés stricts de ses droites \mathbb{F}_q -rationnelles, puis... , voir [G, II.1]) et apparaîtront rétrospectivement comme les composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$.

Sous-foncteurs ouverts associés aux simplexes de l'immeuble étendu de $\text{GL}_d(K)$

Soit $\underline{\Delta}$ un simplexe de l'immeuble étendu de $\text{GL}_d(K)$. La donnée du simplexe $\underline{\Delta}$ est équivalente à celle

- d'une partie $I(\underline{\Delta})$ de \mathbb{Z} qui est périodique de période d (c'est-à-dire invariante sous la translation $i \mapsto i + d$)
- d'une suite strictement croissante $(\Lambda_i \subset K^d)_{i \in I(\underline{\Delta})}$ de réseaux telle que $\Lambda_{i+d} = \pi^{-1} \Lambda_i, \forall i \in I(\underline{\Delta})$ et qu'il existe un entier $h(\underline{\Delta})$ tel que $[\Lambda_i : \mathcal{O}^d] = i + h(\underline{\Delta}), \forall i \in I(\underline{\Delta})$.

En effet, la donnée ci-dessus définit visiblement un simplexe de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\text{PGL}_d(K)$, ne dépendant que de son orbite sous l'opération de décalage de la numérotation

$$I(\underline{\Delta}) \mapsto I(\underline{\Delta}) + 1 \quad \text{et} \quad (\Lambda_i)_{i \in I(\underline{\Delta})} \mapsto (\Lambda_{i-1})_{i \in I(\underline{\Delta})+1},$$

et définit aussi comme on l'a vu un entier $h(\underline{\Delta})$. On note qu'avec cette écriture des simplexes de l'immeuble étendu, on a $\underline{\Delta} \cap \underline{\Delta}' = (\Lambda_i)_{\{i \in I(\underline{\Delta}) \cap I(\underline{\Delta}'); \Lambda_i = \Lambda'_i\}}$.

On associe à tout simplexe $\underline{\Lambda}$ de l'immeuble étendu le sous-foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, \underline{\Lambda}}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}$ obtenu comme intersection de tous les ouverts complémentaires des fermés $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, 0, (\Lambda, i)}$, où (Λ, i) parcourt l'ensemble $\mathcal{C}(\underline{\Lambda})$ des couples formés d'un réseau Λ et d'un entier i tels que $i \notin I(\underline{\Lambda})$ ou que $\Lambda \neq \Lambda_i$.

Cette intersection n'est pas une intersection finie, mais ceci définit cependant un sous-foncteur ouvert de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}$. Pour le vérifier, il suffit d'établir que pour tout $S \in \text{Nilp } \mathcal{O}$ et tout $M_\bullet \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}(S) \subset \mathcal{D}(S)$, le produit fibré de foncteurs $S \times_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, 0, (\Lambda, i)}$ n'est non-vide que pour un nombre fini d'orbites $\{(\pi^{-j}\Lambda, i + jd); j \in \mathbb{Z}\}$. Comme il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que M_\bullet appartienne en fait à $\mathcal{D}_N(S) = \{(M_i)_i \in \mathcal{D}(S); P^{N-i}\mathcal{O}^d \otimes \mathcal{O}_S \subset M_i \subset P^{-N-i}\mathcal{O}^d \otimes \mathcal{O}_S\}$, ceci résulte du fait que le fermé $\mathcal{D}_N \cap \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, 0, (\Lambda, i)}$ de \mathcal{D} n'est non-vide que pour un nombre fini d'orbites $\{(\pi^{-j}\Lambda, i + jd); j \in \mathbb{Z}\}$.

Pour pouvoir énoncer le théorème de représentabilité explicite pour $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}$, on a encore besoin de faire une remarque. On considère d'abord la $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre A_Φ complétée π -adique de

$$\widetilde{\mathcal{O}}[(y_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}]/(y_1 \cdots y_d - (-1)^d \pi)$$

et le système d'équations

$$(\mathcal{E}_{i,j}) \quad r_{i,j+1}^q - r_{i,j+1} = y_i r_{i+1,j} \quad (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}, r_{i,0} = 1).$$

à coefficients dans A_Φ associées à l'égalité $R_Y \Phi_Y = {}^\tau R_Y$, où l'on note²

$$\begin{aligned} \Phi_Y &= \text{Id}_d + P^{-1} \text{diag}(y_i)_{1 \leq i \leq d} \\ \text{et } R_Y &= \sum_{j \in \mathbb{N}} P^{-j} \text{diag}(r_{i,j})_i = \text{Id}_d + \sum_{j \geq 1} P^{-j} \text{diag}(r_{i,j})_i. \end{aligned}$$

On considère maintenant la $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre $A_{\mathcal{D}_r}$ complétée π -adique de

$$A_\Phi[(r_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \in \{0, \dots, d-1\}}, (1 - r_{i,j}^{q-1})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \in \{1, \dots, d-1\}}]/\mathcal{E}$$

où \mathcal{E} est l'idéal engendré par $r_{i,0} - 1$, pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, et par $r_{i,j+1}^q - r_{i,j+1} - y_i r_{i+1,j}$ pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $0 \leq j \leq d-2$. Le système d'équations $(\mathcal{E}_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq d-1}$ à coefficients dans $A_{\mathcal{D}_r}$ admet alors une unique solution $(r_{i,j} \in \pi A_{\mathcal{D}_r})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq d}$, comme on le voit en remarquant que $y_i r_{i+1, d-1} = (-1)^{d-2} [(1 - r_{i+1, d-1}^{q-1}) (1 -$

²Par souci d'uniformité (voir le théorème II.2.1), on rétablit les indices Y qu'on avait abandonnés à partir du paragraphe consacré aux indices critiques. Il peut sembler fantaisiste de noter les matrices diagonales à droite des puissances de P ; cette convention est cependant la plus commode. Les variables $r_{i,j}$ qui apparaissent ici ne sont pas celles figurant dans l'énoncé du théorème II.2.1. En toute rigueur, il faudrait donc noter $r_{i,j}^{\mathcal{L}T}$ et $r_{i,j}^{\mathcal{D}r}$ pour distinguer les deux jeux de variables. ... En pratique, sauf dans le chapitre IV où on utilisera cette notation, le contexte permettra de les distinguer et on s'en dispensera.

$r_{i+2,d-2}^{q-1} \cdots (1 - r_{i+d-1,1}^{q-1})]^{-1} (y_i y_{i+1} \cdots y_{i+d-1}) \in \pi A_{\mathcal{D}_r}$ et que pour tout $a \in \pi A_{\mathcal{D}_r}$, l'équation $r^q - r = a$ a comme unique solution $r = -a - a^q - a^{q^2} - \cdots$ dans $\pi A_{\mathcal{D}_r}$.

Pour $j \geq nd$, on a en fait $r_{i,j} \in \pi^n A_{\mathcal{D}_r}$ comme il résulte de la formule

$$r_{i,j} = (-1)^j \frac{(y_i \cdots y_{i+d-1})^n y_{i+nd} \cdots y_{i+j-1}}{(1 - r_{i,j}^{q-1})(1 - r_{i+1,j-1}^{q-1}) \cdots (1 - r_{i+j-1,1}^{q-1})}.$$

La matrice $R_Y = \sum_{j \in \mathbb{N}} P^{-j} \text{diag}(r_{i,j})_i$ appartient donc au complété π -adique de $\text{Id}_d + P^{-1} \text{diag}(A_{\mathcal{D}_r}^d)[P^{-1}]$. En particulier, cette matrice est donc à coefficients dans le complété π -adique de $A_{\mathcal{D}_r}[z^{-1}]$ et *a fortiori* dans le complété π -adique $K \widehat{\otimes} A_{\mathcal{D}_r}$ de $K \widehat{\otimes} A_{\mathcal{D}_r}$.

Le théorème suivant décrit alors explicitement le schéma formel ind-représentant le foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}$ et l'objet universel au-dessus de ce schéma formel.

Théorème II.3.2.

- 1) L'élément $\gamma \in \text{GL}_d(K)$ envoie le sous-foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, \underline{\Delta}}$ sur le sous-foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, \gamma \underline{\Delta}}$.
- 2) Si $\underline{\Delta}$ et $\underline{\Delta}'$ sont deux simplexes de l'immeuble étendu de $\text{GL}_d(K)$, l'intersection $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, \underline{\Delta}} \cap \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, \underline{\Delta}'}$ est $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, \underline{\Delta} \cap \underline{\Delta}'}$ (et est vide si $\underline{\Delta} \cap \underline{\Delta}'$ est vide).
- 3) Les sous-foncteurs ouverts $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, \underline{\Delta}}$ ($\underline{\Delta}$ décrivant l'ensemble des simplexes de l'immeuble étendu de $\text{GL}_d(K)$, ou même, l'ensemble de ses simplexes maximaux) forment un recouvrement ouvert de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}$.
- 4) Le foncteur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, P^{-\bullet} \mathcal{O}^d}$ associé au simplexe maximal $P^{-\bullet} \mathcal{O}^d = (P^{-i} \mathcal{O}^d)_{i \in \mathbb{Z}}$ est ind-représenté par $\text{Spf } A_{\mathcal{D}_r}$ muni de l'objet universel $(M_{i,Y} = R_Y P^{-i} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} A_{\mathcal{D}_r})_{i \in \mathbb{Z}}$.
- 5) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le sous-schéma formel ouvert $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, (P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_i}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, P^{-\bullet} \mathcal{O}^d}$ associé au sous-simplexe $(P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_i$ de $P^{-\bullet} \mathcal{O}^d$, obtenu en lui enlevant les sommets $P^{-i+nd} \mathcal{O}^d$ ($n \in \mathbb{Z}$), est l'ouvert complémentaire du fermé d'équation $y_i = 0$ de $\text{Spf } A_{\mathcal{D}_r} = \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, P^{-\bullet} \mathcal{O}^d}$.

Cet énoncé rassemble la proposition 2.1.3, les théorèmes 2.3.1, et 3.3.1 et les propositions 4.1 et 4.3.1 du chapitre II de [G]. Le point de vue utilisé dans [G] n'est pas exactement celui qu'on a adopté ici. Pour le confort du lecteur, on donnera donc une démonstration de ce théorème, qui diffèrera d'ailleurs un peu de la démonstration figurant dans [G].

Auparavant, on va expliciter le \mathcal{O}_D -module formel Y et la quasi-isogénie ρ correspondant au module de coordonnées gradué $(M_{i,Y} \subset K^d \widehat{\otimes} A_{\mathcal{D}_r})$ universel sur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, P^{-\bullet} \mathcal{O}^d}$ – ce corollaire ne servira en fait pas dans la suite, mais il est agréable de pouvoir exprimer “concrètement” le couple (Y, ρ) .

Corollaire II.3.3. *La restriction à $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r, P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ du \mathcal{O}_D -module formel universel Y sur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ est caractérisée par*

- $Y = \widehat{\mathbb{G}}_a^d$ en tant que groupe formel
- $Y(\lambda) = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda^{q^{d-1}})$, pour $\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}$
- $Y(\Pi) = -\text{diag}(y_i)_{1 \leq i \leq d} C + \tau \text{Id}_d$

où l'on note

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la restriction de la quasi-isogénie ρ universelle est

$$\rho = \text{Id}_d + \sum_{1 \leq j \leq d-1} \text{diag}(r_{i,j})_i \tau^{-j} C^j \quad (\text{modulo } \pi).$$

Avant de démontrer le théorème II.3.2, on va encore introduire trois ouverts de la grassmannienne affine \mathcal{D} .

Pour définir le premier ouvert, on note \underline{U}^- l' $\widetilde{\mathcal{O}}$ -ind-schéma en groupes défini par

$$\underline{U}^-(S) = (\text{Id}_d + P^{-1} \text{diag}(\mathcal{O}_S^d)[P^{-1}])^\times$$

pour tout $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma S . Le stabilisateur de $P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ dans \underline{U}^- est trivial et l'orbite $\underline{U}^- \cdot P^{-\bullet}\mathcal{O}^d \simeq \underline{U}^-$ de $P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ sous \underline{U}^- est un ouvert de \mathcal{D} , analogue aux “grosses cellules de Schubert opposées” des variétés de drapeaux usuelles³. On peut aussi caractériser cet ouvert $\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ de la manière suivante. On considère la chaîne de co-réseaux $(z^{-1}P^{-i}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d \subset K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)_{i \in \mathbb{Z}}$; la partie $(\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)(S) \subset \mathcal{D}(S)$ est alors celle constituée des chaînes de réseaux $(M_i \subset K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)_{i \in \mathbb{Z}}$ transverses à la chaîne de co-réseaux $(z^{-1}P^{-i}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d)_{i \in \mathbb{Z}}$ (c'est-à-dire, telles que $M_i \cap z^{-1}P^{-i}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d$ et que $M_i \oplus z^{-1}P^{-i}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d = K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$). Le lien entre les deux points de vue provient du fait que le \mathcal{O}_S -module $M_i \cap z^{-1}P^{-i+1}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d$ (qui est libre de rang 1 car il s'identifie à son projeté sur M_i parallèlement à $z^{-1}P^{-i}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d$, qui est $z^{-1}P^{-i+1}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d / z^{-1}P^{-i}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d$) n'est autre que celui engendré par $RP^{-i}e_1$ (où l'on note, bien sûr, (e_1, \dots, e_d) la base canonique de K^d), ce qui permet de “retrouver” la matrice R sous l'hypothèse de transversalité.

³L'analogie deviendra encore plus évidente dans le paragraphe V.3, où on représentera les éléments de $\underline{\text{GL}}_d(K)$ comme des matrices infinies – celles associées aux éléments de $\underline{\mathcal{B}}^\times$ seront triangulaires supérieures et celles associées aux éléments de \underline{U}^- seront triangulaires inférieures, de diagonale principale la matrice Id_∞ .

Le deuxième ouvert n'est autre que l'intersection $\bigcap_{\gamma \in \mathcal{B}^\times} \gamma \underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d$. Pour vérifier que c'est en fait un ouvert de \mathcal{D} , on remarque que $\mathcal{D}_N \cap \gamma \underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d$ ne dépend en fait que de $\gamma \in (\mathcal{B}/P^{2N}\mathcal{B})^\times$. L'intersection $\mathcal{D}_N \cap \bigcap_{\gamma \in \mathcal{B}^\times} \gamma \underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d$ est donc un ouvert de \mathcal{D}_N et $\bigcap_{\gamma \in \mathcal{B}^\times} \gamma \underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d$ est alors un ouvert de $\mathcal{D} = \varinjlim_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_N$.

Le troisième ouvert $(U^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)[(1 - r_{i,j}^{q-1})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq 1}^{-1}]$ est l'intersection des ouverts $(U^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)[(1 - r_{i,j}^{q-1})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}^{-1}]$, ($j \geq 1$) – c'est un ouvert, puisque là encore l'intersection $\bigcap_{j \geq 1} (\mathcal{D}_N \cap (U^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)[(1 - r_{i,j}^{q-1})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}^{-1}])$ est en fait une intersection finie.

Démonstration du théorème II.3.2. Les deux premiers points du théorème sont triviaux. Le troisième point résulte simplement du fait que pour toute extension k de $\overline{\mathbb{F}}_q$ (considérée comme une \mathcal{O} -algèbre de la manière évidente) et tout point M_\bullet de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}_r}$ à valeurs dans k , le point M_\bullet appartient au simplexe $(M_i)_{i \in I_{crit}}$ de l'immeuble étendu, où I_{crit} désigne l'ensemble des indices critiques de M_\bullet (et où, par abus de notation, on a considéré les réseaux critiques M_i comme des réseaux dans K^d).

Pour vérifier les deux derniers points on va commencer par démontrer le lemme suivant (voir aussi [G], ch. II, prop. 2.5.1 et 2.6.1).

Lemme II.3.4. *Le plongement de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}$ dans \mathcal{D} identifie $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, P^{-\bullet} \mathcal{O}^d}$ à l'image inverse de l'ouvert $\bigcap_{\gamma \in \mathcal{B}^\times} \underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d$ de \mathcal{D} .*

En fait, on n'utilisera que l'inclusion $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, P^{-\bullet} \mathcal{O}^d} \subset \bigcap_{\gamma \in \mathcal{B}^\times} \underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d$, mais il est agréable de constater que cette inclusion est une égalité.

Démonstration. Bien entendu, il suffit de démontrer que pour toute extension k de $\overline{\mathbb{F}}_q$, on a $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, 0, P^{-\bullet} \mathcal{O}^d}(k) = \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, 0}(k) \cap \bigcap_{\gamma \in \mathcal{B}^\times} (\underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)(k)$.

On vérifie d'abord l'inclusion

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, 0, P^{-\bullet} \mathcal{O}^d}(k) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, 0}(k) \cap \bigcap_{\gamma \in \mathcal{B}^\times} (\underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)(k) ;$$

comme $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, 0, P^{-\bullet} \mathcal{O}^d}(k)$ est stable par \mathcal{B}^\times , il suffit en fait d'établir que

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, 0, P^{-\bullet} \mathcal{O}^d}(k) \subset (\underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)(k).$$

Soient $M_{\bullet, Y} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}(k)$ et $\ell \in \mathbb{Z}$. On se propose de démontrer que $M_{\ell, Y}$ est transverse à $P^{-\ell}(z^{-1}k[z^{-1}]^d)$ dans $k((z))^d = K^d \widehat{\otimes} k$. Si ℓ est critique on a $M_{\ell, Y} = P^{-\ell} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} k$ et la transversalité est évidente. Sinon, on note $i \in \mathbb{Z}$ le plus grand indice critique inférieur à ℓ et $i' \in \mathbb{Z}$ le plus petit indice critique supérieur à ℓ . On a donc $M_{i, Y} = P^{-i} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} k$ et $M_{i', Y} = P^{-i'} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} k$. Pour tout

$j \in \mathbb{Z}$, on note $E'_j = P^{-j+1}e_1$; la famille $z^{-1}E'_{i+1}, \dots, z^{-1}E'_{i'}$ est alors une base de $M_{i',Y}/M_{i,Y}$ sur k (la notation E'_j provient en fait d'un paragraphe ultérieur, cf. V.3). Soit $x = x_{i+1}E'_{i+1} + \dots + x_{i'}E'_{i'}$ un vecteur non nul de la droite vectorielle $M_{i+1,Y}/M_{i,Y}$. Comme i' est le plus petit indice critique supérieur à i , les vecteurs $x, \tau x = x_{i+1}^q E'_{i+1} + \dots + x_{i'}^q E'_{i'}, \dots, \tau^{i'-i-1} x$ sont linéairement indépendants sur k – si ce n'était pas le cas, ils engendreraient un sous-espace propre invariant par τ de $M_{i',Y}/M_{i,Y}$ et i' ne serait donc pas le premier indice critique supérieur à i .

En considérant le déterminant de Moore de x , qui est celui de la matrice ayant pour vecteurs-colonnes les vecteurs $x, \tau x, \dots, \tau^{i'-i-1} x$, on vérifie de manière élémentaire que les vecteurs $x, \tau x, \dots, \tau^{i'-i-1} x$ sont linéairement indépendants sur k si et seulement si les éléments $x_{i+1}, \dots, x_{i'}$ de k sont linéairement indépendants sur \mathbb{F}_q . Pour plus de précisions, voir le paragraphe V.1.2 consacré aux déterminants de Moore; on note $\text{Moore}(x_{i+1}, \dots, x_{i'})$ ce déterminant de Moore.

En particulier, $x_{i+1}, \dots, x_{i'}$ sont donc indépendants sur \mathbb{F}_q et $\text{Moore}(x_{i+1}, \dots, x_{i'})$ n'est donc pas nul. Le k -espace vectoriel $M_{\ell,Y}/M_{i,Y}$ est donc transverse à

$$\text{Vect}(z^{-1}E'_{\ell+1}, \dots, z^{-1}E'_{i'}) = P^{-\ell}(z^{-1}k[z^{-1}]^d)/P^{-i'}(z^{-1}k[z^{-1}]^d)$$

dans $M_{i',Y}/M_{i,Y}$; par conséquent, $M_{\ell,Y}$ est bien transverse à $P^{-\ell}(z^{-1}k[z^{-1}]^d)$, comme on voulait le vérifier.

Pour établir l'autre inclusion

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}(k) \supset \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0}(k) \cap \left(\bigcap_{\gamma \in \mathcal{B}^\times} \underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d(k) \right),$$

il suffit de démontrer que si $M \subset K^d = \mathbb{F}_q((z))^d$ est un réseau transverse à tous les co-réseaux $\gamma z^{-1}P^{-i}\mathbb{F}_q[z^{-1}]^d$ (où γ parcourt \mathcal{B}^\times et $i = [M : \mathcal{O}^d]$), on a $M = P^{-i}\mathcal{O}^d$, puis d'appliquer cet énoncé aux indices critiques.

Pour cela, on remarque que lorsque $M \subset K^d$ un réseau, il existe un appartement de l'immeuble de $\text{PGL}_d(K)$ contenant à la fois le sommet M et le simplexe $P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$; il existe donc un élément γ de \mathcal{B}^\times tel que $\gamma^{-1}M$ soit dans l'appartement "standard" associé au tore des matrices diagonales. Pour cet élément, γ on a donc $\gamma^{-1}(M_i) = \bigoplus_{j=1}^d z^{-n_j} \mathcal{O}e_j$ (où les n_j sont dans \mathbb{Z}). Lorsque le réseau M est transverse à $\gamma z^{-1}P^{-i}\mathbb{F}_q[z^{-1}]^d$ (où $i = [M : \mathcal{O}^d] = n_1 + \dots + n_d$), le réseau $\gamma^{-1}M = \bigoplus_{j=1}^d z^{-n_j} \mathcal{O}e_j$ est alors transverse à $z^{-1}P^{-i}\mathbb{F}_q[z^{-1}]^d$. Ceci n'est possible que pour $\gamma^{-1}M = P^{-i}\mathcal{O}^d$; on a donc bien $M = P^{-i}\mathcal{O}^d$, ce qui achève la démonstration du lemme. \square

On va maintenant étudier l'intersection de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ avec l'ouvert $\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$. Soient $S \in \text{Nilp } \widetilde{\mathcal{O}}$ et $(M_{i,Y})_i \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}(S) \cap (\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)(S)$. Le point $(M_{i,Y})_i$ est alors de la forme $(R_Y P^{-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)_i$, où la matrice (uniquement déterminée)

$$R_Y = \text{Id}_d + \sum_{j \geq 1} P^{-j} \text{diag}(r_{i,j})_{1 \leq i \leq d} \in \underline{U}^-(S)$$

vérifie

- $\Phi_Y := R_Y^{-1} \tau R_Y \in P^{-1} \mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ (ceci traduit le fait que ${}^\tau M_{i,Y} \subset M_{i+1,Y}, \forall i \in \mathbb{Z}$)
- $\det \Phi_Y \in (z - \pi)(\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)^\times$ (ceci traduit le fait que $\mathcal{M}_{i+1,Y} / {}^\tau M_{i,Y}$ est annulé par $z - \pi$ et est un module inversible sur son support $V(z - \pi), \forall i \in \mathbb{Z}$).

Il résulte de la première condition que $\Phi_Y \in \underline{U}^-(S) \cap P^{-1} \mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ est de la forme $\text{Id}_d + P^{-1} \text{diag}(y_i)_i$ et de la deuxième que $y_1 \cdots y_d = (-1)^d \pi$. On retrouve alors le système d'équations $(\mathcal{E}_{i,j}, i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq 0)$ associé à l'égalité $R_Y \Phi_Y = {}^\tau R_Y$ qu'on a introduit avant l'énoncé du théorème II.3.2.

Plus précisément, on remarque que $\text{Spf } A_{\mathcal{D}_r}$ n'est autre que

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r} \cap (U^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)[(1 - r_{i,j}^{q-1})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq 1}^{-1}]$$

(et que l'objet universel sur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r} \cap (U^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)[(1 - r_{i,j}^{q-1})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq 1}^{-1}]$ coïncide avec celui introduit plus haut sur $\text{Spf } A_{\mathcal{D}_r}$). Pour achever la démonstration du quatrième point du théorème, il suffira donc de vérifier l'égalité de sous-foncteurs ouverts $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, P^{-\bullet} \mathcal{O}^d} = \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r} \cap (U^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)[(1 - r_{i,j}^{q-1})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq 1}^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r} \cap \underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d$.

On va maintenant exprimer certaines des conditions ouvertes associées à l'ouvert $\bigcap_{\gamma \in \mathcal{B}^\times} \underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d$. Le lemme suivant fournit de telles conditions.

Lemme II.3.5. *Sur l'ouvert $\bigcap_{\gamma \in \mathcal{B}^\times} \underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d$ de $P^{-\bullet} \mathcal{O}^d$, les fonctions $1 - r_{i,j}^{q-1}$ sont inversibles pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $1 \leq j \leq d - 1$.*

Démonstration. On va établir que pour $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times, i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $1 \leq j \leq d - 1$, la fonction $1 - \lambda r_{i,j}$ est en fait inversible sur l'ouvert

$$(\text{Id}_d + P^{-i+1} \text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0) P^{i+j-1}) \underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d \cap \underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d$$

de $\underline{U}^- P^{-\bullet} \mathcal{O}^d$. En combinant l'action de P^{-i} et le décalage de $-i$ il suffit de le faire pour $i = 1$. Pour cela, on se donne un point $M_\bullet = R P^{-\bullet} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} k$ de cet ouvert à valeurs dans une extension k de $\overline{\mathbb{F}}_q$ (et on note, bien entendu, $R = \text{Id}_d + \sum_{j \geq 1} P^{-j} \text{diag}(r_{i,j})_i$). On va alors étudier la condition de transversalité de M_1 et de $(\text{Id}_d + \text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0) P^j) P^{-1} z^{-1} k[z^{-1}]^d$.

On remarque qu'on a l'inclusion $(\text{Id}_d + \text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0) P^j) P^{-1} z^{-1} k[z^{-1}]^d \subset z^{-1} k[z^{-1}]^d$. L'intersection de M_1 avec $z^{-1} k[z^{-1}]^d$ n'est autre que la droite $k R e_1$. On va chercher à quelle condition cette droite est incluse dans

$$(\text{Id}_d + \text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0) P^j) P^{-1} z^{-1} k[z^{-1}]^d.$$

La matrice $P^{j+1} \text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0) P^{-1} = P^j \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda)$ a comme seul coefficient non nul λ , situé sur la dernière colonne et la $(d - j)$ -ème ligne; on

a donc $(\text{Id}_d + P^{j+1} \text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0)P^{-1})k[z^{-1}]^d = k[z^{-1}]^d$. La matrice $\text{Id}_d + \text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0)P^j$ préserve donc $P^{-1-j}z^{-1}k[z^{-1}]^d$, si bien qu'on a

$$P^{-1-j}z^{-1}k[z^{-1}]^d \subset (\text{Id}_d + \text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0)P^j)P^{-1}z^{-1}k[z^{-1}]^d.$$

Par ailleurs, le co-réseau $(\text{Id}_d + \text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0)P^j)P^{-1}z^{-1}k[z^{-1}]^d$ contient les vecteurs $P^{-1-d}e_1, \dots, P^{-j-d+1}e_1$.

On est alors ramené à étudier l'intersection dans le plan

$$z^{-1}k[z^{-1}]^d / (P^{-1-j}z^{-1}k[z^{-1}]^d \oplus kP^{-1-d}e_1 \oplus \dots \oplus kP^{-j-d+1}e_1)$$

des droites images de kRe_1 et de $(\text{Id}_d + \text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0)P^j)P^{-1}z^{-1}k[z^{-1}]^d$. Une base de ce plan est formée des images de e_1 et $P^{-j}e_1$; ces deux droites s'écrivent, respectivement, $k(e_1 + r_{i,j}P^{-j}e_1)$ et $k(\lambda e_1 + P^{-j}e_1)$ modulo $(P^{-1-j}z^{-1}k[z^{-1}]^d \oplus kP^{-1-d}e_1 \oplus \dots \oplus kP^{-j-d+1}e_1)$, si bien que la condition de transversalité cherchée est bien $1 - \lambda r_{1,j} \neq 0$. \square

Il reste donc finalement à démontrer que les deux sous-foncteurs ouverts $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r} \cap (U^{-P^{-\bullet}\mathcal{O}^d})[(1 - r_{i,j}^{q-1})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq 1}^{-1}]$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r} \cap \underline{U}^{-P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ coïncident et à vérifier le cinquième point du théorème.

Pour cela, on se donne une extension k de $\overline{\mathbb{F}}_q$ et on va successivement vérifier les inclusions

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}(k) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r} \cap (U^{-P^{-\bullet}\mathcal{O}^d})[(1 - r_{i,j}^{q-1})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq 1}^{-1}]$$

et

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}(k) \supset \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r} \cap (U^{-P^{-\bullet}\mathcal{O}^d})[(1 - r_{i,j}^{q-1})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq 1}^{-1}](k);$$

en vérifiant la deuxième inclusion, on obtiendra aussi une démonstration du point 5.

Soient $M_\bullet = RP^{-\bullet}\mathcal{O}^d \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}(k)$ et $P^{-i}\mathcal{O}^d$ un réseau critique de M_\bullet . Les réseaux M_j ($j - d \leq j \leq i$) vérifient les inclusions $zP^{-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} k \subset M_j \subset P^{-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} k$ et *a fortiori* les inclusions $P^{-j+d-1}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} k \subset M_j \subset P^{-j-d+1}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} k$. Les éléments $r_{i,j}$ associés à la matrice R sont donc nuls pour $j \geq d$, ce qui démontre que $RP^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ est un point de l'ouvert $(U^{-P^{-\bullet}\mathcal{O}^d})[(1 - r_{i,j}^{q-1})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq 1}^{-1}]$.

Soient $M_\bullet = RP^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ un point de $\text{Spf } A_{\mathcal{D}_r}(k) = \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r} \cap (U^{-P^{-\bullet}\mathcal{O}^d})[(1 - r_{i,j}^{q-1})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq 1}^{-1}]$ et $i \in \mathbb{Z}$. L'indice i est critique si et seulement si la matrice Φ associée à ce point appartient à $P^{-i}M_d(\mathcal{O} \widehat{\otimes} k)P^i$. On vérifie aisément que cette dernière condition équivaut à $y_i = 0$; il reste donc seulement à vérifier que le réseau critique est bien $P^{-i}\mathcal{O}^d$. Ceci résulte de la formule

$$r_{\ell,j} = (-1)^j [(1 - r_{\ell,j}^{q-1})(1 - r_{\ell+1,j-1}^{q-1}) \cdots (1 - r_{\ell+j-1,1}^{q-1})]^{-1} y_\ell \cdots y_{\ell+j-1}$$

qui entraîne les égalités $r_{\ell,j} = 0$, pour $i - j + 1 \leq \ell \leq i$, desquelles il suit que la matrice R appartient à $P^{-i}M_d(k)P^i \subset P^{-i}M_d(\mathcal{O} \widehat{\otimes} k)P^i$ et que le réseau critique $M_i = RP^{-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} k$ est donc $P^{-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} k$.

Le théorème II.3.2 est donc démontré. \square

II.3.1 Structures de niveau

Soit S une \widetilde{K} -variété rigide analytique munie d'un point $(Y, \rho)^{\text{rig}}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}^{\text{rig}}$ à valeurs dans S , provenant d'un point (Y, ρ) de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}$ à valeurs dans S^{ent} pour un modèle entier convenable S^{ent} . On note que, quitte à normaliser S^{ent} dans sa fibre générique S , les points de π^n -division de Y^{rig} définis sur S proviennent de points de π^n -division de Y définis sur S^{ent} ; on suppose désormais que S^{ent} est normal.

On identifie le \mathbb{F}_q -dual de D/\mathcal{O}_D à $\Pi^{1-d}\mathcal{O}_D$ en utilisant le résidu de la trace réduite : $D/\mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{F}_q} \Pi^{1-d}\mathcal{O}_D \rightarrow \mathbb{F}_q$. Le décalage qui devrait en résulter est en fait annulé par celui qu'on a introduit dans la graduation du module de coordonnées au début du paragraphe II.3.

De même que du côté Lubin-Tate (*cf.* 2.2.1), la donnée d'une structure de niveau d'échelon π^n

$$\pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D \rightarrow Y[\pi^n]_S^{\text{rig}}$$

sur $Y[\pi^n]_S^{\text{rig}}$ équivaut (voir [G, IV. 1.3]) à celle d'une famille de morphismes

$$S_{i,n,Y} : (M_{i,Y}/z^n M_{i,Y}) \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}}} \mathcal{O}_{S^{\text{ent}}} \rightarrow (P^{-i}\mathcal{O}^d/z^n P^{-i})\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\text{ent}}}$$

induisant des isomorphismes $(M_{i,Y}/z^n M_{i,Y}) \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}}} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} (P^{-i}\mathcal{O}^d/z^n P^{-i}\mathcal{O}^d) \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ après tensorisation par \mathcal{O}_S et vérifiant

- $S_{i,n,Y}$ est compatible aux morphismes induits par les inclusions $M_{i,Y} \hookrightarrow M_{i+1,Y}$ et $P^{-i}\mathcal{O}^d \hookrightarrow P^{-(i+1)}\mathcal{O}^d$
- le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tau(M_{i,Y}/z^n M_{i,Y}) \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}}} \mathcal{O}_{S^{\text{ent}}} & \xrightarrow{\tau S_{i,n,Y}} & (P^{-i}\mathcal{O}^d/z^n P^{-i}\mathcal{O}^d) \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\text{ent}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M_{i+1,Y}/z^n M_{i+1,Y}) \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}}} \mathcal{O}_{S^{\text{ent}}} & \xrightarrow{S_{i+1,n,Y}} & (P^{-(i+1)}\mathcal{O}^d/z^n P^{-(i+1)}\mathcal{O}^d) \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\text{ent}}} \end{array}$$

(dont les morphismes verticaux sont respectivement induits par $\tau M_{i,Y} \hookrightarrow M_{i+1,Y}$ et par $P^{-1} : P^{-i}\mathcal{O}^d \xrightarrow{\sim} P^{-(i+1)}\mathcal{O}^d$) est commutatif.

Travaillant localement pour la topologie de Zariski sur S^{ent} , on peut supposer que le système $(M_{i,Y})_i$ est de la forme $(R_Y P^{-i}(\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S))_i$, où $R_Y \in \text{GL}_d(K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$. Notant $\Phi_Y = R_Y^{-1} \tau R_Y \in P^{-1}\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$, la donnée de la famille $(S_{i,n,Y})_i$ équivaut alors à celle d'une matrice ${}^4 S_{n,Y} = \sum_{0 \leq j \leq nd-1} P^j \text{diag}(s_{i,j})_{1 \leq i \leq d} \in (\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S/z^n(\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S))^\times$ vérifiant $S_{n,Y} \Phi_Y \equiv P^{-1} \tau S_{n,Y}$ modulo $z^n \mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$.

En particulier, le revêtement $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r,n,P-\bullet\mathcal{O}^d}^{\text{rig}}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r,P-\bullet\mathcal{O}^d}^{\text{rig}}$ du paragraphe I.4, classifiant les structures de niveau d'échelon π^n sur le \mathcal{O}_D -module universel Y

⁴Bien sûr, cette matrice n'est autre que celle de $S_{0,n,Y}$; on préfère abandonner l'indice 0 – comme on l'a déjà fait avec $R_{0,Y}$ – pour alléger les notations.

au-dessus de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r, P-\bullet \mathcal{O}^d}^{\text{rig}}$, est défini par la tour d'équations

$$s_{i,j+1}^q - s_{i+1,j+1}y_i = s_{i,j} \quad (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, -1 \leq j \leq nd-1, s_{i,-1} = 0)$$

associées à l'égalité de matrices $S_{n,Y}\Phi_Y \equiv P^{-1}\tau S_{n,Y}$ modulo $z^n \mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ et par l'équation

$$(s_{1,0} \cdots s_{d,0})^{q-1} = (-1)^d \pi$$

résultant de l'équation $(s_1 \cdots s_d)^q = s_2 y_1 \cdots s_d y_{d-1} s_1 y_d = (-1)^d s_1 \cdots s_d \pi$ et du fait que $s_1 \cdots s_d$ est inversible, puisque $S_{n,Y}$ l'est.

Ces équations donnent un modèle entier

$$\text{Spf}(A_{\mathcal{D}r}[(s_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 0 \leq j \leq nd-1}] / \mathcal{I}_{\mathcal{D}r,n})$$

de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n, P-\bullet \mathcal{O}^d}^{\text{rig}}$, où l'idéal $\mathcal{I}_{\mathcal{D}r,n}$ est, bien sûr, engendré par $s_{i,0}^q - s_{i+1,0}y_i$ pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, par $(s_{1,0} \cdots s_{d,0})^{q-1} - (-1)^d \pi$ et par $s_{i,j+1}^q - s_{i+1,j+1}y_i - s_{i,j}$ pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 0 \leq j \leq nd-1$. Malheureusement, ce modèle entier n'est pas normal; on le remplacera donc par son normalisé $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n, P-\bullet \mathcal{O}^d} = \text{Spf } A_{\mathcal{D}r,n}$, où $A_{\mathcal{D}r,n}$ désigne la clôture intégrale de $A_{\mathcal{D}r}$ dans $A_{\mathcal{D}r}[(s_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq 0}][\pi^{-1}] / \mathcal{I}_{\mathcal{D}r,n}$.

Enfin, il sera commode d'interpréter la $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre $A_{\mathcal{D}r}[(s_{i,0})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}] / \mathcal{I}_{\mathcal{D}r,1/d}$ associée aux structures de niveau d'échelon Π à l'aide d'algèbres de monoïdes, de la manière suivante. Pour tout monoïde M , on note $\overline{\mathbb{F}}_q[M]$ la $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbre de ce monoïde et pour tout $m \in M$, on note $e^m \in \overline{\mathbb{F}}_q[M]$ l'élément de $\overline{\mathbb{F}}_q[M]$ qui lui correspond. La $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbre

$$\overline{\mathbb{F}}_q[(y_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}, (s_{i,0})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}] / ((s_{i,0}^q - s_{i+1,0}y_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}, (s_{1,0} \cdots s_{d,0})^{q-1} - y_1 \cdots y_d)$$

s'identifie alors (en envoyant $s_{i,0}$ sur $e^{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}$ et y_i sur $e^{(0, \dots, 0, q, -1, 0, \dots, 0)}$, le 1 et le q étant tous deux en i -ème position) à celle du monoïde \mathbb{M} engendré par les vecteurs de base $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ et par les vecteurs $qe_i - e_{i+1}$ ($i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$). Utilisant les notations introduites dans la discussion qui précède l'énoncé du théorème II.3.2, la $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre $A_{\Phi}[(s_{i,0})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}] / \mathcal{I}_{\mathcal{D}r,1/d}$ s'identifie donc à la complétée $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}]^{\wedge}$ de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}]$ pour la topologie $\pi = (-1)^d e^{(q-1, \dots, q-1)}$ -adique, si bien que $A_{\mathcal{D}r}[(s_{i,0})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}] / \mathcal{I}_{\mathcal{D}r,1/d}$ s'identifie finalement à la complétée π -adique $(\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}][(r_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 0 \leq j \leq d-1}] / \mathcal{E})^{\wedge}$. Il résulte alors du lemme suivant et du fait que le morphisme d'algèbres $A_{\Phi}[(s_{i,0})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}] / \mathcal{I}_{\mathcal{D}r,1/d} \rightarrow A_{\mathcal{D}r}[(s_{i,0})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}] / \mathcal{I}_{\mathcal{D}r,1/d}$ est étale que $A_{\mathcal{D}r}[(s_{i,0})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}] / \mathcal{I}_{\mathcal{D}r,1/d}$ est normale.

Lemme II.3.6. *Le monoïde \mathbb{M} est l'intersection du réseau \mathbb{Z}^d avec le cône*

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathbb{R}_+(qe_i - e_{i+1}).$$

Démonstration. Soit $m = \sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} n_i e_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \alpha_i (qe_i - e_{i+1})$ ($n_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$) un élément de cette intersection. On veut démontrer que $m \in \mathbb{M}$. Quitte à soustraire à m un élément de $\sum_i \mathbb{N}(qe_i - e_{i+1})$, on peut supposer que $\alpha_i < 1, \forall i$. Pour tout i , on a alors $n_i = -\alpha_{i-1} + q\alpha_i > -1$ et donc $n_i \geq 0$, si bien que $m \in \mathbb{N}^d \subset \mathbb{M}$. \square

II.3.2 Action du groupe $\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$ et de la donnée de descente

L'action du groupe $\mathrm{GL}_d(K)$ sur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ est très simple: $\gamma \in \mathrm{GL}_d(K)$ envoie $(M_i \subset K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)_i \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}(S)$ sur $(\gamma M_i)_i$. En particulier, γ envoie le sous-foncteur ouvert $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r, \underline{\Delta}}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ associé à un simplexe $\underline{\Delta} = (\Lambda_i)_{i \in I(\underline{\Delta})}$ de l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$ sur le sous-foncteur ouvert $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r, \gamma \underline{\Delta}}$ associé au simplexe $\gamma \underline{\Delta} = (\gamma \Lambda_i)_{i \in I(\underline{\Delta})}$.

Utilisant les notations du paragraphe précédent (II.3.1), lorsque S est une \widetilde{K} -variété rigide-analytique, $\gamma \in \mathrm{GL}_d(K)$ envoie $(M_{i,Y} \subset K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}})_i, S_{n,i,Y} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\mathrm{rig}}(S)$ sur

$$\begin{aligned} ((\gamma M_{i,Y})_i, S_{n,i,Y} \circ \gamma^{-1} : \gamma M_{i,Y} / z^n \gamma M_{i,Y} \xrightarrow{\gamma^{-1}} M_{i,Y} / z^n M_{i,Y} \\ \xrightarrow{S_{n,i,Y}} P^{-i} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}} / z^n P^{-i} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}}) . \end{aligned}$$

Lorsque $(M_{i,Y})_i$ est de la forme $(R_Y P^{-i} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}})_i$, on peut aussi représenter la famille $(S_{n,i,Y})_i$ à l'aide d'une seule matrice $S_{n,Y}$ (cf. 2.3.1) et γ envoie alors $(R_Y \cdot P^{-\bullet} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}}, S_{n,Y}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\mathrm{rig}}(S)$ sur $((\gamma R_Y) \cdot P^{-\bullet} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}}, S_{n,Y})$.

L'élément $\delta \in D^\times$ envoie $(M_{\bullet,Y} = R_Y \cdot P^{-\bullet} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S, S_{n,Y}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\mathrm{rig}}(S)$ sur

$$(M_{\bullet+m,Y} = R_Y \cdot P^{-\bullet-m} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S, \delta_z S_{n,Y} P^{-m}),$$

où la notation δ_z est celle du paragraphe II.2.2, $m \in \mathbb{Z}$ est l'unique entier tel que $\delta \in \mathcal{O}_D^\times \Pi^m$ et, par abus de notation, $\delta_z S_{n,Y} P^{-m}$ désigne $(\delta_z P^{-m})(P^m S_{n,Y} P^{-m}) \in (\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}} / z^n \mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}})^\times$ – en remarquant que $b \mapsto P^m b P^{-m}$ agit sur $(\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}} / z^n \mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}})^\times$; en travaillant avec un système compatible $((M_{\bullet,Y} = R_Y \cdot P^{-\bullet} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}}, S_{n,Y}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\mathrm{rig}}(S))_{n \in \mathbb{N}}$ et en posant $S_Y = \varprojlim S_{n,Y}$ comme dans le paragraphe II.2.2, la notation $\delta_z S_Y P^{-m}$ devient rigoureuse. En posant $\Delta = P^m$, cette action est donc analogue à celle de $\mathrm{GL}_d(K)$ sur la tour de Lubin-Tate, comme on l'a déjà remarqué dans le paragraphe I.4.

En particulier, l'action de δ décale de m le module de coordonnées gradué et envoie donc l'ouvert affinoïde $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n,\underline{\Delta}}^{\mathrm{rig}}$ associé à un simplexe $\underline{\Delta} = (\Lambda_i)_{i \in I(\underline{\Delta})}$ sur l'ouvert $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n,\underline{\Delta}[m]}^{\mathrm{rig}}$ associé au simplexe décalé $\underline{\Delta}[m]$ (ce simplexe décalé $\underline{\Delta}[m]$ est défini par $I(\underline{\Delta}[m]) = \{i - m; i \in I(\underline{\Delta})\}$ et $\underline{\Delta}[m] = (\Lambda_{i+m})_{i \in I(\underline{\Delta}[m])}$).

Comme du côté Lubin-Tate, on peut souhaiter travailler avec des modules de coordonnées normalisés comme dans le point 4 du théorème II.3.2. L'action ci-dessus de $\mathcal{B}^\times = \text{Stab}_{\text{GL}_d(K)}(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)$ ne respecte pas cette normalisation; avec ce point de vue, il faut alors remplacer $((\gamma R_Y)P^{-\bullet}\mathcal{O}^d, S_Y)$ par l'unique module de coordonnées normalisé $((\gamma R_Y \Gamma^{-1})P^{-\bullet}\mathcal{O}^d, S_Y \Gamma^{-1})$ qui lui soit isomorphe (où Γ est un élément uniquement déterminé de $({}^t\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)^\times = \mathcal{O}_S[[{}^tP]]^\times$).

Finalement, la donnée de descente à la Weil est le morphisme associant à

$$(M_{\bullet,Y} = R_Y \cdot P^{-\bullet}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S, S_{n,Y}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}}(S)$$

le couple $(M_{\bullet+1,Y} = R_Y P^{-\bullet-1}, PS_{n,Y} P^{-1}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}}(S[\tau])$, comme on le voit en remarquant que le module de coordonnées gradué de Y envisagé comme un \mathcal{O}_D -module formel sur $S[\tau]$ est $(M_{i+1,Y})_i$ – il en est de même du module de coordonnées gradué de $\pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D$ (cf. [G, IV. 1]), mais le module de coordonnées gradué de \mathbb{Y}_{S_0} n'est en revanche pas décalé, car \mathbb{Y}_{S_0} provient de $\iota : \widetilde{\mathcal{O}} \rightarrow S$, ce qui annule le décalage! (pour plus de précisions, voir [G], ch. IV, 1.2 et 1.3.4). Cette donnée de descente envoie elle aussi l'ouvert affinoïde $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n,\Delta}^{\text{rig}}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}}$ sur l'ouvert $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n,\Delta[1]}^{\text{rig}}$.

Remarque II.3.7. Soit $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}$ le normalisé de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\text{rig}}$ (cette notation a déjà été introduite dans le paragraphe I.5). Soit S un $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma formel π -adique⁵ muni d'un système compatible $((R_Y P^{-\bullet}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S, S_{n,Y}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}(S))_n$. On s'intéresse plus particulièrement aux cas suivants

- $S = \text{Spf } \widehat{\mathcal{O}}_L$, où $\widehat{\mathcal{O}}_L$ est le complété π -adique de l'anneau des entiers \mathcal{O}_L d'une extension algébrique (nécessairement infinie) L de \widetilde{K}
- $S = \text{Spf } \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$, où $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ est le complété π -adique de $A_{\mathcal{D}r,\infty} = \varinjlim_n A_{\mathcal{D}r,n}$.

La matrice $S_Y = \varinjlim S_{n,Y} \in (\mathcal{B} \widehat{\otimes} (\mathcal{O}_S[\pi^{-1}]))^\times$ est alors à coefficients dans $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$.

On peut donc considérer le produit $T_Y = S_Y R_Y^{-1} \in M_d(K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$, analogue à celui de la remarque II.2.4. Cette matrice T_Y vérifie l'équation $PT_Y = {}^{\tau}T_Y$, l'action de $(\gamma, \delta) \in \text{GL}_d(K) \times D^\times$ sur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}$ envoie T_Y sur $\delta_z T_Y \gamma_z^{-1}$ et la donnée de descente à la Weil envoie T_Y sur PT_Y – ces formules sont les transposées de celles qui apparaissent dans la remarque II.2.4.

Soit $T_Y = S'R'^{-1}$ (où $R' \in \text{GL}_d(K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$ et $S' \in M_d(\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S) \cap \text{GL}_d(\mathcal{O} \widehat{\otimes} (\mathcal{O}_S[\pi^{-1}]))$) est triangulaire supérieure modulo z) une autre décomposition de T_Y . On a alors $R' = R_Y b$ et $S' = S_Y b$, où $b \in (\mathcal{B} \widehat{\otimes} (\mathcal{O}_S[\pi^{-1}]))^\times \cap \text{GL}_d(K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S) =$

⁵Voire un \widetilde{K} -espace rigide-analytique généralisé, au sens de [Far1, ch. IV], si l'on veut éviter de recourir à des modèles entiers.

$(\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)^\times$. Les systèmes compatibles $(M_{\bullet, Y} = R_Y \cdot P^{-\bullet} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S, S_{n, Y})_n$ et $(R' P^{-\bullet}, S'_n \equiv S' \pmod{z^n \mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S})_n$ sont donc isomorphes. Si R_Y et R' appartiennent toutes deux à $(\underline{U}^-)^\wedge(S) = \varprojlim_m (S/(\pi^m)) = (\text{Id}_d + P^{-1} \text{diag}(\mathcal{O}_S^d)[P^{-1}]^\wedge)^\times$, on a même $b = 1$ et la décomposition est donc unique.

En se limitant pour l'instant au cas d'une base $S = \text{Spf } \widehat{\mathcal{O}}_L$ comme ci-dessus, on peut alors donner une première idée de la construction de l'isomorphisme des deux tours. Lorsque $T_X = S_X R_X^{-1} \in \text{GL}_d(K \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{O}}_L)$ est une matrice provenant de la tour de Lubin-Tate (comme dans la remarque II.2.4), on démontrera dans le chapitre V qu'il existe une décomposition ${}^t T_X = S_Y R_Y^{-1}$, donnant naissance à un point $(R_Y P^{-\bullet} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{O}}_L, S_Y)$ de la tour de Drinfeld à valeurs dans $\widehat{\mathcal{O}}_L$; réciproquement, on démontrera aussi que lorsque $T_Y = S_Y R_Y^{-1}$ provient comme ci-dessus de la tour de Drinfeld, il existe une (unique) décomposition ${}^t T_Y = S_X R_X^{-1}$, où $S_X \in ({}^t \mathcal{B} \widehat{\otimes} \widehat{L})^\times$ et $R_X \in (\text{Id}_d + {}^t P^{-1} \text{diag}(\widehat{\mathcal{O}}_L^d)[{}^t P^{-1}]^\wedge)^\times$, donnant naissance à un point (R_X, S_X) de la tour de Lubin-Tate à valeurs dans $\widehat{\mathcal{O}}_L$.

II.3.3 Le recouvrement mentionné en I.5, associé aux simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\text{PGL}_d(K)$

Les simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\text{PGL}_d(K)$ sont simplement les classes d'équivalence de simplexes de l'immeuble étendu de $\text{GL}_d(K)$, pour la relation d'équivalence induite par le décalage. En associant à un tel simplexe les ouverts $\coprod_{h \in \mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, \underline{\Delta}[h]}$ et $\coprod_{h \in \mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, n, \underline{\Delta}[h]}^{\text{rig}}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, n}^{\text{rig}}$, on définit donc des recouvrements de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, n}^{\text{rig}}$, indexés par l'ensemble des simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\text{PGL}_d(K)$. Les ouverts de ces recouvrements sont visiblement stables sous l'action de D^\times et de la donnée de descente à la Weil; $\gamma \in \text{GL}_d(K)$ envoie l'ouvert associé à un simplexe $\underline{\Delta}$ sur celui associé à $\gamma \underline{\Delta}$.

A partir de maintenant, pour éviter de confondre les deux recouvrements, on notera $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, \underline{\Delta}}^0)_{\underline{\Delta} \in \mathcal{I}^{\text{ét}}}$ l'“ancien” recouvrement, indexé par l'ensemble $\mathcal{I}^{\text{ét}}$ des simplexes de l'immeuble étendu, et $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}_r, \underline{\Delta}})_{\underline{\Delta} \in \mathcal{I}}$ le “nouveau” recouvrement, indexé par l'ensemble \mathcal{I} des simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\text{PGL}_d(K)$ – on a, bien sûr, $\mathcal{I}^{\text{ét}} = \mathcal{I} \times \mathbb{Z}$, puisque chaque classe de décalage contient un unique représentant tel que $[\Lambda_i : \mathcal{O}^d] = i, \forall i \in I(\underline{\Delta})$.

Chapitre III

Tour de Lubin-Tate et domaines fondamentaux

III.1 Décomposition cellulaire de la tour

Soit C une extension de \check{K} munie d'une valuation à valeurs réelles (encore notée v) étendant celle de \check{K} et complète pour la topologie v -adique. On note $\mathcal{O}_C = \{x \in C; v(x) \geq 0\}$ l'anneau des entiers de C et \mathfrak{M}_C l'idéal de \mathcal{O}_C formé des éléments de valuation strictement positive.

Soit (X, ρ) un point de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$ à valeurs dans \mathcal{O}_C . Il existe alors un unique $(d-1)$ -uplet (u_1, \dots, u_{d-1}) tel que le \mathcal{O} -module formel X soit isomorphe à $\widehat{\mathbb{G}}_a$, muni de l'action de \mathcal{O} définie par l'action évidente de \mathbb{F}_q et par $X(\pi) = \pi + u_1\tau + \dots + u_{d-1}\tau^{d-1} + \tau^d$ (voir [D1], [HG1] ou le début de II.2).

On suppose que \mathcal{O}_C contient tous les points de torsion de X . On définit alors le module de Tate entier $T(X) = \text{Hom}(K/\mathcal{O}, X)$ et le module de Tate rationnel $V(X) = T(X) \otimes_{\mathcal{O}} K = \{s \in \text{Hom}(K, X); s(\pi^N \mathcal{O}) = 0, \text{ pour } N \gg 0\}$; en posant $s_i = s(\pi^{-i-1})$, ces modules de Tate $V(X)$ et $T(X)$ s'identifient, respectivement, à $\{(s_i)_{i \in \mathbb{Z}}; s_i \in \mathfrak{M}_C, s_i = 0 \text{ pour } i \ll 0, X(\pi)s_{i+1} = s_i\}$ et à $\{(s_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in V(X); s_{-1} = 0\}$. Le module de Tate entier $T(X)$ est un \mathcal{O} -module libre de rang d et le module de Tate rationnel $V(X)$ est donc un K -espace vectoriel de dimension d .

Proposition III.1.1. *Il existe $N \in \mathbb{N}$, ne dépendant que des valuations des u_i , tel que pour tout $s = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in V(X) - \{0\}$ et pour tout $i \geq N + \inf(\{j \in \mathbb{Z}, s_j \neq 0\})$, on ait $v(s_{i+1}) = v(s_i)/q^d$.*

Démonstration. Soit $i_0 = \inf(\{j \in \mathbb{Z}, s_j \neq 0\})$. On a $X(\pi)s_{i_0} = 0$, donc $v(s_{i_0})$ est une pente du polygone de Newton de $X(\pi)$, donc $v(s_{i_0}) < 1/(q-1)$. Pour tout $i \geq i_0$, on a donc $v(s_i) \leq 1/((q-1)q^{i-i_0})$. En effet, $v(s_{i+1})$ est une pente du polygone de Newton de $X(\pi) - s_i$ et est donc $\leq v(s_i)/q$, puisque le point $(1, 1)$ est situé au-dessus de ce polygone de Newton. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $1/((q-1)q^N) \leq \min(q^d v(u_1)/(q^d - q), \dots, q^d v(u_{d-1})/(q^d - q^{d-1}))$. Pour $i \geq i_0 + N$, le polygone

de Newton de $X(\pi) - s_i$ est alors le segment d'extrémités $(0, v(s_i))$ et $(q^d, 0)$; on a donc $v(s_{i+1}) = v(s_i)/q^d$. \square

Définition III.1.2. La valuation stabilisée de $s = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in V(X)$ est

$$\mathcal{V}(s) = \frac{1}{d} \log_q v(s_n) + n$$

pour n assez grand.

On voit facilement que \mathcal{V} est une “norme additive” (cf. [T]) sur le K -espace vectoriel $V(X)$.

La donnée d'un point de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty}^{\text{rig}}$ à valeurs dans C (c'est-à-dire, d'un système compatible $x = (x_n \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n}(\mathcal{O}_C) = \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n}^{\text{rig}}(C))_n$ équivaut à celle d'un point de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$ à valeurs dans \mathcal{O}_C , comme-ci-dessus, muni d'un isomorphisme de \mathcal{O} -modules $\mathcal{O}^d \rightarrow T(X)$. Pour tout point x de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty}^{\text{rig}}$ à valeurs dans C , on obtient ainsi une valuation sur K^d , et donc ([GI]) un point $[x]$ dans la réalisation géométrique de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\text{PGL}_d(K)$.

Définition III.1.3. Si $\underline{\Delta}$ est une facette¹ de l'immeuble, on pose

$$\mathcal{M}_{\infty, \underline{\Delta}}^{\text{rig}}(C) = \{x \in \mathcal{M}_{\infty}^{\text{rig}}(C), [x] \in \underline{\Delta}\}.$$

On notera $\underline{\Delta}_0$ la chambre de l'immeuble dont les sommets sont les classes d'homothétie des réseaux $P^j \mathcal{O}^d$, pour $j \in \mathbb{Z}$.

Proposition III.1.4.

1) On a

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, \underline{\Delta}}^{\text{rig}}(C) \cap \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, \underline{\Delta}'}^{\text{rig}}(C) &= \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, \underline{\Delta} \cap \underline{\Delta}'}^{\text{rig}}(C) \\ \text{et } (\gamma, \delta) \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, \underline{\Delta}}^{\text{rig}}(C) &= \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, \gamma \underline{\Delta}}^{\text{rig}}(C), \text{ pour } (\gamma, \delta) \in \text{GL}_d(K) \times D^\times. \end{aligned}$$

2) $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, \underline{\Delta}_0}^{\text{rig}}(C)$ est l'ensemble des points à valeurs dans C de l'image inverse de l'ouvert affinoïde $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathbb{B}^\times, \underline{\Delta}_0}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathbb{B}^\times}^{\text{rig}}$, formé des (x_1, \dots, x_d) tels que $v(x_i^q/x_{i+1}) \geq 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Notant $(\underline{\Delta}_0)_j$ la facette de $\underline{\Delta}_0$ obtenue en omettant le sommet $P^{-j} \mathcal{O}^d$, le sous-ensemble $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, (\underline{\Delta}_0)_j}^{\text{rig}}(C) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, \underline{\Delta}_0}^{\text{rig}}(C)$ est celui défini par la condition $v(x_j^q/x_{j+1}) = 0$.

¹Dans la mesure où on travaille dans ce paragraphe avec la réalisation géométrique de l'immeuble, pour éviter des confusions avec le point de vue (simplicial) du chapitre II, on préférera y parler de *facettes* et de *chambres* plutôt que de *simplexes* et de *simplexes maximaux*.

- 3) Plus généralement, pour toute facette $\underline{\Delta}$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}}^{\text{rig}}(C)$ est l'ensemble des points à valeurs dans C de l'image inverse d'un ouvert affinoïde

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n_{\mathcal{LT}}(\underline{\Delta}),\underline{\Delta}}^{\text{rig}} \quad \text{de} \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n_{\mathcal{LT}}(\underline{\Delta})}^{\text{rig}},$$

où $n_{\mathcal{LT}}(\underline{\Delta})$ est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + \pi^n M_d(\mathcal{O}))^\times$ stabilise $\underline{\Delta}$.

- 4) L'image inverse dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty}^{\text{rig}}$ de tout ouvert affinoïde connexe $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{LT}}^{\text{rig}}$ est incluse dans une réunion finie d'ouverts $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}}^{\text{rig}}$.
- 5) Le recouvrement admissible $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}}^{\text{rig}})_{\underline{\Delta} \in \mathcal{I}}$ de la tour de Lubin-Tate est pur (au sens de la définition I.5.2).

Démonstration. Le premier point est évident. Pour démontrer le deuxième, on se donne un point x de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}_0}^{\text{rig}}(C)$ et on note (x_1, \dots, x_d) son image dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}^{\text{rig}}(C) \simeq \mathfrak{M}_C^d$ (cf. II.2). La première partie du point 2) résulte alors de l'équivalence des assertions suivantes:

- (i) x appartient à $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}_0}^{\text{rig}}(C)$.
- (ii) Il existe $V_1, \dots, V_d \in \mathbb{R}$, avec $V_1 \geq V_2 \geq \dots \geq V_d \geq V_1 - 1$, tels que pour tout $s \in V(X)$ non nul, $\mathcal{V}(s) = i + V_j$, où $i = \inf(\{i \in \mathbb{Z}, s_i \neq 0\})$ et $j = \inf(\{j \in \{1, \dots, d\}, (\tau - x_j) \cdots (\tau - x_1) s_i = 0\})$.
- (iii) Il existe une suite périodique $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ dans \mathbb{R}_+^* , avec $qw_i \geq w_{i+1}$ pour tout i , telle que pour tout point de torsion non nul y de X , $v(y) = w_i/q^i$, où i est le plus petit entier tel que $(\tau - x_i) \cdots (\tau - x_1)y = 0$.
- (iv) On a $v(x_i^q/x_{i+1}) \geq 0$, pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

On verra, de plus, que $w_i = qv(x_i)/(q-1)$ et pour $k \in \{1, \dots, d\}$, on a $V_k = (\log_q(w_k) - k)/d$, ce qui entraînera le complément concernant $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,(\underline{\Delta}_0)_j}^{\text{rig}}(C)$.

L'équivalence entre (i) et (ii) résulte de la définition de la valuation normalisée: les entiers i et j associés à s dans (ii) sont tels que l'image de s dans K^d appartient à $P^{d(i+1)-j}\mathcal{O}^d$, mais pas à $P^{d(i+1)-j+1}\mathcal{O}^d$. De plus, $V_1 - V_2, \dots, V_d - V_1 + 1$ sont simplement les coordonnées barycentriques de $[x]$ dans $\underline{\Delta}_0$ - vu comme enveloppe convexe des sommets $P^{-1}\mathcal{O}^d, \dots, P^{-d}\mathcal{O}^d = \mathcal{O}^d$, pris dans cet ordre.

Il est facile de voir que (iii) implique (ii). Pour démontrer que (ii) implique (iii), on se donne y comme dans (iii) et on écrit $i = nd + k$, avec $k \in \{1, \dots, d\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Il résulte de (ii) et de l'uniformité de N dans la proposition III.1.1 que, pour m assez grand, tous les antécédents z de y par $X(\pi)^m$ vérifient $\log_q(v(z)) = d(V_k - n - m)$. En effet, $z = s_m$ pour un certain $s \in V(X)$ tel que $s_0 = y$. Alors $d\mathcal{V}(s) = \log_q(v(z)) + md$ est aussi égal, par (ii), à $d(-n + V_k)$. Comme y est le produit de ses antécédents par $X(\pi)^m$, on a $\log_q(v(y)) = d(V_k - n) = \log_q(w_k) - k - nd = \log_q(w_i) - i$.

Supposons (iii) et démontrons (iv). Soit $i \in \{1, \dots, d\}$ et a non nul dans le noyau de $\tau - x_i$. On a $x_i = a^{q-1}$ et donc $v(x_i) = (q-1)v(a)$. Pour tout $y \in \mathfrak{M}_C$ tel que $(\tau - x_{i-1}) \cdots (\tau - x_1)y = a$, on a $v(y) = w_i/q^i$. Comme a est le produit de ses antécédents par $(\tau - x_{i-1}) \cdots (\tau - x_1)$, on a $v(a) = w_i/q$, et donc $v(x_i) = (q-1)w_i/q$.

Supposons (iv) et démontrons (iii), avec $w_i = qv(x_i)/(q-1)$. Soit y tel que $(\tau - x_i) \cdots (\tau - x_1)y = 0$, mais tel que $z_1 = (\tau - x_{i-1}) \cdots (\tau - x_1)y$ soit non nul. On a $z_1^{q-1} = x_i$ et donc $v(z_1) = v(x_i)/(q-1)$. De plus, $z_2 = (\tau - x_{i-2}) \cdots (\tau - x_1)y$ vérifie $z_2^q - x_{i-1}z_2 = z_1$ et le polygone de Newton est un segment de pente $v(z_1)/q$, car $v(x_{i-1}) \geq v(x_i)/q = (q-1)v(z_1)/q$. Donc $v(z_2) = v(x_i)/(q-1)q$. Alors $z_3 = (\tau - x_{i-3}) \cdots (\tau - x_1)y$ vérifie $z_3^q - x_{i-2}z_3 = z_2$ et le polygone de Newton est un segment de pente $v(z_2)/q$, car $v(x_{i-2}) \geq v(x_i)/q^2 = (q-1)v(z_2)/q$. Donc $v(z_3) = v(x_i)/((q-1)q^2)$. On continue ainsi jusqu'à $z_i = y$ et on trouve $v(y) = v(x_i)/((q-1)q^{i-1}) = w_i/q^i$.

Le point (3) de la proposition résulte simplement de l'énoncé d'équivariance du point (1) (et du fait que l'image inverse de l'affinoïde $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times, \underline{\Delta}_0}^{\text{rig}}$ par le morphisme d'oubli $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, n}^{\text{rig}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \mathcal{B}^\times}^{\text{rig}}$ est affinoïde).

Pour démontrer le point (4), on se donne un ouvert affinoïde \mathcal{U} de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}}^{\text{rig}}$ et on va vérifier que lorsque x parcourt l'image inverse de \mathcal{U} dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty}^{\text{rig}}(C)$, le point $[x]$ de l'immeuble reste à une distance bornée de $\underline{\Delta}_0$. D'abord, les valuations des u_i sont bornées inférieurement par $\varepsilon > 0$ sur \mathcal{U} . Dans la proposition III.1.1 l'entier N peut donc être fixé lorsque x varie. Il reste donc à démontrer que pour $s \in T(X)$ tel que $s_0 \neq 0$, $v(s_N)$ est bornée inférieurement par $\delta > 0$ lorsque x varie. Mais on a $X(\pi)s_{i+1} = s_i$, d'où

$$v(s_{i+1}) \geq \min(v(s_i)/q^d, 1/(q^d - 1), v(u_1)/(q^d - q), \dots, v(u_{d-1})/(q^d - q^{d-1}))$$

pour $i = 0, \dots, N-1$, et

$$v(s_0) \geq \min(1/(q^d - 1), v(u_1)/(q^d - q), \dots, v(u_{d-1})/(q^d - q^{d-1})).$$

Le dernier point est une conséquence immédiate des deux premiers. \square

En appliquant au recouvrement admissible pur $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, \underline{\Delta}}^{\text{rig}})_{\underline{\Delta} \in \mathcal{I}}$ de la tour de Lubin-Tate la construction qui suit la définition I.5.2, on obtient le \mathcal{O} -schéma formel $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, \mathcal{I}}$ annoncé dans le paragraphe I.5. Ce schéma formel est alors, par construction, muni du recouvrement ouvert $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, \mathcal{I}} = \bigcup_{\underline{\Delta} \in \mathcal{I}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, \underline{\Delta}}$.

Remarque III.1.5. Laurent Fargues a obtenu un résultat beaucoup plus fort que le point (2) de la proposition ci-dessus (voir [Far2], propositions 8.2 et 8.12, ainsi que la figure 10 pour une illustration en rang $d = 3$). Pour l'énoncer, on considère une \mathcal{B} -orbite $\mathcal{B}\underline{\Delta}$ dans l'ensemble des facettes de l'immeuble de

Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$ et l'ouvert $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},N,\mathcal{B}\underline{\Delta}}^{\mathrm{rig}} = \bigcup_{b \in \mathcal{B}^\times} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},N,b\underline{\Delta}}^{\mathrm{rig}}$, défini pour $N \geq n_{\mathcal{L}\mathcal{T}}(b\underline{\Delta}), \forall b \in \mathcal{B}^\times$. Cet ouvert provient en fait d'un ouvert $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\mathcal{B}^\times,\mathcal{B}\underline{\Delta}}^{\mathrm{rig}}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\mathcal{B}^\times}$, qu'on peut aussi voir comme l'image par la correspondance de Hecke associée à une certaine double-classe $\mathcal{B}^\times \mathrm{diag}(\pi^{n_1}, \dots, \pi^{n_d}) \mathcal{B}^\times$ de l'ouvert $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\mathcal{B}^\times,\underline{\Delta}'}$ associé, comme dans III.1.4.2, à une facette $\underline{\Delta}'$ de la chambre $\underline{\Delta}_0$.

Laurent Fargues construit une décomposition simpliciale $\Delta = \bigcup_{\underline{\Delta}} \Delta(\underline{\Delta})$ du simplexe ouvert $\Delta = \{(v_1, \dots, v_d); v_i > 0, \forall i \text{ et } v_1 + \dots + v_d = 1\}$ des valuations des d -uplets (x_1, \dots, x_d) , indexée par l'ensemble des facettes de l'appartement de l'immeuble de $\mathrm{PGL}_d(K)$ associé au tore des matrices diagonales – ou, ce qui revient au même, par l'ensemble des orbites $\mathcal{B}^\times \underline{\Delta}$, comme ci-dessus. Une conséquence de sa proposition 8.12 est que l'ouvert $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\mathcal{B}^\times,\mathcal{B}\underline{\Delta}}^{\mathrm{rig}}$ est simplement celui défini par la condition $(v(x_1), \dots, v(x_d)) \in \Delta(\underline{\Delta})$ – le simplexe $\Delta(\underline{\Delta}_0)$ de sa décomposition n'est autre que le simplexe $\{qv_i - v_{i+1} \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\} \subset \Delta$ apparaissant dans le deuxième point de la proposition III.1.4, si bien que ce résultat de L. Fargues en est une généralisation.

Variante: le recouvrement associé à l'immeuble étendu

Comme en II.3 (voir en particulier II.3.3 pour les notations) on peut aussi définir un recouvrement $(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty,\underline{\Delta}}^{\mathrm{0,rig}})_{\underline{\Delta} \in \mathcal{I}^{\mathrm{ét}}}$ de la tour de Lubin-Tate, indexé par l'ensemble $\mathcal{I}^{\mathrm{ét}}$ des simplexes de l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$. Il suffit pour cela de se rappeler que la donnée d'un simplexe de l'immeuble étendu équivaut à celle d'un entier h et d'un simplexe $\underline{\Delta}$ de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$. On associe alors simplement à ce couple la partie ouverte et fermée $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,(\underline{\Delta},h)}^{\mathrm{0,rig}}$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,\underline{\Delta}}^{\mathrm{rig}}$ (pour $n \geq n_{\mathcal{L}\mathcal{T}}(\underline{\Delta})$) sur laquelle la hauteur de la quasi-isogénie ρ est h . Ce recouvrement a, bien sûr, encore les propriétés énoncées dans la proposition III.1.4. Le schéma formel $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty,\mathcal{I}}$ est aussi, évidemment, muni d'un recouvrement ouvert $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty,\mathcal{I}} = \bigcup_{\underline{\Delta} \in \mathcal{I}^{\mathrm{ét}}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty,\underline{\Delta}}^{\mathrm{0,rig}}$ analogue.

III.2 Le domaine fondamental

Notant $\widetilde{K}\{X_1, \dots, X_n\}$ la \widetilde{K} -algèbre des séries en les variables X_1, \dots, X_n convergentes sur le polydisque fermé $\{v(X_i) \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$, l'affinoïde $\mathcal{V} = \{v(x_i^q/x_{i+1}) \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\} \subset \mathrm{Spf} \mathcal{O}[[x_1, \dots, x_d]]/(x_1 \cdots x_d - (-1)^d \pi)^{\mathrm{rig}}$ s'écrit aussi

$$\mathrm{Spm} \widetilde{K}\{x_1, \dots, x_d, z_1, \dots, z_d\}/(x_1 \cdots x_d - (-1)^d \pi, (z_i x_{i+1} - x_i^q)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}).$$

En utilisant le monoïde \mathbb{M} de II.3.1 et en envoyant $e^{(q-1)e_i}$ sur

$$x_i, \quad e^{(q-1)(qe_i - e_{i+1})} \quad \text{sur} \quad z_i = x_i^q/x_{i+1} \quad \text{et} \quad \pi \quad \text{sur} \quad (-1)^d e^{(q-1)(e_1 + \dots + e_d)},$$

la complétée $e^{(q-1)(e_1 + \dots + e_d)}$ -adique de la $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbre $\overline{\mathbb{F}}_q[(q-1)\mathbb{M}]$ fournit un modèle entier $\mathrm{Spf} \overline{\mathbb{F}}_q[(q-1)\mathbb{M}]^\wedge$ de \mathcal{V} . Ce modèle entier est normal, d'après le lemme II.3.6, et $\overline{\mathbb{F}}_q[(q-1)\mathbb{M}]^\wedge$ s'identifie donc à la $\check{\mathcal{O}}$ -sous-algèbre de

$$\check{K}\{x_1, \dots, x_d, z_1, \dots, z_d\}/(x_1 \cdots x_d - (-1)^d \pi, (z_i x_{i+1} - x_i^q)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}})$$

formée des fonctions prenant des valeurs entières en tout point de \mathcal{V} .

Comme du côté Drinfeld (cf. II.3.1), on pose $A_{\mathcal{LT}} = \overline{\mathbb{F}}_q[(q-1)\mathbb{M}]^\wedge$ et on définit $A_{\mathcal{LT},n}$ comme la normalisation de $A_{\mathcal{LT}}$ dans

$$A_{\mathcal{LT}}[(s_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 0 \leq j \leq nd-1}, \pi^{-1}]/\mathcal{I}_{\mathcal{LT},n},$$

où l'on note $\mathcal{I}_{\mathcal{LT},n}$ l'idéal engendré par les $s_{i,j}^q - x_{i-j} s_{i,j} - s_{i,j-1}$, pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq nd-1$, et par les $s_{i,0}^{q-1} - x_i$, pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Utilisant la variante² $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \mathcal{B}_n^\times}$ introduite dans la remarque II.2.3, le $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \mathcal{B}_n^\times, \Delta_0} = \coprod_{h \in \mathbb{Z}} \mathrm{Spf} A_{\mathcal{LT},n}$ est alors le modèle entier affine normal de $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \mathcal{B}_n^\times, \Delta_0}^{\mathrm{rig}} = \check{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \mathcal{B}_n^\times}^{\mathrm{rig}} \times_{\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \mathcal{B}_n^\times}^{\mathrm{rig}}} \check{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \mathcal{B}^\times, \Delta_0}^{\mathrm{rig}}$, obtenu par normalisation de $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \mathcal{B}^\times, \Delta_0} = \coprod_{h \in \mathbb{Z}} \mathrm{Spf} A_{\mathcal{LT}}$ dans $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \mathcal{B}_n^\times}^{\mathrm{rig}}$. La composante

$$(h, \mathrm{Spf} A_{\mathcal{LT}}) \subset \check{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \mathcal{B}_n^\times, \Delta_0}$$

n'est autre que l'ouvert $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \mathcal{B}_n^\times, P^{-\bullet-h}\mathcal{O}^d}^0$ associé au simplexe $P^{-\bullet-h}\mathcal{O}^d$ de l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$.

Comme en II.3.1, on observe que $\mathcal{B}_n^\times = (\mathrm{Id}_d + \mathcal{B}P^{nd})^\times$ et $A_{\mathcal{LT},n}$ ont en fait un sens lorsque n est seulement un multiple entier de $1/d$; la $\check{\mathcal{O}}$ -algèbre $A_{\mathcal{LT},1/d}$ n'est autre que la complétée π -adique de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}]$.

²On rappelle que cette variante est intermédiaire entre $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$ et $\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n+1}$. Comme on s'intéresse en fait à $A_{\mathcal{LT},\infty} = \bigcup_n A_{\mathcal{LT},n}$, le choix de cette variante de la tour $(\check{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n})_n$ est parfaitement inoffensif.

Chapitre IV

Réduction aux domaines fondamentaux

Dans ce chapitre, nous allons d'abord énoncer un théorème établissant l'existence d'un isomorphisme $\varphi_{\text{Fond.}} = \varphi_{P-\bullet\mathcal{O}^d}$ des domaines fondamentaux des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld ayant certaines propriétés – il sera facile de vérifier qu'il peut exister au plus un isomorphisme ayant ces propriétés. Admettant momentanément ce théorème, dont la démonstration sera donnée dans le chapitre V, on construira ensuite par recollement l'isomorphisme du théorème I.5.3, en utilisant la propriété d'unicité de l'isomorphisme $\varphi_{\text{Fond.}}$.

IV.1 Énoncé du théorème

Soient $A_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\mathcal{L}\mathcal{T},n}$, $A_{\mathcal{D}r,\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\mathcal{D}r,n}$ et $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$ et $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ leurs complétées π -adiques respectives.

On dispose donc, du côté Lubin-Tate (*cf.* II.2),

- d'une matrice

$$R_{\mathcal{L}\mathcal{T}} = R_X = \text{Id}_d + \sum_{j \geq 1} \text{diag}(r_{1,j}^{\mathcal{L}\mathcal{T}}, \dots, r_{d,j}^{\mathcal{L}\mathcal{T}}) {}^tP^{-j},$$

à coefficients dans $K \widehat{\otimes} A_{\mathcal{L}\mathcal{T},0}$ (et *a fortiori*, dans $K \widehat{\otimes} \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$) et possédant une matrice inverse $R_{\mathcal{L}\mathcal{T}}^{-1}$ appartenant elle aussi au complété π -adique $(\text{Id}_d + \text{diag}(A_{\mathcal{L}\mathcal{T},0}^d[{}^tP^{-1}] {}^tP^{-1}))^\wedge$

- d'une matrice

$$S_{\mathcal{L}\mathcal{T}} = S_X = \sum_{j \geq 0} \text{diag}(s_{1,j}^{\mathcal{L}\mathcal{T}}, \dots, s_{d,j}^{\mathcal{L}\mathcal{T}}) {}^tP^j$$

à coefficients dans $\mathcal{O} \widehat{\otimes} A_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$, possédant une matrice inverse $S_{\mathcal{L}\mathcal{T}}^{-1}$ à coefficients dans $\mathcal{O} \widehat{\otimes} (A_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}[\pi^{-1}])$, qui est elle aussi triangulaire inférieure modulo z

- du produit $T_{\mathcal{L}\mathcal{T}} = S_{\mathcal{L}\mathcal{T}} R_{\mathcal{L}\mathcal{T}}^{-1}$, que l'on a déjà considéré dans la remarque II.2.4; c'est une matrice à coefficients dans $K \widehat{\otimes} \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$.

De même, du côté Drinfeld, on dispose (cf. II.3)

- d'une matrice

$$R_{\mathcal{D}r} = R_X = \text{Id}_d + \sum_{j \geq 1} P^{-j} \text{diag}(r_{1,j}^{\mathcal{D}r}, \dots, r_{d,j}^{\mathcal{D}r}),$$

à coefficients dans $K \widehat{\otimes} A_{\mathcal{D}r,0}$ (et *a fortiori*, dans $K \widehat{\otimes} \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$) et possédant une matrice inverse $R_{\mathcal{D}r}^{-1}$ appartenant elle aussi au complété π -adique $(\text{Id}_d + \text{diag}(A_{\mathcal{D}r,0}^d [P^{-1}] P^{-1}) \widehat{})$

- d'une matrice

$$S_{\mathcal{D}r} = S_X = \sum_{j \geq 0} P^j \text{diag}(s_{1,j}^{\mathcal{D}r}, \dots, s_{d,j}^{\mathcal{D}r})$$

à coefficients dans $\mathcal{O} \widehat{\otimes} A_{\mathcal{D}r,\infty}$, possédant une matrice inverse $S_{\mathcal{D}r}^{-1}$ à coefficients dans $\mathcal{O} \widehat{\otimes} (A_{\mathcal{D}r,\infty}[\pi^{-1}])$ qui est elle aussi triangulaire supérieure modulo z

- du produit $T_{\mathcal{D}r} = S_{\mathcal{D}r} R_{\mathcal{D}r}^{-1}$, que l'on a déjà considéré dans la remarque II.3.7; c'est une matrice à coefficients dans $K \widehat{\otimes} \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$.

Pour tout simplexe $\underline{\Delta}$ de l'immeuble étendu de $\text{GL}_d(K)$, on note $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty,\underline{\Delta}} = \varprojlim_n \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n,\underline{\Delta}}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,\underline{\Delta}} = \varprojlim_n \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n,\underline{\Delta}}$ les limites projectives complétées.

On a alors le résultat suivant, dont la démonstration est reportée au chapitre V (sauf pour la partie concernant l'unicité).

Théorème IV.1.1.

- 1) Il existe un unique isomorphisme de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schémas formels

$$\varphi_{P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} : \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}^0 = \text{Spf } \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty} \rightarrow \text{Spf } \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty} = \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}^0$$

tel que $\varphi_{P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}^*(T_{\mathcal{D}r}) = {}^t T_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$.

- 2) Cet isomorphisme fait se correspondre les sous-schémas fermés de $\text{Spf } \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$ et $\text{Spf } \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$, d'équations respectives $(x_i^q/x_{i+1} = 0)$ et $(y_i^{q-1} = 0)$, et induit donc un isomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi_{(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_i} : \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_i}^0 \\ &= \text{Spf } A_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}[(x_i^q/x_{i+1})^{-1}] \widehat{} \rightarrow \text{Spf } A_{\mathcal{D}r,\infty}[y_i^{-1}] \widehat{} \\ &= \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_i}^0, \end{aligned}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ($\widehat{}$ désigne, bien sûr, la complétion π -adique; voir le théorème II.3.2(5) et la proposition III.1.4(2) pour les deux égalités et pour la notation $(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_i$).

On va maintenant s'intéresser à l'unicité de ce morphisme (et à celle du morphisme des sous-schémas formels ouverts complémentaires résultant du point (2) du théorème) et à ses conséquences.

IV.2 Unicité de $\varphi_{P-\bullet\mathcal{O}^d}$ et de ses localisés, équivariance et recollement

Soient $I \subsetneq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $(P-\bullet\mathcal{O}^d)_I = \bigcap_{i \in I} (P-\bullet\mathcal{O}^d)_i$ le simplexe de l'immeuble étendu obtenu à partir de $P-\bullet\mathcal{O}^d$ en omettant les sommets $P^{-i}\mathcal{O}^d$, pour $i \in I$ (modulo d). On considère le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi_{(P-\bullet\mathcal{O}^d)_I} : \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, (P-\bullet\mathcal{O}^d)_I}^0 \\ = \mathrm{Spf} A_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty}[(x_i^q/x_{i+1})_{i \in I}^{-1}]^\wedge \rightarrow \mathrm{Spf} A_{\mathcal{D}r, \infty}[(y_i^{-1})_{i \in I}]^\wedge \\ = \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r, \infty, (P-\bullet\mathcal{O}^d)_I}^0 \end{aligned}$$

induit par le deuxième point du théorème IV.1.1.

Pour alléger les notations, on note encore $R_{\mathcal{L}\mathcal{T}}, \dots$ les matrices à coefficients dans $K \widehat{\otimes} A_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty}[(x_i^q/x_{i+1})_{i \in I}^{-1}]^\wedge$ (resp. $K \widehat{\otimes} A_{\mathcal{D}r, \infty}[(y_i^{-1})_{i \in I}]^\wedge$) obtenues par l'extension des scalaires $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty} \rightarrow A_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty}[(x_i^q/x_{i+1})_{i \in I}^{-1}]^\wedge$ (resp. $\widehat{A}_{\mathcal{D}r, \infty} \rightarrow A_{\mathcal{D}r, \infty}[(y_i^{-1})_{i \in I}]^\wedge$). On a donc encore $\varphi_{(P-\bullet\mathcal{O}^d)_I}^*(T_{\mathcal{D}r}) = {}^t T_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$.

Il résulte de la proposition suivante que le morphisme $\varphi_{(P-\bullet\mathcal{O}^d)_I}$ est l'unique morphisme vérifiant cette propriété. La démonstration qu'on en donnera reprend (et précise) une partie de la remarque II.3.7.

Proposition IV.2.1. *Soit S est un $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schéma formel muni d'une matrice $T \in M_d(K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$. Il existe au plus un morphisme $\psi : S \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r, \infty, (P-\bullet\mathcal{O}^d)_I}$ tel que $\psi^*(T_{\mathcal{D}r}) = T$.*

Pour démontrer cette proposition, on va d'abord s'intéresser à la croissance des normes π -adiques des coefficients $r_{i,j}^*$ et $s_{i,j}^*$ des matrices R_* et S_* (pour $*$ = $\mathcal{L}\mathcal{T}$ ou $\mathcal{D}r$), ainsi qu'à celle des coefficients analogues (notés $\widetilde{r}_{i,j}^*$ et $\widetilde{s}_{i,j}^*$) pour les matrices $\widetilde{R}_* = R_*^{-1}$ et $\widetilde{S}_* = S_*^{-1}$.

Pour toute $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre A plate et intégralement close dans $A[\pi^{-1}]$, on note $\nu : A[\pi^{-1}] \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ la "semi-norme additive" de $A[\pi^{-1}]$ définie par

$$\nu(a) = \sup \{V \in \mathbb{Q} ; \pi^{-nV} a^n \in \widehat{A}_{*, \infty}, \forall n \in \mathbb{N} \cap V^{-1}\mathbb{N}\} ;$$

c'est une norme additive lorsque A ne possède pas d'élément non nul divisible par π^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou, de manière équivalente, lorsque A est séparée pour la topologie π -adique).

Pour tous $\nu_1 \leq \nu_2$ (avec $\nu_1 \in \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ et $\nu_2 \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$), on considère les $A[\pi^{-1}]$ -sous-modules $\mathcal{H}(] \nu_1, \nu_2[, A)$ et $\mathcal{H}(] \nu_1, +\infty[, A)$ de

$$A[\pi^{-1}][[z, z^{-1}]] = \{a(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j z^j; a_j \in \widehat{A}_{*, \infty}[\pi^{-1}], \forall j \in \mathbb{Z}\}$$

définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(] \nu_1, \nu_2[, A) &= \{a(z); \varliminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\nu(a_j)}{j} \geq -\nu_1 \text{ et } \varliminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\nu(a_j)}{j} \geq -\nu_2\} \\ \text{et } \mathcal{H}(] \nu_1, +\infty[, A) &= \{a(z); \varliminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\nu(a_j)}{j} \geq -\nu_1 \text{ et } a_j = 0, \forall j \leq 0\}. \end{aligned}$$

Lorsque A est l'anneau des entiers $\mathcal{A}^{\text{ent}} = \{a \in \mathcal{A}; \nu(a) \geq 0\}$ d'une algèbre de Tate $\mathcal{A}(= A[\pi^{-1}])$, le \mathcal{A} -module $\mathcal{H}(] \nu_1, +\infty[, A)$ est celui des fonctions holomorphes sur le disque ouvert $\{\nu_1 < v(z)\}$ au-dessus de $\text{Spm } \mathcal{A}$ et le \mathcal{A} -module $\mathcal{H}(] \nu_1, \nu_2[, A)$ est celui des fonctions holomorphes sur la couronne ouverte $\{\nu_1 < v(z) < \nu_2\}$ au-dessus de $\text{Spm } \mathcal{A}$, ce qui justifie la notation adoptée.

Lorsque A est séparée et complète pour la topologie π -adique, la série

$$\sum_{j=j_1+j_2} a_{j_1} b_{j_2}$$

définissant les coefficients du produit de deux séries $a(z), b(z) \in \mathcal{H}(] \nu_1, \nu_2[, A)$ converge, ce qui munit $\mathcal{H}(] \nu_1, \nu_2[, A)$ d'une structure de $A[\pi^{-1}]$ -algèbre associative et commutative.

On se donne maintenant un point $(R_{\mathcal{L}\mathcal{T}}, S_{\mathcal{L}\mathcal{T}})$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty, P^{-\bullet} \mathcal{O}^d}$ à valeurs dans A ou un point $(R_{\mathcal{D}r}, S_{\mathcal{D}r})$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r, \infty, P^{-\bullet} \mathcal{O}^d}$ à valeurs dans A .

Proposition IV.2.2. *Les matrices R_* et S_* (avec $*$ = $\mathcal{L}\mathcal{T}$ ou $\mathcal{D}r$) vérifient*

- la matrice R_* est à coefficients dans $\mathcal{H}(] 0, 1[, A)$
- la matrice S_* est à coefficients dans $\mathcal{O} \widehat{\otimes} A$ et a fortiori dans $\mathcal{H}(] 0, +\infty[, A)$
- la matrice R_* a une matrice inverse R_*^{-1} à coefficients dans $\mathcal{H}(] 0, +\infty[, A)$
- la matrice S_* a une matrice inverse S_*^{-1} à coefficients dans $\mathcal{H}(] \frac{1}{q}, +\infty[, A)$.

En particulier, les quatre matrices R_* , S_* , R_*^{-1} et S_*^{-1} sont toutes à coefficients dans la $A[\pi^{-1}]$ -algèbre $\mathcal{H}(] \frac{1}{q}, 1[, A)$.

Démonstration. La partie de l'énoncé concernant les matrices S_* est évidente. On va maintenant démontrer celle concernant les matrices R_*^{-1} .

On sait déjà que R_* admet une matrice inverse à coefficients dans $K \widehat{\otimes} A$ et on veut démontrer que cette matrice inverse est en fait à coefficients dans $\mathcal{H}(] 0, +\infty[, A)$. Du côté Lubin-Tate, cela résulte du fait que la matrice

$$[(\Phi_{\mathcal{L}\mathcal{T}} {}^t P^{-1}) ({}^t P \tau \Phi_{\mathcal{L}\mathcal{T}} {}^t P^{-2}) \dots ({}^t P^{nd-1} \tau^{nd-1} \Phi_{\mathcal{L}\mathcal{T}} {}^t P^{-nd})]$$

a ses coefficients dans $A \oplus Az^{-1} \oplus \dots \oplus Az^{-n}$, qu'elle est congrue à $R_{\mathcal{L}\mathcal{T}}^{-1}$ modulo $(x_1, \dots, x_d)^{q^{nd}}$ et que $\nu(x_i) \geq (q-1)/(q^d-1), \forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Du côté Drinfeld, on a $R_{\mathcal{D}r}^{-1} \equiv \text{Id}_d + \sum_{1 \leq j \leq d-1} P^{-j} \text{diag}(\tilde{r}_{i,j})_{1 \leq i \leq d} \pmod{\pi}$ (on rappelle qu'on a $P^{-i+d-1}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} (A/\pi A) \subset RP^{-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} (A/\pi A)$, voir II.3). La matrice

$$[\Phi_{\mathcal{D}r} \tau \Phi_{\mathcal{D}r} \dots \tau^{nd-1} \Phi_{\mathcal{D}r} (\text{Id}_d + \sum_{1 \leq j \leq d-1} P^{-j} \text{diag}(\tilde{r}_{i,j}^{q^{nd}})_{1 \leq i \leq d})]$$

est donc congrue à R^{-1} modulo $\pi^{q^{nd}}$. Elle a ses coefficients dans $A \oplus Az^{-1} \oplus \dots \oplus Az^{-n-1}$; la propriété de l'énoncé pour $R_{\mathcal{D}r}^{-1}$ en résulte.

Du côté Lubin-Tate comme du côté Drinfeld, on a $\det R_*^{-1} = (1 - \pi/z)(1 - \pi^q/z) \dots$, comme il résulte de l'équation $(1 - \pi/z) \tau \det R_*^{-1} = \det R_*^{-1}$ et du fait que $\det R_*^{-1}$ est congrue à 1 (modulo (x_1, \dots, x_d) du côté Lubin-Tate; modulo π du côté Drinfeld). La proposition pour R_* en résulte en développant $(1 - \pi^{q^n}/z)^{-1}$ en puissances de z^{-1} et en exprimant R_* comme produit de $\det R_*$ et de la transposée de la matrice des cofacteurs de R_*^{-1} .

Enfin, notant $\det S_*^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{s}_j z^j$, on a $\nu(\tilde{s}_j) = -(q-1)^{-1} - jq^{-1}$, comme on le voit en considérant l'équation $(-1)^{d-1} \pi \tilde{s}_j^q + \tilde{s}_j = (-1)^{d-1} \tilde{s}_{j-1}^q$, qui résulte elle-même de l'équation $(-1)^{d-1} (z - \pi) \tau \det S_*^{-1} = \det S_*^{-1}$ (on rappelle que $\tilde{s}_0 = (s_{1,0}^* \dots s_{d,0}^*)^{-1}$ est inversible dans $A[\pi^{-1}]$). La propriété pour S_* en résulte en exprimant S_*^{-1} comme produit de $\det S_*^{-1}$ et de la transposée de la matrice des cofacteurs de S_* . □

Remarque IV.2.3. On obtient en fait l'énoncé plus fort suivant: les coefficients des matrices R_* et S_*^{-1} sont des fonctions méromorphes sur le disque épointé $\{0 < v(z) < +\infty\}$ au-dessus de la fibre générique (au sens de Raynaud-Fargues, [Far1, ch. IV]) de $\text{Spf } A$, dont les pôles sont simples et situés, respectivement, en $z = \pi, \pi^q, \pi^{q^2}, \dots$ et en $z = \dots, \pi^{q^{-2}}, \pi^{q^{-1}}$ (ceci a un sens, car π admet alors des racines q^n -ièmes dans A , pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Démonstration de la proposition IV.2.1. Si ψ et ψ' sont deux morphismes vérifiant cette propriété, on a l'égalité $\psi'^*(S_{\mathcal{D}r}^{-1})\psi^*(S_{\mathcal{D}r}) = \psi'^*(R_{\mathcal{D}r}^{-1})\psi^*(R_{\mathcal{D}r})$ dans la $\mathcal{O}_S[\pi^{-1}]$ -algèbre (associative) $M_d(\mathcal{H}(\frac{1}{q}, 1[, \mathcal{O}_S))$. Le premier membre de cette égalité est de la forme $\sum_{j \geq 0} \text{diag}(a_{i,j})_i P^j$, alors que le second membre est de la forme $\text{Id}_d + \sum_{j \geq 1} \text{diag}(b_{i,j})_i P^{-j}$, ce qui force les deux membres à être la matrice identité; on a donc $\psi^*(S_{\mathcal{D}r}) = \psi'^*(S_{\mathcal{D}r})$ et $\psi^*(R_{\mathcal{D}r}) = \psi'^*(R_{\mathcal{D}r})$. Les points ψ et ψ' de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}r, \infty, (P-\bullet\mathcal{O}^d)_t}$ à valeurs dans S coïncident donc. □

Remarque IV.2.4. Dans la démonstration d'unicité ci-dessus, il est vraiment nécessaire d'utiliser la convergence sur une couronne commune résultant de la proposition IV.2.2, comme on s'en convainc en considérant l'exemple des deux développements

$$\begin{aligned} (z - \pi)_{]1, +\infty[}^{-1} &= -\pi^{-1}(1 + z/\pi + (z/\pi)^2 + \dots) \in \mathcal{H}([1, +\infty], \mathcal{O}) \\ \text{et } (z - \pi)_{]0, 1[}^{-1} &= z^{-1}(1 + \pi/z + (\pi/z)^2 + \dots) \in \mathcal{H}(]0, 1[, \mathcal{O}) \end{aligned}$$

de $(z - \pi)^{-1}$ et des deux décompositions distinctes

$$(z - \pi)(1 - \pi/z)_{]0,1[}^{-1} = z = (z + \pi)(1 + \pi/z)_{]0,1[}^{-1}.$$

En fait, lorsqu'on essaie d'appliquer à ces deux décompositions le raisonnement ci-dessus, on rencontre une simplification "illégitime" du type suivant.

On considère l'égalité $(z - \pi) \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j \pi^{-j-1} = 0$ dans le \mathcal{O} -module $\mathcal{O}[[z, z^{-1}]]$. On ne peut pas simplifier cette égalité en la multipliant par l'un des deux développements de $(z - \pi)^{-1}$ ci-dessus, car le produit partiel (c'est-à-dire, non partout défini) $a, b \in \mathcal{O}[[z, z^{-1}]] \mapsto ab$ ne vérifie pas l'identité $(ab)c = a(bc)$ sur son domaine de définition.

On note, respectivement, $W_{\mathcal{LT}}$ et $W_{\mathcal{Dr}}$ les données de descente de Weil du côté Lubin-Tate et du côté Drinfeld. On rappelle que ces données de descente agissent par le décalage $\underline{\Delta} \mapsto \underline{\Delta}[1]$ sur l'ensemble $\mathcal{I}^{\text{ét}}$ des simplexes de l'immeuble étendu de $\text{GL}_d(K)$ et que $\delta \in D^\times$ agit aussi sur $\mathcal{I}^{\text{ét}}$ par le décalage $\underline{\Delta} \mapsto \underline{\Delta}[v(\text{Nr } \delta)]$ (où Nr désigne, bien sûr, la norme réduite). La proposition IV.2.1 admet alors le corollaire suivant.

Corollaire IV.2.5. *Soient $I \subsetneq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $J \subsetneq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $(\gamma, \delta, n) \in \text{GL}_d(K) \times D^\times \times \mathbb{Z}$ tel que $\gamma(P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_I[n + v(\text{Nr } \delta)] = (P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_J$. Le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \infty, (P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_I}[\tau^{-n}] & \xrightarrow{(\gamma, \delta) \circ W_{\mathcal{LT}}^n} & \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{Dr}, \infty, (P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_J} \\ \varphi_{(P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_I} \downarrow & & \varphi_{(P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_J} \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \infty, (P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_I}[\tau^{-n}] & \xrightarrow{(\gamma, \delta) \circ W_{\mathcal{Dr}}^n} & \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{Dr}, \infty, (P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_J} \end{array}$$

est alors commutatif – on rappelle que les $\widetilde{\mathcal{O}}$ -schémas formels $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \infty, (P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_I}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \infty, (P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_I}[\tau^{-n}]$ (resp. $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{Dr}, \infty, (P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_I}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{Dr}, \infty, (P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_I}[\tau^{-n}]$) ont le même \mathcal{O} -schéma formel sous-jacent, ce qui donne un sens à la flèche verticale de gauche.

Démonstration. Il résulte des formules du paragraphe II.2.1 donnant l'action de $\text{GL}_d(K) \times D^\times$ et de $W_{\mathcal{LT}}$ sur la tour de Lubin-Tate que l'on a $((\gamma, \delta) \circ W_{\mathcal{LT}}^n)^* T_{\mathcal{LT}} = {}^t \gamma_z^{-1} T_{\mathcal{LT}} {}^t P^n {}^t \delta_z$ (voir la remarque II.2.4). Il résulte aussi des formules du paragraphe II.3.1 donnant l'action de $\text{GL}_d(K) \times D^\times$ et de $W_{\mathcal{Dr}}$ sur la tour de Drinfeld que l'on a $((\gamma, \delta) \circ W_{\mathcal{Dr}}^n)^* T_{\mathcal{Dr}} = \delta_z P^n T_{\mathcal{Dr}} \gamma^{-1}$ (voir la remarque II.3.7). Le corollaire en résulte en appliquant la proposition IV.2.1 aux deux morphismes de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}, \infty, (P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_I}$ vers $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{Dr}, \infty, (P^{-\bullet} \mathcal{O}^d)_J}[\tau^n]$ obtenus à partir du diagramme ci-dessus et à la matrice $T = {}^t({}^t \gamma_z^{-1} T_{\mathcal{LT}} {}^t P^n {}^t \delta_z) = \delta_z P^n {}^t T_{\mathcal{LT}} \gamma^{-1}$. \square

On considère maintenant un simplexe arbitraire $\underline{\Delta}$ de l'immeuble de Bruhat-Tits étendu de $\text{GL}_d(K)$ et on choisit un triplet $(\gamma, \delta, n) \in \text{GL}_d(K) \times D^\times \times \mathbb{Z}$ tel que

$\gamma_{\underline{\Delta}}[n+v(\text{Nr } \delta)]$ soit un sous-simplexe $(P^\bullet\mathcal{O}^d)_I$ du simplexe maximal fondamental $P^\bullet\mathcal{O}^d$. Il résulte du corollaire ci-dessus que

$$\varphi_{\underline{\Delta}} = W_{\mathcal{D}^r}^{-n} \circ (\gamma, \delta)^{-1} \circ \varphi_{(P^\bullet\mathcal{O}^d)_I} \circ (\gamma, \delta) \circ W_{\mathcal{L}^T}^n : \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}^T, \infty, \underline{\Delta}}^0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}^r, \infty, \underline{\Delta}}^0$$

ne dépend pas du choix du triplet (γ, δ, n) . On obtient de cette manière un morphisme $\text{GL}_d(K) \times D^\times$ -équivariant $(\varphi_{\underline{\Delta}} : \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}^T, \infty, \underline{\Delta}}^0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}^r, \infty, \underline{\Delta}}^0)_{\underline{\Delta} \in \mathcal{T}^{\text{ét}}}$, compatible aux données de descente de Weil¹.

Pour achever la construction de l'isomorphisme φ du théorème I.5.3 à partir de l'isomorphisme $\varphi_{P^\bullet\mathcal{O}^d}$ du théorème IV.1.1, il reste encore à vérifier que les morphismes $\varphi_{\underline{\Delta}}$ sont compatibles aux immersions ouvertes $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}^T, \infty, \underline{\Delta}'}^0 \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}^T, \infty, \underline{\Delta}}^0$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}^r, \infty, \underline{\Delta}'}^0 \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}^r, \infty, \underline{\Delta}}^0$ associées à une inclusion $\underline{\Delta}' \subset \underline{\Delta}$ de simplexes de l'immeuble étendu. En utilisant l'action de $\text{GL}_d(K) \times D^\times$, on se ramène immédiatement au cas où $\underline{\Delta}$ est un sous-simplexe du simplexe fondamental $P^\bullet\mathcal{O}^d$, pour lequel cette compatibilité est tautologique!

On achève ce paragraphe sur une remarque triviale mais rassurante.

Remarque IV.2.6. En rang $d = 1$ les tours de Drinfeld coïncident *a priori*, puisque les notions de \mathcal{O} -module formel de hauteur d et de \mathcal{O}_D -module formel spécial de hauteur d^2 se réduisent toutes deux à celle de \mathcal{O} -module formel de hauteur 1. Il résulte immédiatement de la proposition IV.2.1 que dans ce cas, l'isomorphisme φ est l'identité!

¹On n'a donc pas procédé exactement comme annoncé dans I.5, puisqu'on a travaillé avec l'immeuble étendu de $\text{GL}_d(K)$ au lieu de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\text{PGL}_d(K)$. Pour rester fidèle à la démarche annoncée dans I.5, il faudrait d'abord induire $\varphi_{(P^\bullet\mathcal{O}^d)_I}$ à la classe de décalage de $(P^\bullet\mathcal{O}^d)_I$, puis induire de ces classes de décalage à l'immeuble de Bruhat-Tits de $\text{PGL}_d(K)$. Cela revient évidemment au même!

Chapitre V

Démonstration du théorème IV.1.1

Dans ce chapitre, nous “couperons en deux” la construction de l’isomorphisme $\varphi_{P-\bullet\mathcal{O}^d} : \mathrm{Spf} \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty} \rightarrow \mathrm{Spf} \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ en introduisant (5.1) un $(\overline{\mathbb{F}}_q)$ -schéma formel affine intermédiaire $\mathrm{Spf} A_{\mathcal{I}nt}$ “classifiant” les matrices $T_{\mathcal{D}r} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P^j \mathrm{diag}(t_{i,j})$ vérifiant l’équation $PT_{\mathcal{D}r} = {}^{\tau}T_{\mathcal{D}r}$ et certaines conditions supplémentaires. Ces conditions supplémentaires seront destinées à garantir qu’elles proviennent de $\mathrm{Spf} \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ et (après transposition) de $\mathrm{Spf} \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$; elles seront en fait “dictées” par l’observation des propriétés des morphismes de produit ci-dessous.

La construction de l’isomorphisme $\varphi_{P-\bullet\mathcal{O}^d} : \mathrm{Spf} \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty} \rightarrow \mathrm{Spf} \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ se réduira alors à celle d’un diagramme

$$\mathrm{Spf} \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{produit}} \\ \xleftarrow{\text{décomposition}} \end{array} \mathrm{Spf} A_{\mathcal{I}nt} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{décomposition}} \\ \xleftarrow{\text{produit}} \end{array} \mathrm{Spf} \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}.$$

tel que les composées de deux flèches superposées soient l’identité. Les morphismes de produit seront construits en 5.2 et les morphismes de décomposition le seront en 5.3.

En fait, comme nous l’avons déjà souligné ci-dessus, $A_{\mathcal{I}nt}$ est *a priori* seulement une $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbre topologique et il restera à vérifier que les deux structures de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$ induites par les deux morphismes de décomposition coïncident. Ceci résultera de considérations sur les déterminants des matrices R_* , S_* et T_* (voir 5.4).

Enfin, nous donnerons une démonstration du point (2) du théorème IV.1.1 dans le très court paragraphe V.5.

V.1 L’anneau intermédiaire

Lorsque la matrice $T_{\mathcal{D}r} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P^j \mathrm{diag}(t_{i,j})$ vérifie l’équation $PT_{\mathcal{D}r} = {}^{\tau}T_{\mathcal{D}r}$, on a $t_{i,j-1} = t_{i,j}^q, \forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}$, et donc $t_{i,j} = t_{i,0}^{q^{-j}}$. Abandonnant l’indice 0, on notera t_i l’élément $t_{i,0}$. On introduit alors le monoïde $\mathbb{M}[q^{-1}]$ formé des

éléments de \mathbb{Q}^d dont le produit par une puissance de q est dans \mathbb{M} et la $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbre $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]$. On note t_i l'élément $e^{e_i} = e^{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}$ de cette algèbre, de sorte que l'on a aussi $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]] = \overline{\mathbb{F}}_q[t_i^{q^{-j}}, (t_i^q/t_{i+1})^{q^{-j}}]_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}}$. On introduit encore le complété $(t_1 \cdots t_d)$ -adique $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]$. La matrice $T_{\mathcal{D}r} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P^j \text{diag}(t_1^{q^{-j}}, \dots, t_d^{q^{-j}})$ et la matrice $T_{\mathcal{L}T} = {}^t T_{\mathcal{D}r}$ sont alors à coefficients dans le complété $(t_1 \cdots t_d)$ -adique de $K \widehat{\otimes} \overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]$ – ou, ce qui revient au même, dans $K \widehat{\otimes} \overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$.

Un calcul facile montre que $\det T_{\mathcal{L}T} = \det T_{\mathcal{D}r} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} t^{q^{-j}} ((-1)^{d-1} z)^j$, où t est donné par la formule suivante

$$t = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\bar{\sigma}) \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} t_i^{q^{\sigma(i)-i}},$$

où

- la somme porte sur l'ensemble des applications $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que $i \mapsto (\sigma(i) - i)$ soit périodique de période d et que $\sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} (\sigma(i) - i) = 0$
- on note $\bar{\sigma} : \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ l'application quotient et $\text{sgn}(\bar{\sigma})$ sa signature – on convient qu'elle est nulle si $\bar{\sigma}$ n'est pas une permutation.

Dans cette somme on remarque en particulier le terme $t_1 \cdots t_d$, qui correspond à $\sigma = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$. On vérifiera dans le paragraphe suivant que $t/(t_1 \cdots t_d)$ appartient à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$.

On pose alors $A_{\mathcal{I}nt} = \overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge [(t/(t_1 \cdots t_d))^{-1}]^\wedge$. Dans le paragraphe suivant, on donnera une définition équivalente de $A_{\mathcal{I}nt}$.

V.1.1 Etude de $A_{\mathcal{I}nt}$

Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{M}[q^{-1}]$, dans $\overline{\mathbb{F}}_q[(q^d - 1)^{-1} \mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ on a

$$t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d} = \prod_{i=1}^d (t_i^q/t_{i+1})^{\beta_i},$$

où les β_i sont déterminés de façon unique par les équations $q\beta_i - \beta_{i-1} = \alpha_i$. Plus explicitement, on a

$$\beta_i = \frac{q^{d-1}\alpha_i + q^{d-2}\alpha_{i-1} + \cdots + \alpha_{i-(d-1)}}{q^d - 1}.$$

Si $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ appartiennent à $\mathbb{N}[1/q]$, et si pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, on a $\gamma_i \leq \beta_i$, alors $t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}$ est divisible dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ par $\prod_{i=1}^d (t_i^q/t_{i+1})^{\gamma_i}$.

Pour montrer que $t/(t_1 \cdots t_d)$ appartient à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ nous allons établir que pour chaque σ dans l'ensemble des $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tels que $i \mapsto (\sigma(i) - i)$ soit

périodique de période d , que $\bar{\sigma} : \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ soit une permutation et que $\sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} (\sigma(i) - i) = 0$, $\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} t_i^{q^{\sigma(i)-i}} / (t_1 \cdots t_d)$ appartient à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ et tend vers 0 quand σ sort des parties finies de cet ensemble.

Pour cela, nous écrivons

$$\prod_{i=1}^d t_i^{q^{\sigma(i)-i}} / (t_1 \cdots t_d) = \prod_{i=1}^d (t_i^q / t_{i+1})^{\beta_i},$$

où

$$(q^d - 1)\beta_d = (q^{\sigma(d)-1} + q^{\sigma(d-1)-1} + \cdots + q^{\sigma(1)-1}) - (q^{d-1} + q^{d-2} + \cdots + 1)$$

et les autres β_i s'obtiennent à partir de cette formule en conjuguant σ par une translation de i dans \mathbb{Z} . Grâce à l'hypothèse que $\bar{\sigma}$ est une permutation et que $\sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} (\sigma(i) - i) = 0$, on voit facilement que $\beta_i \geq 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et, par conséquent, l'expression ci-dessus appartient bien à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$. De plus, quand σ sort des parties finies de l'ensemble des $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tels que $i \mapsto (\sigma(i) - i)$ soit périodique de période d , que $\bar{\sigma} : \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ soit une permutation et que $\sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} (\sigma(i) - i) = 0$, les β_i tendent vers $+\infty$ et donc l'expression ci-dessus tend vers 0.

Dans la suite, on notera toujours C une constante dans $\mathbb{N}^*[1/q]$ ne dépendant que de d , mais pouvant varier d'une inégalité à l'autre.

On voit facilement, par stricte convexité de la fonction $t \mapsto q^t$, que $\beta_d \geq C$ pour tout σ tel que $\sigma(\{1, 2, \dots, d\}) \neq \{1, 2, \dots, d\}$. De même on peut vérifier que pour $i \in \{1, \dots, d\}$, $\beta_i \geq C$ pour tout σ tel que $\sigma(\{i+1-d, i+2-d, \dots, i\}) \neq \{i+1-d, i+2-d, \dots, i\}$.

Par conséquent, modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_d^q/t_1)^C$, on a l'égalité:

$$t/(t_1 \cdots t_d) = \det \begin{pmatrix} t_1 & t_1^q & \cdots & t_1^{q^{d-1}} \\ t_2^{q^{-1}} & t_2 & \cdots & t_2^{q^{d-2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_d^{q^{-(d-1)}} & t_d^{q^{-(d-2)}} & \cdots & t_d \end{pmatrix} / (t_1 \cdots t_d).$$

V.1.2 Intermède: le déterminant de Moore

Nous rencontrerons par la suite de nombreux déterminants du type de celui ci-dessus. De façon générale, nous appelons

$$\text{Moore}(X_1, \dots, X_k) = \det \begin{pmatrix} X_1 & X_1^q & \cdots & X_1^{q^{k-1}} \\ X_2 & X_2^q & \cdots & X_2^{q^{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_k & X_k^q & \cdots & X_k^{q^{k-1}} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\text{Moore}(X_1, \dots, X_k) = c \prod_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k] \in \mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{F}_q)} (\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k),$$

où $c \in \mathbb{F}_q^\times$ dépend du choix des relèvements à $\mathbb{F}_q^k \setminus \{0\}$ des éléments de $\mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{F}_q)$. De façon plus précise, on a

$$\text{Moore}(X_1, \dots, X_k) = \prod_{i=1}^k \prod_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} \in \mathbb{F}_q} (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_{i-1} X_{i-1} + X_i).$$

V.1.3 Fin de l'étude de $A_{\mathcal{I}nt}$

Donc, modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_d^q/t_1)^C$, on a l'égalité:

$$t/(t_1 \cdots t_d) = \text{Moore}(t_1, t_2^{q^{-1}}, \dots, t_d^{q^{-(d-1)}})/(t_1 \cdots t_d).$$

De même, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on a, modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_i^q/t_{i+1})^C$:

$$t/(t_1 \cdots t_d) = \text{Moore}(t_{i+1}, t_{i+2}^{q^{-1}}, \dots, t_i^{q^{-(d-1)}})/(t_1 \cdots t_d).$$

Notons, pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} w_i &= \left(\prod_{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{F}_q} \frac{t_i + \alpha_1 t_{i-1}^q + \dots + \alpha_{d-1} t_{i-d+1}^{q^{d-1}}}{t_i} \right)^{q^{-(d-1)}} \\ &= \left(\prod_{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{F}_q} (1 + \alpha_1 (t_{i-1}^q/t_i) + \alpha_2 (t_{i-2}^q/t_{i-1})^q (t_{i-1}^q/t_i) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \alpha_{d-1} (t_{i-d+1}^q/t_{i-d+2})^{q^{d-2}} \dots (t_{i-1}^q/t_i)) \right)^{q^{-(d-1)}} \in \overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge. \end{aligned}$$

On en déduit facilement

$$w_i = \left(\prod_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} \in \mathbb{F}_q} \frac{t_i + \alpha_1 t_{i-1}^q + \dots + \alpha_{i-1} t_1^{q^{i-1}}}{t_i} \right)^{q^{-(i-1)}}$$

modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_d^q/t_1)^C$.

D'où $w_1 \cdots w_d = \text{Moore}(t_1, t_2^{q^{-1}}, \dots, t_d^{q^{-(d-1)}})/(t_1 \cdots t_d)$ modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_d^q/t_1)^C$.

Or, on a vu que $\text{Moore}(t_1, t_2^{q^{-1}}, \dots, t_d^{q^{-(d-1)}})/(t_1 \cdots t_d)$ est égal à $t/(t_1 \cdots t_d)$ modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_d^q/t_1)^C$.

Par conséquent, on a l'égalité $w_1 \cdots w_d = t/(t_1 \cdots t_d)$ modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_d^q/t_1)^C$.

Par permutation circulaire, cette même égalité a lieu modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_i^q/t_{i+1})^C$, pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

On obtient ainsi une nouvelle définition de $A_{\mathcal{I}nt}$:

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{I}nt} &= \overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge [(w_1 \cdots w_d)^{-1}]^\wedge \\ &= \overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge [((t_i + \alpha_1 t_{i-1}^q + \cdots + \alpha_{d-1} t_{i-d+1}^{q^{d-1}})/t_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \alpha_1, \dots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{F}_q}^{-1}]^\wedge, \end{aligned}$$

où \wedge désigne encore la complétion pour la topologie $t_1 \cdots t_d$ -adique.

Comme $t_i^{q^d-1}$ est divisible par $(t_1 \cdots t_d)^C$ dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$, on voit facilement que $A_{\mathcal{I}nt}$ est encore égal à

$$\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge [((t_i + \alpha_1 t_{i-1}^q + \cdots + \alpha_k t_{i-k}^{q^k})/t_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}_q}^{-1}]^\wedge.$$

V.2 Produit

On se propose maintenant de construire des morphismes d'anneaux $A_{\mathcal{I}nt} \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty}$ et $A_{\mathcal{I}nt} \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{D}r, \infty}$ tels que les $t_i^{q^j}$ aient pour images les coefficients de $S_{\mathcal{L}\mathcal{T}} R_{\mathcal{L}\mathcal{T}}^{-1}$ et de $S_{\mathcal{D}r} R_{\mathcal{D}r}^{-1}$.

Dans ce paragraphe, on écrira souvent des quotients d'éléments de $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty}$ ou de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r, \infty}$, ce qui pose *a priori* un problème, puisqu'on ne sait pas encore que ces algèbres sont intègres (on le saura seulement lorsqu'on aura achevé la démonstration du théorème IV.1.1!). En fait, les $\check{\mathcal{O}}$ -algèbres $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty}$ et $\widehat{A}_{\mathcal{D}r, \infty}$ sont plates par construction et les dénominateurs de ces quotients seront toujours des diviseurs de π . Ces quotients auront donc un sens bien déterminé; ce seront en fait des éléments de $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty}[\pi^{-1}]$ ou de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r, \infty}[\pi^{-1}]$.

V.2.1 Le produit côté Lubin-Tate

Comme dans le chapitre IV, on pose $T_{\mathcal{L}\mathcal{T}} = S_{\mathcal{L}\mathcal{T}} R_{\mathcal{L}\mathcal{T}}^{-1}$. La matrice $T_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$ vérifie l'équation ${}^\tau T_{\mathcal{L}\mathcal{T}} = T_{\mathcal{L}\mathcal{T}} {}^t P$ et est donc de la forme

$$T_{\mathcal{L}\mathcal{T}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \text{diag}(t_1^{q^{-j}}, \dots, t_d^{q^{-j}}) {}^t P^j$$

où les $t_i^{q^{-j}}$ appartiennent à $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T}, \infty}$ et sont des racines q^j -ièmes des t_i . Plus précisément, en notant $R_{\mathcal{L}\mathcal{T}}^{-1} = \text{Id}_d + \sum_{j \geq 1} \text{diag}(\tilde{r}_{i,j})_{1 \leq i \leq d} {}^t P^{-j}$ et $\tilde{r}_{i,0} = 1, \forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, on a, pour $j \geq 0$:

$$\begin{aligned} t_i^{q^{-j}} &= s_{i,j} + s_{i,j+1} \tilde{r}_{i-j-1,1} + s_{i,j+2} \tilde{r}_{i-j-2,2} + \cdots \\ \text{et } t_i^{q^j} &= s_{i,0} \tilde{r}_{i,j} + s_{i,1} \tilde{r}_{i-1,j+1} + \cdots \end{aligned}$$

Lemme V.2.1. *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $\frac{s_{i,j}^{q^j}}{s_{i,0}}$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$.*

Démonstration. Commençons par démontrer que $s_{i,1}^q/s_{i,0}$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$. On a les équations: $s_{i,1}^q - x_{i-1}s_{i,1} = s_{i,0}$ et $x_{i-1} = s_{i-1,0}^{q-1}$. Dans $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}[\pi^{-1}]$, on a donc $(s_{i,1}^q/s_{i,0})^q - (s_{i-1,0}^q/s_{i,0})^{q-1}(s_{i,1}^q/s_{i,0}) = 1$. Par construction, $s_{i-1,0}^q/s_{i,0}$ est entier dans $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$.

Comme $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$ est intégralement clos dans $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}[\pi^{-1}]$, on obtient aussitôt que $(s_{i,1}^q/s_{i,0})$ et $(s_{i,1}^q/s_{i,0})^{-1}$ appartiennent à $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$.

Démontrons maintenant, par récurrence sur j , que $s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0}$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$. On a $s_{i,j}^{q^{j+1}} - s_{i-j,0}^{q^j(q-1)}s_{i,j}^{q^j} = s_{i,j-1}^{q^j}$. D'où

$$(s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0})^q - (s_{i-j,0}^{q^j}/s_{i,0})^{q-1}(s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0}) = (s_{i,j-1}^{q^{j-1}}/s_{i,0})^q.$$

Or, $s_{i-j,0}^{q^j}/s_{i,0} = (s_{i-j,0}^q/s_{i-j+1,0})^{q^{j-1}}(s_{i-j+1,0}^q/s_{i-j+2,0})^{q^{j-2}} \cdots (s_{i-1,0}^q/s_{i,0})$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$ et, par hypothèse de récurrence, $s_{i,j-1}^{q^{j-1}}/s_{i,0}$ est une unité dans $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$, donc $s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0}$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$. Donc le lemme est démontré. \square

En utilisant l'expression pour $t_i^{q^{-j}}$ ($j \geq 0$) et le fait que les $\tilde{r}_{i,j}$ ($j \geq 1$) appartiennent à l'idéal topologiquement nilpotent $(x_1, \dots, x_d) = (s_{1,0}^{q-1}, \dots, s_{d,0}^{q-1})$ (puisque $R_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$ est congrue à Id_d modulo cet idéal), il en résulte facilement que $t_i = \lim_{j \rightarrow +\infty} s_{i,j}^{q^j}$ dans $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$.

Pour un usage futur (cf. 5.5), notons-en la conséquence évidente:

Proposition V.2.2. *L'élément $t_i/s_{i,0}$ est une unité dans $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$.*

Il découle de cette proposition que t_i^q/t_{i+1} appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$. On définit ainsi un morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbres $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]] \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$ en envoyant $t_i \in \overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]$ sur $t_i \in \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$. Ce morphisme est continu (pour la topologie $(t_1 \cdots t_d)$ -adique sur $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]$ et la topologie π -adique sur $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$), car $\frac{(t_1 \cdots t_d)^{q^{-1}}}{\pi}$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$. Il se prolonge donc en un morphisme continu de $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbres topologiques $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$.

Par ailleurs, on a $\det(T_{\mathcal{L}\mathcal{T}}) = \det(S_{\mathcal{L}\mathcal{T}})\det(R_{\mathcal{L}\mathcal{T}})^{-1}$. Mais $R_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$ est congrue à Id_d modulo π et $\det(R_{\mathcal{L}\mathcal{T}})$ est donc congru à 1 modulo π . L'image de t par le morphisme ci-dessus est donc congrue à $\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} s_{i,0}$ modulo π . Par conséquent, l'image de $t/(t_1 \cdots t_d)$ dans $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$ est une unité. Le morphisme

$\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$ se prolonge donc en un morphisme continu de $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbres topologiques $A_{\mathcal{I}nt} \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$.

V.2.2 Le produit côté Drinfeld

Comme dans le chapitre IV, on pose $T_{\mathcal{D}r} = S_{\mathcal{D}r} R_{\mathcal{D}r}^{-1}$. La matrice $T_{\mathcal{D}r}$ vérifie l'équation ${}^t T_{\mathcal{D}r} = P T_{\mathcal{D}r}$ et est donc de la forme

$$T_{\mathcal{D}r} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P^j \operatorname{diag}(t_1^{q^{-j}}, \dots, t_d^{q^{-j}})$$

où les $t_i^{q^{-j}}$ appartiennent à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r, \infty}$, et sont les racines q^j -ièmes des t_i . Plus précisément, en notant $R_{\mathcal{D}r}^{-1} = \operatorname{Id}_d + \sum_{j \geq 1} P^{-j} \operatorname{diag}(\tilde{r}_{i,j})_{1 \leq i \leq d}$ et $\tilde{r}_{i,0} = 1, \forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, on a, pour $j \geq 0$:

$$\begin{aligned} t_i^{q^{-j}} &= s_{i,j} + s_{i+1,j+1} \tilde{r}_{i,1} + s_{i+2,j+2} \tilde{r}_{i,2} + \dots \\ \text{et } t_i^{q^j} &= s_{i+j,0} \tilde{r}_{i,j} + s_{i+j+1,1} \tilde{r}_{i,j+1} + \dots \end{aligned}$$

Lemme V.2.3. *Pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$, $s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0}$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r, \infty}$.*

Contrairement au côté Lubin-Tate, ce n'est pas nécessairement une unité.

Démonstration. On commence par démontrer le lemme pour $s_{i,1}$. On a les équations

$$\begin{aligned} s_{i,1}^{q^d} - y_i^{q^{d-1}} s_{i+1,1}^{q^{d-1}} &= s_{i,0}^{q^{d-1}} \\ s_{i+1,1}^{q^{d-1}} - y_{i+1}^{q^{d-2}} s_{i+2,1}^{q^{d-2}} &= s_{i+1,0}^{q^{d-2}} \\ s_{i+2,1}^{q^{d-2}} - y_{i+2}^{q^{d-3}} s_{i+3,1}^{q^{d-3}} &= s_{i+2,0}^{q^{d-3}} \\ &\vdots \\ s_{i+d-1,1}^{q^1} - y_{i+d-1} s_{i,1} &= s_{i+d-1,0}. \end{aligned}$$

On ajoute alors la première, la deuxième multipliée par $y_i^{q^{d-1}}$, la troisième multipliée par $y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}}, \dots$, la dernière multipliée par $y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} \dots y_{i+d-2}^q$.

On obtient alors

$$\begin{aligned} s_{i,1}^{q^d} - (y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} \dots y_{i+d-1}) s_{i,1} &= s_{i,0}^{q^{d-1}} + y_i^{q^{d-1}} s_{i+1,0}^{q^{d-2}} + y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} s_{i+2,0}^{q^{d-3}} + \dots \\ &\quad \dots + y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} \dots y_{i+d-2}^q s_{i+d-1,0}. \end{aligned}$$

Or, on a

$$y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} \dots y_{i+d-1} = s_{i,0}^{q^{d-1}}$$

et

$$\begin{aligned} y_i^{q^{d-1}} s_{i+1,0}^{q^{d-2}} &= s_{i,0}^{q^{d-1}} y_i^{q^{d-2}(q-1)} \\ y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} s_{i+2,0}^{q^{d-3}} &= s_{i,0}^{q^{d-1}} (y_i^{q^{d-2}} y_{i+1}^{q^{d-3}})^{q-1} \\ &\vdots \\ y_i^{q^{d-1}} \dots y_{i+d-2} s_{i+d-1,0} &= s_{i,0}^{q^{d-1}} (y_i^{q^{d-2}} \dots y_{i+d-2})^{q-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$(s_{i,1}^q/s_{i,0})^{q^d} - s_{i,0}^{(q^d-1)(q-1)}(s_{i,1}^q/s_{i,0}) \in \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$$

et comme $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ est intégralement clos dans $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}[\pi^{-1}]$, $s_{i,1}^q/s_{i,0}$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$.

En général, on obtient par un calcul analogue que

$$s_{i,j}^{q^d} - s_{i,0}^{q^d-1} s_{i,j} = s_{i,j}^{q^d} - (y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} \cdots y_{i+d-1}) s_{i,j} = s_{i,j-1}^{q^{d-1}} + y_i^{q^{d-1}} s_{i+1,j-1}^{q^{d-1}} + \cdots$$

et donc $(s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0})^{q^d} - s_{i,0}^{(q^d-1)(q^j-1)}(s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0})$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$. Comme $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ est intégralement clos dans $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}[\pi^{-1}]$, $s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0}$ appartient donc à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$; le lemme est donc démontré. \square

Montrons que $t_i/s_{i,0}$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$. On a $t_i = \sum_{j=0}^{\infty} s_{i+j,j} \widetilde{r}_{i,j}$ et il suffit donc de vérifier que pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$, $s_{i+j,j} \widetilde{r}_{i,j}/s_{i,0}$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$. On a

$$s_{i+j,j}^{q^j}/s_{i+j,0} \in \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$$

$$\text{et } s_{i,0}^{q^j}/s_{i+j,0} = (s_{i,0}^q/s_{i+1,0})^{q^{j-1}} (s_{i+1,0}^q/s_{i+2,0})^{q^{j-2}} \cdots (s_{i+j-1,0}^q/s_{i+j,0}) ;$$

par conséquent,

$$s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0}^{q^j} \in [(s_{i,0}^q/s_{i+1,0})^{q^{j-1}} (s_{i+1,0}^q/s_{i+2,0})^{q^{j-2}} \cdots (s_{i+j-1,0}^q/s_{i+j,0})]^{-1} \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}.$$

Or, $\widetilde{r}_{i,j}/(y_i \cdots y_{i+j-1}) = \widetilde{r}_{i,j}/(s_{i,0}^q/s_{i+1,0})(s_{i+1,0}^q/s_{i+2,0}) \cdots (s_{i+j-1,0}^q/s_{i+j,0})$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$, comme on le voit en remarquant que l'on a

$$r_{i,j-i} = (-1)^{j-i} [(1 - r_{i,j-i}^{q-1})(1 - r_{i+1,j-i-1}^{q-1}) \cdots (1 - r_{j-1,1}^{q-1})]^{-1} y_i \cdots y_{j-1}$$

et qu'en écrivant $R^{-1} = \text{Id}_d + \sum_{k \geq 1} (-1)^k (\sum_{j \geq 1} P^j \text{diag}(r_{i,j}))^k$, on a

$$\widetilde{r}_{i,j-i} = \sum_{k \geq 1} (-1)^k \sum_{i=i_0 < \cdots < i_k=j} r_{i,i_1-i} \cdots r_{i_{k-1},j-i_{k-1}}, \quad \text{pour } j > i.$$

Il en résulte que $(s_{i+j,j} \widetilde{r}_{i,j}/s_{i,0})^{q^j}$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$; il en est alors de même de $s_{i+j,j} \widetilde{r}_{i,j}/s_{i,0}$.

Cela ne définit pas encore un morphisme continu $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$, mais on obtient déjà un morphisme (continu, car $t_i/s_{i,0}$ et donc aussi $(t_1 \cdots t_d)^{q-1}/\pi$ appartiennent à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$) $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{N}^d[q^{-1}]]^\wedge \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$. En particulier, on sait définir l'image de $t \in A_{\mathcal{I}nt}$ dans $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$. Pour prolonger ce morphisme à $A_{\mathcal{I}nt}$ (et aussi en vue d'un usage futur, cf. 5.5), on va démontrer:

Proposition V.2.4.

- 1) L'élément $t_i/s_{i,0}$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.
- 2) L'élément $t/(t_1 \cdots t_d)$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$.

Démonstration. Les arguments de V.1.1 montrent que, modulo π , t est égal dans $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ à une somme sur un ensemble fini de $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ d'expressions

$$\text{sgn}(\bar{\sigma}) \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} t_i^{q^{\sigma(i)-i}}.$$

Pour k assez grand (en fonction des termes qui apparaissent), $(\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} t_i^{q^{\sigma(i)-i}})^{q^k}$ s'écrit comme le produit d'un élément de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ par

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} (t_i/s_{i,0}) \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} s_{i,0}^{q^{\sigma(i)-i}}.$$

Mais, par les arguments du paragraphe V.1.1 (comme $s_{i,0}^q/s_{i+1,0}$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$), $\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} s_{i,0}^{q^{\sigma(i)-i}}$ est le produit d'un élément de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ par $\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} s_{i,0}$. Donc t^{q^k} est le produit d'un élément de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ par

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} (t_i/s_{i,0}) \left(\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} s_{i,0} \right)^{q^k}.$$

Par ailleurs, on a $\det(T_{\mathcal{D}r}) = \det(S_{\mathcal{D}r}) \det(R_{\mathcal{D}r})^{-1}$. Mais, $\det(R_{\mathcal{D}r}) = (1 - \pi/z)^{-1} (1 - \pi^q/z)^{-1} \dots$ – comme on le voit, en considérant le cas particulier $d = 1$ – et $\det(R_{\mathcal{D}r})$ est donc congru à 1 modulo π . Donc l'image de t par le morphisme ci-dessus est égale à $\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} s_{i,0}$ modulo π . \square

Utilisant successivement les deux parties de cette proposition, on prolonge le morphisme continu $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{N}^d[q^{-1}]]^\wedge \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ puis à $A_{\mathcal{I}nt}$ tout entier.

V.3 Décomposition

Pour construire les morphismes de décomposition, nous allons représenter les matrices $R_{\mathcal{L}\mathcal{T}}, \dots$ comme des matrices de taille infinie, dont les lignes et les colonnes seront indexées par \mathbb{Z} et dont les diagonales parallèles à la diagonale principale seront périodiques de période d . Contrairement à $M_d(K \widehat{\otimes} A_{\mathcal{I}nt})$, le $A_{\mathcal{I}nt}$ -module $M_\infty(A_{\mathcal{I}nt})$ des matrices de taille infinie “ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ” n'est pas une $A_{\mathcal{I}nt}$ -algèbre, car le produit n'y est pas partout défini; cette représentation sera cependant compatible au produit partiel évident sur $M_\infty(A_{\mathcal{I}nt})$.

En fait, ces représentations ne seront pas les mêmes du côté Lubin-Tate et du côté Drinfeld.

Du côté Lubin-Tate, on associera à toute matrice $M \in M_d(K \widehat{\otimes} A_{\mathcal{I}nt})$ la matrice de taille infinie (encore notée M dans 5.3.2) de l'action de M sur $K^d \widehat{\otimes}$

$A_{\mathcal{I}nt}$ vis-à-vis de la base (topologique) $(E_j = {}^tP^{j-1}e_1)_{j \in \mathbb{Z}}$. En particulier, tP sera représentée par la matrice obtenue en décalant Id_∞ d'un cran vers le bas, $\text{diag}(a_1, \dots, a_d)$ par la matrice diagonale périodique $\text{diag}(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et on écrira

$$R_{\mathcal{L}\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 1 & r_{i-1,1} & r_{i-1,2} & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & r_{i,1} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

et

$$S_{\mathcal{L}\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & s_{i-1,0} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & s_{i,1} & s_{i,0} & 0 & \cdots \\ \cdots & s_{i+1,2} & s_{i+1,1} & s_{i+1,0} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

les matrices à coefficients dans $A_{\mathcal{I}nt}$ obtenues en décomposant la matrice

$$T_{\mathcal{L}\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & t_{i-1} & t_{i-1}^q & t_{i-1}^{q^2} & \cdots \\ \cdots & t_i^{q^{-1}} & t_i & t_i^q & \cdots \\ \cdots & t_{i+1}^{q^{-2}} & t_{i+1}^{q^{-1}} & t_{i+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

sous la forme $S_{\mathcal{L}\mathcal{T}}R_{\mathcal{L}\mathcal{T}}^{-1}$ (dans l'écriture de ces trois matrices, on convient que le terme central est situé sur la i -ème ligne et la i -ème colonne).

Du côté Drinfeld, on associera à toute matrice $M \in M_d(K \widehat{\otimes} A_{\mathcal{I}nt})$ la matrice de taille infinie (encore notée M dans V.3.3) de l'action de M sur $K^d \widehat{\otimes} A_{\mathcal{I}nt}$, vis-à-vis de la base (topologique) $(E'_j = P^{-j+1}e_1)_{j \in \mathbb{Z}}$ – on peut d'ailleurs noter que cette représentation diffère de celle adoptée côté Lubin-Tate par une *double* transposition, portant à la fois sur les matrices de taille finie d et sur les matrices de taille infinie¹. En particulier, P sera représentée par la matrice obtenue en décalant Id_∞ d'un cran vers le haut, $\text{diag}(a_1, \dots, a_d)$ par la matrice diagonale

¹Le lecteur que cette double transposition rebuterait peut donc choisir un côté – il est plus logique de choisir la représentation (V.3.2) adaptée au côté Lubin-Tate, car le paragraphe V.3.1 (lemmes techniques) est écrit en privilégiant ce côté – et transposer systématiquement de l'autre côté. Ce point de vue a cependant aussi ses désavantages, en particulier lorsqu'on introduira une topologie sur le $A_{\mathcal{I}nt}$ -module des matrices infinies.

périodique $\text{diag}(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et on écrira

$$R_{\mathcal{D}r} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & r_{i-1,1} & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & r_{i-1,2} & r_{i,1} & 1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

et

$$S_{\mathcal{D}r} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & s_{i-1,0} & s_{i,1} & s_{i+1,2} & \cdots \\ \cdots & 0 & s_{i,0} & s_{i+1,1} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & s_{i+1,0} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

les matrices à coefficients dans $A_{\mathcal{I}nt}$, obtenues en décomposant la matrice

$$T_{\mathcal{D}r} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & t_{i-1} & t_i^{q^{-1}} & t_{i+1}^{q^{-2}} & \cdots \\ \cdots & t_{i-1}^q & t_i & t_{i+1}^q & \cdots \\ \cdots & t_{i-1}^{q^2} & t_i^q & t_{i+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

sous la forme $S_{\mathcal{D}r} R_{\mathcal{D}r}^{-1}$ (dans l'écriture de ces trois matrices, on convient là encore que le terme central est situé sur la i -ème ligne et la i -ème colonne).

Si I et J sont des parties de \mathbb{Z} , on note, pour toute matrice M dont les lignes et les colonnes sont indexées par \mathbb{Z} , $M_{I,J}$ la matrice extraite de M dont les indices de ligne sont dans I et les indices de colonnes sont dans J , en ordonnant par ordre croissant les éléments de I et de J . De plus, pour $j, k \in \mathbb{Z}$, on note $[j, k]$ l'ensemble $\{j, j+1, \dots, k\}$, si $j \leq k$, et l'ensemble vide sinon.

Pour obtenir ces décompositions, du côté Lubin-Tate comme du côté Drinfeld, nous allons extraire de la matrice T_* (avec $*$ = \mathcal{LT} ou $\mathcal{D}r$) la matrice de taille finie $T_{*,[a,b],[a,b]}$ (pour $a \leq b$ entiers) et décomposer $T_{*,[a,b],[a,b]}$ sous la forme $S_*^{a,b} (R_*^{a,b})^{-1}$, où $R_{\mathcal{LT}}^{a,b}$ et $S_{\mathcal{D}r}^{a,b}$ sont triangulaires supérieures, $S_{\mathcal{LT}}^{a,b}$ et $R_{\mathcal{D}r}^{a,b}$ sont triangulaires inférieures, et les matrices $R_*^{a,b}$ ont une diagonale principale formée de 1. Les formules donnant les coefficients des matrices issues de ces décompositions (voir 5.3.2 pour le côté Lubin-Tate et 5.3.3 pour le côté Drinfeld) les expriment comme des quotients de déterminants de matrices extraites de la matrice $T_{*,[a,b],[a,b]}$. Les coefficients des matrices $(R_*^{a,b})^{-1}$ et $(S_*^{a,b})^{-1}$ sont aussi donnés par des formules du même type.

Les dénominateurs de ces quotients seront en fait tous de la forme

$$(\text{puissance fractionnaire de } t_1 \cdots t_d) \times (\text{unité de } A_{\mathcal{I}nt}).$$

Ces quotients définiront donc des matrices inversibles $R_*^{a,b}$ et $S_*^{a,b}$ à coefficients dans $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}]$ vérifiant $T_{*,[a,b],[a,b]} R_*^{a,b} = S_*^{a,b}$.

Nous obtiendrons des majorations des normes $t_1 \cdots t_d$ -adiques des coefficients des matrices $R_*^{a,b}$, $S_*^{a,b}$ et de leurs inverses. Pour certaines de ces matrices ($S_{\mathcal{L}\mathcal{T}}^{a,b}$ et son inverse pour le côté Lubin-Tate; $R_{\mathcal{D}r}^{a,b}$ et son inverse pour le côté Drinfeld) nous obtiendrons même des estimées plus précises de ces coefficients. Il en résultera, en particulier, que les matrices $R_*^{a,b}$, $S_*^{a,b}$ et $(R_*^{a,b})^{-1}$ sont à coefficients dans $A_{\mathcal{I}nt}$.

Nous ferons ensuite tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$ et démontrerons que les coefficients des matrices $R_*^{a,b}$ et $S_*^{a,b}$ admettent tous une limite et que ces limites fournissent une solution de notre problème de décomposition.

Plus précisément, prolongeant $R_*^{a,b}$ et $S_*^{a,b}$ par 0 pour les considérer de nouveau comme des matrices infinies, la convergence $R_*^{a,b} \rightarrow R_*^{-\infty,+\infty}$ aura lieu pour la topologie de la convergence uniforme sur les colonnes, alors que la convergence $S_*^{a,b} \rightarrow S_*^{-\infty,+\infty}$ aura lieu pour la topologie de la convergence simple des coefficients. L'application $R \mapsto TR$ est continue sur son domaine de définition vis-à-vis de ces topologies (on rappelle que la norme de $A_{\mathcal{I}nt}$ est ultramétrique). L'égalité $T_* R_*^{a,b} = S_*^{a,b}$ fournira alors par passage à la limite l'égalité $T_* R_*^{-\infty,+\infty} = S_*^{-\infty,+\infty}$, qui est le but de la construction. Il sera ensuite assez facile de démontrer que $R_* = R_*^{-\infty,+\infty}$ et $S_* = S_*^{-\infty,+\infty}$ sont dans l'image de $M_d(K \widehat{\otimes} A_{\mathcal{I}nt})$ par la représentation (5.2.*).

Enfin, en utilisant les estimées des coefficients des matrices R_* , S_* et de leurs inverses mentionnées ci-dessus, nous démontrerons que le couple (R_*, S_*) définit un point de $\widetilde{\mathcal{M}}_{*,\infty,P \bullet \mathcal{O}^d}$ à valeurs dans $A_{\mathcal{I}nt}$.

Pour réaliser ce programme, nous aurons besoin des lemmes techniques suivants, concernant les déterminants de matrices extraites de $T_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$ et $T_{\mathcal{D}r}$.

V.3.1 Lemmes techniques

On va se concentrer sur le côté Lubin-Tate. Dans tous les lemmes qui vont suivre, on pose donc $T = T_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$. Pour utiliser les lemmes techniques de ce paragraphe du côté Drinfeld, il faudra donc au préalable transposer la matrice de taille infinie T .

On rappelle

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & t_{i-1} & t_{i-1}^q & t_{i-1}^{q^2} & \cdots \\ \cdots & t_i^{q^{-1}} & t_i & t_i^q & \cdots \\ \cdots & t_{i+1}^{q^{-2}} & t_{i+1}^{q^{-1}} & t_{i+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice carrée M , on note $\det(M)$ son déterminant et $\prod_{\text{diag}}(M)$ le produit de ses coefficients diagonaux.

Lemme V.3.1. *Soient I et J deux parties finies de \mathbb{Z} , de même cardinal. Alors $\det(T_{I,J}) / \prod_{\text{diag}}(T_{I,J})$ appartient à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$.*

Démonstration. On commence par établir le lemme quand I et J ont pour cardinal 2. On pose $I = \{i_1, i_2\}$ et $J = \{j_1, j_2\}$, avec $i_1 < i_2$ et $j_1 < j_2$. On a alors

$$T_{I,J} = \begin{pmatrix} t_{i_1}^{q^{j_1-i_1}} & t_{i_1}^{q^{j_2-i_1}} \\ t_{i_2}^{q^{j_1-i_2}} & t_{i_2}^{q^{j_2-i_2}} \end{pmatrix}.$$

D'où $\det(T_{I,J}) / \prod_{\text{diag}}(T_{I,J}) = 1 - (t_{i_1}^{q^{-i_1}} / t_{i_2}^{q^{-i_2}})^{q^{j_2} - q^{j_1}}$.

En remarquant qu'on a $t_{i_1}^{q^{-i_1}} / t_{i_2}^{q^{-i_2}} = \prod_{i=i_1}^{i_2-1} (t_i^q / t_{i+1}^q)^{q^{-(i+1)}}$, on obtient donc déjà ce cas particulier du lemme.

En général, soit k le cardinal de I et de J . Ecrivons $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ et $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$, avec $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ et $j_1 < j_2 < \dots < j_k$. On note \mathfrak{S}_k le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$. On a, bien sûr,

$$\det(T_{I,J}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \prod_{a=1}^k t_{i_a}^{q^{j_{\sigma(a)} - i_a}}.$$

On se propose donc de démontrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, le quotient

$$\left(\prod_{a=1}^k t_{i_a}^{q^{j_{\sigma(a)} - i_a}} \right) / \left(\prod_{a=1}^k t_{i_a}^{q^{j_a - i_a}} \right)$$

appartient à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$. En fait, en écrivant σ comme un produit de transpositions d'éléments adjacents, cela résulte du calcul ci-dessus lorsque $k = 2$.

On va cependant en donner une autre démonstration qui a l'avantage de montrer que le quotient ci-dessus est non seulement entier mais très petit, si σ est très différent de l'identité.

Tout d'abord, un calcul simple montre que

$$\left(\prod_{a=1}^k t_{i_a}^{q^{j_{\sigma(a)} - i_a}} \right) / \left(\prod_{a=1}^k t_{i_a}^{q^{j_a - i_a}} \right) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \left(t_i^q / t_{i+1}^q \right)^{\left(\sum_{a \in \{1, 2, \dots, d\}, i_a \leq i} (q^{j_{\sigma(a)} - i_a} - q^{j_a}) \right) / q^{i+1}}.$$

On note que le produit sur $i \in \mathbb{Z}$ est fini, car l'expression est nulle pour $i \notin [i_1, i_d - 1]$. Comme $t \mapsto q^t$ est strictement croissante, il est évident que

$$\sum_{a \in \{1, 2, \dots, d\}, i_a \leq i} (q^{j_{\sigma(a)} - i_a} - q^{j_a}) \geq 0$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ce qui démontre le lemme. \square

Au cours de la démonstration ci-dessus, on a aussi obtenu le complément suivant:

Complément au lemme V.3.1. *L'élément $(\prod_{a=1}^k t_{i_a}^{q^{j\sigma(a)-i_a}})/(\prod_{a=1}^k t_{i_a}^{q^{ja-i_a}})$ est divisible par*

$$\prod_{a \in \{1, \dots, k-1\} \text{ tel que } \sigma(\{1, \dots, a\}) \neq \{1, \dots, a\}} \prod_{i=i_a}^{i_{a+1}-1} (t_i^q/t_{i+1})^{(q^{ja+1}-q^{ja})/q^{i+1}}$$

dans la $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbre $\overline{\mathbb{F}}_q[[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$.

Lemme V.3.2. *Soient $j, k \in \mathbb{Z}$, avec $j \leq k$, et I une partie de \mathbb{Z} de cardinal $k-j+1$. Alors $\det(T_{I, [j, k]})/\prod_{\text{diag}} (T_{I, [j, k]})$ est une unité dans $A_{\mathcal{I}nt}$.*

Démonstration. On rappelle la formule:

$$\text{Moore}(X_1, \dots, X_k) = \prod_{i=1}^k \prod_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} \in \mathbb{F}_q} (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_{i-1} X_{i-1} + X_i).$$

Or, si $I = \{i_j, i_{j+1}, \dots, i_k\}$ avec $i_j < i_{j+1} < \dots < i_k$,

$$\det(T_{I, [j, k]}) = \left(\text{Moore}(t_{i_j}^{q^{-i_j}}, t_{i_{j+1}}^{q^{-i_{j+1}}}, \dots, t_{i_k}^{q^{-i_k}}) \right)^{q^j}.$$

On en déduit

$$\frac{\det(T_{I, [j, k]})}{\prod_{\text{diag}} (T_{I, [j, k]})} = \left(\prod_{i=j}^k \prod_{\alpha_j, \dots, \alpha_{i-1} \in \mathbb{F}_q} ((\alpha_j t_{i_j}^{q^{-i_j}} + \alpha_{j+1} t_{i_{j+1}}^{q^{-i_{j+1}}} + \dots + t_{i_i}^{q^{-i_i}})/t_{i_i}^{q^{-i_i}}) \right)^{q^j}.$$

Or, on a vu que chaque expression $(\alpha_j t_{i_j}^{q^{-i_j}} + \alpha_{j+1} t_{i_{j+1}}^{q^{-i_{j+1}}} + \dots + t_{i_i}^{q^{-i_i}})/t_{i_i}^{q^{-i_i}}$ est une unité dans $A_{\mathcal{I}nt}$. Donc le lemme est démontré. \square

Lemme V.3.3. *Soient $i \in \mathbb{Z}$ et I_1, I_2, J_1, J_2 des parties finies de $[-\infty, i-1]$ telles que I_1 et J_1 aient même cardinal, ainsi que I_2 et J_2 . Pour raccourcir l'expression qui suit, on note $H_\alpha(i, k)$ (avec $\alpha = 1$ ou 2) le couple $(I_\alpha \cup [i, k], J_\alpha \cup [i, k])$. Alors*

$$\frac{\det(T_{H_1(i, k)}) \det(T_{H_2(i, k+1)}) - \det(T_{H_1(i, k+1)}) \det(T_{H_2(i, k)})}{\prod_{\text{diag}} (T_{[i, k], [i, k]}) \prod_{\text{diag}} (T_{[i, k+1], [i, k+1]})}$$

est entier et tend vers 0 dans $\overline{\mathbb{F}}_q[[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ quand k tend vers $+\infty$ dans $\{i, i+1, \dots\}$.

Démonstration. Il résulte trivialement du lemme V.3.1 que l'expression ci-dessus est entière. Nous allons utiliser les estimées du complément au lemme V.3.1 pour

montrer qu'elle tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Nous devons montrer que pour k assez grand,

$$\frac{\det(T_{H_1(i,k)}) \det(T_{H_2(i,k+1)}) - \det(T_{H_1(i,k+1)}) \det(T_{H_2(i,k)})}{\prod_{\text{diag}} (T_{[i,k],[i,k]}) \prod_{\text{diag}} (T_{[i,k+1],[i,k+1]})}$$

est divisible par $(t_b^q/t_{b+1})^n$ dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$. Pour $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$, notons $S_{\alpha,\beta}^{n,k}$ l'ensemble des bijections $\sigma : I_\alpha \cup [i, k + \beta - 1] \rightarrow J_\alpha \cup [i, k + \beta - 1]$ telles que le cardinal de $\{j \in [i, k - 1]; j \in b(\text{mod. } d) \text{ et } \sigma(I_\alpha \cup [i, j]) \neq J_\alpha \cup [i, j]\}$ soit inférieur ou égal à $nq/(q - 1)$. Il résulte des estimées de la démonstration du lemme V.3.1 que, pour tout $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$,

$$\det(T_{I_\alpha \cup [i,k+\beta-1], J_\alpha \cup [i,k+\beta-1]}) / \prod_{\text{diag}} (T_{[i,k+\beta-1],[i,k+\beta-1]})$$

est égal modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_b^q/t_{b+1})^n$ à

$$\left(\sum_{\sigma \in S_{\alpha,\beta}^{n,k}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j \in I_\alpha \cup [i,k+\beta-1]} t_j^{q^{\sigma(j)} - q^j} \right) / \prod_{\text{diag}} (T_{[i,k+\beta-1],[i,k+\beta-1]}).$$

Pour conclure, il nous suffit de remarquer que, pour k assez grand en fonction de n ,

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\sigma \in S_{1,1}^{n,k}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j \in I_1 \cup [i,k]} t_j^{q^{\sigma(j)} - q^j} \right) \left(\sum_{\sigma \in S_{2,2}^{n,k}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j \in I_2 \cup [i,k+1]} t_j^{q^{\sigma(j)} - q^j} \right) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_{1,2}^{n,k}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j \in I_1 \cup [i,k+1]} t_j^{q^{\sigma(j)} - q^j} \right) \left(\sum_{\sigma \in S_{2,1}^{n,k}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j \in I_2 \cup [i,k]} t_j^{q^{\sigma(j)} - q^j} \right). \end{aligned}$$

Ceci résulte de l'existence d'une bijection $S_{1,1}^{n,k} \times S_{2,2}^{n,k} \rightarrow S_{1,2}^{n,k} \times S_{2,1}^{n,k}$ telle que les termes se correspondent deux à deux. On la construit de la façon suivante: étant donnés $\sigma_{1,1} \in S_{1,1}^{n,k}$ et $\sigma_{2,2} \in S_{2,2}^{n,k}$, on considère le plus petit $j \in [i, k - 1]$ congru à b modulo d et tel que $\sigma_{1,1}(I_1 \cup [i, j]) = J_1 \cup [i, j]$ et $\sigma_{2,2}(I_2 \cup [i, j]) = J_2 \cup [i, j]$. Un tel j existe car k est assez grand en fonction de n . On pose alors

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2}|_{I_1 \cup [i,j]} &= \sigma_{1,1}|_{I_1 \cup [i,j]}, \\ \sigma_{1,2}|_{[j+1,k+1]} &= \sigma_{2,2}|_{[j+1,k+1]}, \\ \sigma_{2,1}|_{I_2 \cup [i,j]} &= \sigma_{2,2}|_{I_2 \cup [i,j]}, \\ \sigma_{2,1}|_{[j+1,k]} &= \sigma_{1,1}|_{[j+1,k]}, \end{aligned}$$

ce qui fournit la bijection voulue. □

On démontre de manière analogue le lemme suivant:

Lemme V.3.4. *Soient $i \in \mathbb{Z}$ et I_1, I_2, J_1, J_2 des parties finies de $[i+1, +\infty]$ telles que I_1 et J_1 aient même cardinal, ainsi que I_2 et J_2 . Alors (en posant comme dans le lemme précédent $H_\alpha(k, i) = ([k, i] \cup I_\alpha, [k, i] \cup J_\alpha)$*

$$\frac{\det(T_{H_1(k,i)}) \det(T_{H_2(k-1,i)}) - \det(T_{H_1(k-1,i)}) \det(T_{H_2(k,i)})}{\prod_{\text{diag}} (T_{[k,i],[k,i]}) \prod_{\text{diag}} (T_{[k-1,i],[k-1,i]})}$$

est entier et tend vers 0 dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ quand k tend vers $-\infty$ dans $\{\dots, i-1, i\}$.

V.3.2 Décomposition côté Lubin-Tate

On continue à noter $T = T_{\mathcal{LT}}$. On note aussi R et S au lieu de $R_{\mathcal{LT}}$ et $S_{\mathcal{LT}}$. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, avec $a \leq b$, nous allons montrer que $T_{[a,b],[a,b]}$ s'écrit (de manière unique bien sûr) comme un produit $S^{a,b}(R^{a,b})^{-1}$, où $S^{a,b}$ est une matrice triangulaire inférieure à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ et $R^{a,b}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. En conformité avec les notations déjà introduites pour les coefficients de $R_{\mathcal{LT}}$ et $S_{\mathcal{LT}}$, on écrit les matrices $R^{a,b}$ et $S^{a,b}$ sous la forme

$$R^{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r_{a,i-1-a}^{a,b} & r_{a,i-a}^{a,b} & r_{a,i+1-a}^{a,b} & \cdots & r_{a,b-a}^{a,b} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & r_{i-1,1}^{a,b} & r_{i-1,2}^{a,b} & \cdots & r_{i-1,b-i+1}^{a,b} \\ \vdots & & \ddots & 1 & r_{i,1}^{a,b} & \cdots & r_{i,b-i}^{a,b} \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \cdots & r_{i+1,b-i-1}^{a,b} \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{a,b} = \begin{pmatrix} s_{a,0}^{a,b} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ s_{i-1,i-a-1}^{a,b} & \cdots & s_{i-1,0}^{a,b} & \ddots & & & \vdots \\ s_{i,i-a}^{a,b} & \cdots & s_{i,1}^{a,b} & s_{i,0}^{a,b} & \ddots & & \vdots \\ s_{i+1,i+1-a}^{a,b} & \cdots & s_{i+1,2}^{a,b} & s_{i+1,1}^{a,b} & s_{i+1,0}^{a,b} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ s_{b,b-a}^{a,b} & \cdots & s_{b,b-i+1}^{a,b} & s_{b,b-i}^{a,b} & s_{b,b-i-1}^{a,b} & \cdots & s_{b,0}^{a,b} \end{pmatrix}.$$

On pose $\tilde{R}^{a,b} = (R^{a,b})^{-1}$ et $\tilde{S}^{a,b} = (S^{a,b})^{-1}$; on indexe les coefficients $\tilde{r}_{i,j}^{a,b}$ et $\tilde{s}_{i,j}^{a,b}$ des matrices $\tilde{R}^{a,b}$ et $\tilde{S}^{a,b}$ comme ceux de $R^{a,b}$ et de $S^{a,b}$.

On rappelle que l'on note $E_i = {}^t P^{j-1} e_1$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Les relations $T_{[a,b],[a,b]} R^{a,b} = S^{a,b}$ et ${}^t T_{[a,b],[a,b]} \tilde{S}^{a,b} = {}^t \tilde{R}^{a,b}$, que l'on souhaite obtenir, impliquent les égalités

$$\begin{aligned} T_{[a,b],[a,b]}(E_i) + r_{i-1,1}^{a,b} T_{[a,b],[a,b]}(E_{i-1}) + \cdots + r_{a,i-a}^{a,b} T_{[a,b],[a,b]}(E_a) \\ = s_{i,0}^{a,b} E_i + s_{i+1,1}^{a,b} E_{i+1} + \cdots + s_{b,b-i}^{a,b} E_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \tilde{s}_{i,0}^{a,b} {}^t T_{[a,b],[a,b]}(\check{E}_i) + \tilde{s}_{i,1}^{a,b} {}^t T_{[a,b],[a,b]}(\check{E}_{i-1}) + \cdots + \tilde{s}_{i,i-a}^{a,b} {}^t T_{[a,b],[a,b]}(\check{E}_a) \\ = \check{E}_i + \tilde{r}_{i,1}^{a,b} \check{E}_{i+1} + \cdots + \tilde{r}_{i,b-i}^{a,b} \check{E}_b. \end{aligned}$$

En considérant successivement le produit extérieur de la première de ces deux égalités

- à gauche, par $\bigwedge_{k \in [a, i-1]} T_{[a,b],[a,b]}(E_k)$ et à droite, par $\bigwedge_{k \in [i,b] - \{i+j\}} E_k$
- à gauche, par $\bigwedge_{k \in [a, i-1] - \{i-j\}} T_{[a,b],[a,b]}(E_k)$ et à droite, par $\bigwedge_{k \in [i,b]} E_k$

puis le produit extérieur de la deuxième

- à gauche, par

$$\bigwedge_{k \in [a, i] - \{i-j\}} {}^t T_{[a,b],[a,b]}(\check{E}_k)$$

et à droite, par

$$\bigwedge_{k \in [i+1, b] - \{i+j\}} \check{E}_k$$

- à gauche, par

$$\bigwedge_{k \in [a, i] - \{i-j\}} {}^t T_{[a,b],[a,b]}(\check{E}_k)$$

et à droite, par

$$\bigwedge_{k \in [i+1, b] - \{i+j\}} \check{E}_k$$

on obtient

$$s_{i+j,j}^{a,b} = \frac{\det(T_{[a, i-1] \cup \{i+j\}, [a, i]})}{\det(T_{[a, i-1], [a, i-1]})},$$

$$r_{i-j,j}^{a,b} = (-1)^j \frac{\det(T_{[a, i-1], [a, i] - \{i-j\}})}{\det(T_{[a, i-1], [a, i-1]})},$$

$$\tilde{s}_{i,j}^{a,b} = (-1)^j \frac{\det(T_{[a, i] - \{i-j\}, [a, i-1]})}{\det(T_{[a, i], [a, i]})},$$

$$\text{et } \tilde{r}_{i,j}^{a,b} = \frac{\det(T_{[a, i], [a, i-1] \cup \{i+j\}})}{\det(T_{[a, i], [a, i]})}.$$

Il résulte du lemme V.3.2 que les dénominateurs de ces expressions sont le produit par une unité d'une puissance fractionnaire de $t_1 \cdots t_d$. On obtient donc des matrices $R^{a,b}$ et $S^{a,b}$ appartenant à $\mathrm{GL}_{b-a+1}(A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}])$. La proposition suivante entraîne en particulier que $R^{a,b}$, $S^{a,b}$ et $(R^{a,b})^{-1}$ sont en fait à coefficients dans $A_{\mathcal{I}nt}$.

Proposition V.3.5. *Les quotients*

$$\frac{s_{i+j,j}^{a,b}}{t_{i+j}^{q-j}}, \quad \tilde{s}_{i,j}^{a,b} \frac{t_{i-j} \cdots t_i}{t_{i-j+1}^{q-1} \cdots t_i^{q-1}}, \quad \frac{r_{i-j,j}^{a,b}}{(t_{i-j} \cdots t_{i-1})^{q-1}} \quad \text{et} \quad \tilde{r}_{i,j}^{a,b} t_i^{1-q^j}$$

appartiennent à $A_{\mathcal{I}nt}$; les deux premiers sont même dans $A_{\mathcal{I}nt}^\times$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des formules ci-dessus et des lemmes V.3.1 et V.3.2. \square

On remarque que $r_{i-j,j}^{a,b}$, $s_{i+j,j}^{a,b}$, $\tilde{r}_{i,j}^{a,b}$ et $\tilde{s}_{i,j}^{a,b}$ ne dépendent pas de b .

Il résulte du lemme V.3.3 que $r_{i-j,j}^{a,b}$, $s_{i+j,j}^{a,b}$, $\tilde{r}_{i,j}^{a,b}$ et $\tilde{s}_{i,j}^{a,b}$ admettent une limite dans $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}]$ quand a tend vers $-\infty$. On pose alors

$$r_{i-j,j} = \lim_{a \rightarrow -\infty} r_{i-j,j}^{a,b}, \quad s_{i+j,j} = \lim_{a \rightarrow -\infty} s_{i+j,j}^{a,b}, \\ \tilde{r}_{i,j} = \lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{r}_{i,j}^{a,b} \quad \text{et} \quad \tilde{s}_{i,j} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \tilde{s}_{i,j}^{a,b}$$

Remarque V.3.6. On aurait envie de poser

$$r_{i-j,j} = (-1)^j \frac{\det(T_{[-\infty, i-1], [-\infty, i] - \{i-j\}})}{\det(T_{[-\infty, i-1], [-\infty, i-1]})}.$$

On peut sans doute interpréter les déterminants infinis $\det(T_{[-\infty, i-1], [-\infty, i] - \{i-j\}})$ et $\det(T_{[-\infty, i-1], [-\infty, i-1]})$ comme des fonctions thêta, c'est-à-dire comme des sections d'un certain fibré (dépendant de $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$) sur la variété de drapeaux affine \mathcal{D} du chapitre II (voir [BL], [Fal2] ou [PS]).

Utilisant les coefficients $r_{i-j,j}$, $s_{i+j,j}$, $\tilde{r}_{i,j}$ et $\tilde{s}_{i,j}$ on forme des matrices R , S , \tilde{R} et \tilde{S} . On va maintenant vérifier que les égalités $R^{a,b} \tilde{R}^{a,b} = \tilde{R}^{a,b} R^{a,b} = \mathrm{Id}_{b-a+1}$, $S^{a,b} \tilde{S}^{a,b} = \tilde{S}^{a,b} S^{a,b} = \mathrm{Id}_{b-a+1}$ et $T_{[a,b], [a,b]} R^{a,b} = S^{a,b}$ passent à la limite et fournissent des égalités $R\tilde{R} = \tilde{R}R = \mathrm{Id}_\infty$, $S\tilde{S} = \tilde{S}S = \mathrm{Id}_\infty$ et $TR = S$.

En prolongeant $R^{a,b}$ (resp. \cdots) par 0, on considère ces quatre matrices comme des matrices de taille infinie, vérifiant les égalités $R^{a,b} \tilde{R}^{a,b} = \tilde{R}^{a,b} R^{a,b} = \mathrm{Id}_{[a,b]}$, $S^{a,b} \tilde{S}^{a,b} = \tilde{S}^{a,b} S^{a,b} = \mathrm{Id}_{[a,b]}$ et $TR^{a,b} = S^{a,b}$ – on peut aussi remarquer qu'en utilisant l'indépendance de b on forme des matrices $R^{a,+\infty}$ (resp. \cdots) vérifiant les égalités $R^{a,+\infty} \tilde{R}^{a,+\infty} = \tilde{R}^{a,+\infty} R^{a,+\infty} = \mathrm{Id}_{[a,+\infty[}$, $S^{a,+\infty} \tilde{S}^{a,+\infty} = \tilde{S}^{a,+\infty} S^{a,+\infty} = \mathrm{Id}_{[a,+\infty[}$ et $TR^{a,+\infty} = S^{a,+\infty}$; on pourrait aussi appliquer à ces matrices le raisonnement qui va suivre.

Lorsque a tend vers $-\infty$ et b vers $+\infty$, les matrices $R^{a,b}$, $S^{a,b}$, $\widetilde{R}^{a,b}$, $\widetilde{S}^{a,b}$ et $\text{Id}_{[a,b]}$ convergent respectivement vers R , S , \widetilde{R} , \widetilde{S} et Id_∞ pour la topologie de la convergence simple des coefficients. Les deux premières égalités $R^{a,b}\widetilde{R}^{a,b} = \widetilde{R}^{a,b}R^{a,b} = \text{Id}_{[a,b]}$ et $S^{a,b}\widetilde{S}^{a,b} = \widetilde{S}^{a,b}S^{a,b} = \text{Id}_{[a,b]}$ passent à la limite sans problème puisque les coefficients d'un produit de matrices *de taille infinie* triangulaires supérieures (resp. inférieures) sont en fait donnés par des sommes finies (de longueur ne dépendant que de la distance de ce coefficient à la diagonale principale de la matrice produit). Pour passer à la limite dans la troisième égalité, on remarque qu'il résulte du fait que $r_{i-j,j}^{a,b}$ et $r_{i-j,j}$ sont tous deux divisibles par $(t_{i-j} \cdots t_{i-1})^{q-1}$ (cf. V.3.5) et *a fortiori* par $(t_1 \cdots t_d)^{(q-1)\lfloor j/d \rfloor}$, que la i -ème colonne $(r_{j,-j+i}^{a,b})_{j \in \mathbb{Z}}$ (avec $r_{i+j,0}^{a,b} = 1$ et $r_{i+j,-j}^{a,b} = 0$ pour $j > 0$) de la matrice $R^{a,b}$ converge uniformément vers la i -ème colonne $(r_{j,-j+i})_{j \in \mathbb{Z}}$ de la matrice R . On a donc bien $TR = S$, par la propriété de continuité du produit à gauche par T mentionnée au début de 5.3.

Lorsque a est assez négatif pour que ces expressions aient un sens, on vérifie aisément que $r_{i+d,j}^{a+d,b} = r_{i+d,j}^{a,b}$, $s_{i,j}^{a,b} = s_{i+d,j}^{a+d,b}$, $\widetilde{r}_{i,j}^{a,b} = \widetilde{r}_{i+d,j}^{a+d,b}$ et $\widetilde{s}_{i,j}^{a,b} = \widetilde{s}_{i+d,j}^{a+d,b}$. Il en résulte que $r_{i,j}$, $s_{i,j}$, $\widetilde{r}_{i,j}$ et $\widetilde{s}_{i,j}$ ne dépendent que de $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On peut donc déjà considérer R , S , R^{-1} et S^{-1} comme des éléments du $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}]$ -module $\text{diag}(A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}]^d)[[{}^tP, {}^tP^{-1}]]$ ou, ce qui revient au même, comme des matrices de taille finie d à coefficients dans le $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}]$ -module

$$A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}][[z, z^{-1}]].$$

On munit $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}]$ de la norme additive $(t_1 \cdots t_d)^{q-1}$ -adique²

$$\nu : A_{\mathcal{I}nt} \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$$

et on utilise cette norme additive pour définir des $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}]$ -algèbres $\mathcal{H}(\nu_1, \nu_2[, A_{\mathcal{I}nt})$ comme dans le paragraphe IV.2. Il résulte alors de la proposition V.3.5 que les matrices R , S , R^{-1} et S^{-1} ont elles aussi les propriétés énoncées dans la proposition IV.2.2 et qu'en particulier elles ont toutes les quatre leurs coefficients dans la $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}]$ -algèbre $\mathcal{H}(\frac{1}{q}, 1[, A_{\mathcal{I}nt})$.

Soit $\Phi = R^{-1}{}^tPR$, considérée pour l'instant comme une matrice à coefficients dans $\mathcal{H}(\frac{1}{q}, 1[, A_{\mathcal{I}nt})$. Il résulte de l'égalité $T{}^tP = {}^\tau T$ que l'on a $S\Phi = {}^\tau S$ et donc aussi $\Phi = S^{-1}{}^\tau S$ (on rappelle que les matrices S et T ont leurs coefficients dans $\mathcal{H}(]0, +\infty[, A_{\mathcal{I}nt})$). En particulier, le développement $\sum_j {}^tP^j \text{diag}(\phi_{i,j})_{1 \leq i \leq d}$ de la matrice $\Phi = S^{-1}{}^\tau S = R^{-1}{}^tPR$ ne fait intervenir que des termes de degré 0 et 1 et le terme de degré 0 est tP . Pour retrouver les notations de 2.2, on renomme x_i l'élément $\phi_{i,0}$.

²définie comme la norme π -adique de 4.2, mais en remplaçant π par $(t_1 \cdots t_d)^{q-1}$. En fait, le morphisme de décomposition munit $A_{\mathcal{I}nt}$ d'une structure de \mathcal{O} -algèbre pour laquelle $\pi/(t_1 \cdots t_d)^{q-1}$ est une unité (voir quelques lignes après le signe de renvoi de cette note) si bien qu'*a posteriori* cette norme est aussi la norme π -adique.

Il résulte de l'égalité $S\Phi = \tau S$ que x_i n'est autre que $s_{i,0}^{q-1}$. En particulier, le produit $\pi = (-1)^{d-1}x_1 \cdots x_d$ est le produit de $(t_1 \cdots t_d)^{q-1}$ par une unité, ce qui munit $A_{\mathcal{I}nt}$ d'une structure de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre topologique. En remarquant que les éléments x_i , qui sont le produit de t_i^{q-1} par une unité, sont topologiquement nilpotents dans $A_{\mathcal{I}nt}$, on obtient donc déjà un point de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$ à valeurs dans $A_{\mathcal{I}nt}$. Reprenant les notations de (3.2), on définit donc un morphisme

$$\widehat{B}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty} = (\widetilde{\mathcal{O}}[[x_i]_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}][[s_{i,j}]_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}}]/\mathcal{I}'_{\mathcal{D}r,\infty})^\wedge \rightarrow A_{\mathcal{I}nt},$$

où l'on note $\mathcal{I}'_{\mathcal{D}r,\infty}$ l'idéal engendré par $\pi - (-1)^d x_1 \cdots x_d$ et par les éléments $s_{i,0}^{q-1} - x_i$ et $s_{i,j}^q - x_{i-j} s_{i,j} - s_{i,j-1}$ ($i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \geq 1$), et où \wedge désigne la complétion (x_1, \dots, x_d) -adique.

La $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre $\widehat{B}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$ est plate, puisqu'elle s'obtient à partir de la réunion d'une tour d'algèbres finies localement libres sur la $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre plate

$$B_{\mathcal{L}\mathcal{T},\mathcal{B}^\times} = \widetilde{\mathcal{O}}[[x_1, \dots, x_d]]/(x_1 \cdots x_d - (-1)^d \pi)$$

en prenant la complétion pour la topologie (x_1, \dots, x_d) -adique. Les éléments x_i , qui divisent π , ne sont donc pas des diviseurs de zéro dans $\widehat{B}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$. Le morphisme évident $\widehat{B}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty} \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$ est donc une injection et identifie $\widehat{B}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$ au complété π -adique de la sous-algèbre de $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$ engendrée par les $s_{i,j}$ (les x_i sont nilpotents modulo π dans $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$).

Il reste à vérifier que ce morphisme s'étend à $\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty} \supset \widehat{B}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty}$. Pour cela on remarque que $s_{i,0}^q/s_{i+1,0}$ est le produit de t_i^q/t_{i+1} et d'une unité de $A_{\mathcal{I}nt}$ (on rappelle qu'on a plus généralement $s_{i+j,j}/t_{i+j}^{q-j} \in A_{\mathcal{I}nt}^\times$), si bien que $s_{i,0}^q/s_{i+1,0}$ appartient à $A_{\mathcal{I}nt}$. Comme $A_{\mathcal{I}nt}$ est normal, le morphisme s'étend au normalisé et on obtient finalement le morphisme continu de $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbres topologiques

$$(\text{décomposition})^* : \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty} \rightarrow A_{\mathcal{I}nt}$$

annoncé – bien entendu, ce morphisme est même un morphisme de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbres topologiques, mais il n'y a pas grand mérite à cela, car on a défini la structure de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$ par transport de structures.

On va finalement démontrer que les morphismes

$$\widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty} \begin{array}{c} \xrightarrow{(\text{décomposition})^*} \\ \xleftarrow{(\text{produit})^*} \end{array} A_{\mathcal{I}nt}$$

sont des isomorphismes, inverses deux à deux.

On traite d'abord le cas du morphisme composé

$$C_{\mathcal{I}nt} : A_{\mathcal{I}nt} \xrightarrow{(\text{produit})^*} \widehat{A}_{\mathcal{L}\mathcal{T},\infty} \xrightarrow{(\text{décomposition})^*} A_{\mathcal{I}nt}.$$

Les matrices infinies R et S que l'on vient de construire satisfont l'identité $T_{\mathcal{LT}} = SR^{-1}$ (où $T_{\mathcal{LT}}$ est la matrice tautologique à valeurs dans $A_{\mathcal{I}nt}$). Le morphisme $C_{\mathcal{I}nt}$ est donc égal à l'identité sur les t_i . La $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbre $A_{\mathcal{I}nt}$ est intègre et le morphisme $C_{\mathcal{I}nt}$ est continu; c'est donc l'identité.

On traite maintenant le cas du morphisme composé

$$C_{\mathcal{LT},\infty} : \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty} \xrightarrow{\text{(décomposition)}^*} A_{\mathcal{I}nt} \xrightarrow{\text{(produit)}^*} \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}.$$

Un raisonnement analogue à celui qu'on a fait dans la proposition IV.2.1 (unicité de la décomposition) démontre qu'en redécomposant le produit $T = SR^{-1}$, on réobtient les matrices R et S . Le morphisme $\widehat{B}_{\mathcal{LT},\infty} \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$, obtenu en composant $C_{\mathcal{LT},\infty}$ avec l'injection évidente $\widehat{B}_{\mathcal{LT},\infty} \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$, est donc encore cette injection évidente – en particulier le morphisme $C_{\mathcal{LT},\infty}$ est donc l'identité sur les $s_{i,j}$.

La $\overline{\mathcal{O}}$ -algèbre $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ est plate, par définition (cf. 3.2). Les éléments x_i , qui divisent π , ne sont donc pas des diviseurs de zéro dans $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ et le morphisme $C_{\mathcal{LT},\infty}$ est donc aussi l'identité sur les éléments x_i^q/x_{i+1} . Soit $A'_{\mathcal{LT},\infty}$ la sous-algèbre de $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ engendrée par les $s_{i,j}$ et par les x_i^q/x_{i+1} . On rappelle (3.2) que $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ s'obtient comme complétée d'une algèbre $A_{\mathcal{LT},\infty}$, qui n'est autre que la clôture intégrale de $A'_{\mathcal{LT},\infty}$ dans $A'_{\mathcal{LT},\infty}$. Le morphisme continu $C_{\mathcal{LT},\infty}$, qui prolonge l'injection évidente $A'_{\mathcal{LT},\infty} \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ est donc l'identité, ce qui achève la démonstration.

V.3.3 Décomposition côté Drinfeld

Dans ce paragraphe, on note $T = T_{\mathcal{D}r}$, $R = R_{\mathcal{D}r}$ et $S = S_{\mathcal{D}r}$ et on les représente comme des matrices infinies sous la forme annoncée au début de (5.3).

On rappelle que

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & t_{i-1} & t_i^{q^{-1}} & t_{i+1}^{q^{-2}} & \cdots \\ \cdots & t_{i-1}^q & t_i & t_{i+1}^q & \cdots \\ \cdots & t_{i-1}^{q^2} & t_i^q & t_{i+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(c'est donc la transposée de la matrice utilisée en 5.3.1).

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, avec $a \leq b$, nous allons montrer que $T_{[a,b],[a,b]}$ s'écrit (de manière unique bien sûr) comme un produit $S^{a,b}(R^{a,b})^{-1}$, où $S^{a,b}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_q[[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ et $R^{a,b}$ est une matrice triangulaire inférieure à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_q[[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$, dont tous les coefficients

diagonaux sont égaux à 1. En conformité avec les notations déjà introduites, on écrit les matrices $R^{a,b}$ et $S^{a,b}$ sous la forme

$$R^{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ r_{a,i-a-1}^{a,b} & \cdots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ r_{a,i-a}^{a,b} & \cdots & r_{i-1,1}^{a,b} & 1 & \ddots & & \vdots \\ r_{a,i+1-a}^{a,b} & \cdots & r_{i-1,2}^{a,b} & r_{i,1}^{a,b} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ r_{a,b-a}^{a,b} & \cdots & r_{i-1,b-i+1}^{a,b} & r_{i,b-i}^{a,b} & r_{i+1,b-i-1}^{a,b} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$S^{a,b} = \begin{pmatrix} s_{a,0}^{a,b} & \cdots & s_{i-1,i-1-a}^{a,b} & s_{i,i-a}^{a,b} & s_{i+1,i+1-a}^{a,b} & \cdots & s_{b,b-a}^{a,b} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & s_{i-1,0}^{a,b} & s_{i,1}^{a,b} & s_{i+1,2}^{a,b} & \cdots & s_{b,b-i+1}^{a,b} \\ \vdots & & \ddots & s_{i,0}^{a,b} & s_{i+1,1}^{a,b} & \cdots & s_{b,b-i}^{a,b} \\ \vdots & & & \ddots & s_{i+1,0}^{a,b} & \cdots & s_{b,b-i-1}^{a,b} \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & s_{b,0}^{a,b} \end{pmatrix}.$$

On pose $\tilde{R}^{a,b} = (R^{a,b})^{-1}$ et $\tilde{S}^{a,b} = (S^{a,b})^{-1}$; on indexe les coefficients $\tilde{r}_{i,j}^{a,b}$ et $\tilde{s}_{i,j}^{a,b}$ des matrices $\tilde{R}^{a,b}$ et $\tilde{S}^{a,b}$ comme ceux des matrices $R^{a,b}$ et $S^{a,b}$.

On rappelle que l'on note $E'_j = P^{1-j}e_1$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Les relations $T_{[a,b],[a,b]}R^{a,b} = S^{a,b}$ et ${}^tT_{[a,b],[a,b]}\tilde{S}^{a,b} = {}^t\tilde{R}^{a,b}$, que l'on souhaite obtenir, impliquent les égalités

$$\begin{aligned} T_{[a,b],[a,b]}(E'_i) + r_{i,1}^{a,b}T_{[a,b],[a,b]}(E'_{i+1}) + \cdots + r_{i,b-i}^{a,b}T_{[a,b],[a,b]}(E'_b) \\ = s_{i,0}^{a,b}E'_i + s_{i,1}^{a,b}E'_{i-1} + \cdots + s_{i,i-a}^{a,b}E'_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \tilde{s}_{i,0}^{a,b}{}^tT_{[a,b],[a,b]}(\check{E}'_i) + \tilde{s}_{i+1,1}^{a,b}{}^tT_{[a,b],[a,b]}(\check{E}'_{i+1}) + \cdots + \tilde{s}_{b,b-i}^{a,b}{}^tT_{[a,b],[a,b]}(\check{E}'_b) \\ = \check{E}'_i + \tilde{r}_{i-1,1}^{a,b}\check{E}'_{i-1} + \cdots + \tilde{r}_{a,i-a}^{a,b}\check{E}'_a. \end{aligned}$$

En considérant successivement le produit extérieur de la première de ces deux égalités

- à gauche, par $\bigwedge_{k \in [a,i] - \{i-j\}} E'_k$, et à droite, par $\bigwedge_{k \in [i+1,b]} T_{[a,b],[a,b]}(E'_k)$
- à gauche, par $\bigwedge_{k \in [a,i]} E'_k$, et à droite, par $\bigwedge_{k \in [i+1,b] - \{i+j\}} T_{[a,b],[a,b]}(E'_k)$,

puis le produit extérieur de la deuxième

- à gauche, par $\bigwedge_{k \in [a,i-1]} \check{E}'_k$, et à droite, par $\bigwedge_{k \in [i,b] - \{i+j\}} {}^t T_{[a,b],[a,b]}(\check{E}'_k)$
- à gauche, par $\bigwedge_{k \in [a,i-1] - \{i-j\}} \check{E}'_k$, et à droite, par $\bigwedge_{k \in [i,b]} {}^t T_{[a,b],[a,b]}(\check{E}'_k)$,

on obtient

$$s_{i,j}^{a,b} = \frac{\det(T_{\{i-j\} \cup [i+1,b], [i,b]})}{\det(T_{[i+1,b], [i+1,b]})},$$

$$r_{i,j}^{a,b} = (-1)^j \frac{\det(T_{[i+1,b], [i,b] - \{i+j\}})}{\det(T_{[i+1,b], [i+1,b]})},$$

$$\tilde{s}_{i+j,j}^{a,b} = (-1)^j \frac{\det(T_{[i,b] - \{i+j\}, [i+1,b]})}{\det(T_{[i,b], [i,b]})},$$

$$\text{et } \tilde{r}_{i-j,j}^{a,b} = \frac{\det(T_{[i,b], \{i-j\} \cup [i+1,b]})}{\det(T_{[i,b], [i,b]})}.$$

Proposition V.3.7. *Les quotients*

$$\frac{r_{i,j}^{a,b}}{((t_i^q/t_{i+1}) (t_{i+1}^q/t_{i+2}) \cdots (t_{i+j-1}^q/t_{i+j}))}, \tilde{r}_{i-j,j}^{a,b} \frac{t_i}{t_{i-j}^{q^j}}, \frac{s_{i,j}^{a,b}}{t_i^{q-j}} \quad \text{et} \quad \tilde{s}_{i+j,j}^{a,b} \frac{t_i \cdots t_{i+j}}{t_{i+1}^{q-1} \cdots t_{i+j}^{q-1}}$$

appartiennent à $A_{\mathcal{I}nt}$; les deux premiers sont même dans $A_{\mathcal{I}nt}^\times$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des formules ci-dessus et des lemmes V.3.1 et V.3.2. \square

On remarque que $r_{i,j}^{a,b}$, $s_{i,j}^{a,b}$, $\tilde{r}_{i-j,j}^{a,b}$ et $\tilde{s}_{i+j,j}^{a,b}$ ne dépendent pas de a .

Il résulte du lemme V.3.4 que $r_{i,j}^{a,b}$, $s_{i,j}^{a,b}$, $\tilde{r}_{i-j,j}^{a,b}$ et $\tilde{s}_{i+j,j}^{a,b}$ admettent une limite dans $A_{\mathcal{I}nt}$ quand b tend vers $+\infty$. On pose alors

$$\begin{aligned} r_{i,j} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} r_{i,j}^{a,b}, & s_{i,j} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} s_{i,j}^{a,b}, \\ \tilde{r}_{i-j,j} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \tilde{r}_{i-j,j}^{a,b} & \text{et} & \quad s_{i+j,j}^{a,b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \tilde{s}_{i+j,j}^{a,b}. \end{aligned}$$

Les quelques lignes qui vont suivre (jusqu'à la définition d'un point (Φ, R, S) de $\varprojlim_n \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}$ à valeurs dans la $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre $A_{\mathcal{I}nt}$) sont parfaitement analogues à ce qu'on a déjà fait du côté Lubin-Tate; on a donc un peu abrégé la formulation des arguments.

Utilisant les coefficients $r_{i,j}$, $s_{i,j}$, $\tilde{r}_{i,j}$ et $\tilde{s}_{i,j}$, on forme des matrices de taille infinie R , S , \widetilde{R} et \widetilde{S} . On prolonge les matrices $R^{a,b}$ (resp. \cdots) par 0, ce qui permet

de les considérer comme des matrices infinies telles que $R^{a,b}\tilde{R}^{a,b} = \tilde{R}^{a,b}R^{a,b} = \text{Id}_{[a,b]}$, $S^{a,b}\tilde{S}^{a,b} = \tilde{S}^{a,b}S^{a,b} = \text{Id}_{[a,b]}$ et $TR^{a,b} = S^{a,b}$. Les deux premières égalités passent à la limite et on a donc $\tilde{R} = R^{-1}$ et $\tilde{S} = S^{-1}$. Les estimées (V.3.7) pour $r_{i,j}^{a,b}$ et celles qui en découlent immédiatement pour $r_{i,j}$ entraînent que la i -ème colonne de la matrice $R^{a,b}$ converge uniformément vers celle de la matrice R , pour tout $i \in \mathbb{Z}$; on a donc $T = RS$.

Les coefficients $r_{i,j}$, $s_{i,j}$, $\tilde{r}_{i,j}$ et $\tilde{s}_{i,j}$ ne dépendent en fait que de i modulo d , comme on le voit en utilisant l'identité $r_{i,j}^{a,b} = r_{i+d,j}^{a,b+d}$ (resp. \dots), ce qui permet de considérer R, \dots, S^{-1} comme des matrices de taille d à coefficients dans le $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}]$ -module $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}][[z, z^{-1}]]$. En utilisant la proposition V.3.7, on vérifie que les matrices R, S, R^{-1} et S^{-1} ont en fait les propriétés énoncées dans la proposition IV.2.2 – à cela près qu'il faut remplacer la norme additive π -adique par la norme additive $(t_1 \cdots t_d)^{q-1}$ -adique de $A_{\mathcal{I}nt}$. On vérifie alors en utilisant l'identité $\tau T = PT$, que $\Phi = R^{-1}\tau R$ est aussi égale à $S^{-1}P^{-1}\tau S$ dans $\mathcal{H}(\frac{1}{q}, 1[, A_{\mathcal{I}nt})$.

La matrice Φ s'écrit donc sous la forme $\text{Id}_d + P^{-1} \text{diag}(y_i)_{1 \leq i \leq d}$. On munit $A_{\mathcal{I}nt}$ d'une structure de $\tilde{\mathcal{O}}$ -algèbre topologique en posant $\pi = (-1)^d y_1 \cdots y_d$ – ce morphisme est continu car $\pi/(t_1 \cdots t_d)^{q-1}$ est une unité de $A_{\mathcal{I}nt}$; rien ne garantit pour l'instant que cette structure de $\tilde{\mathcal{O}}$ -algèbre coïncide avec celle définie de manière analogue du côté Lubin-Tate. Comme la $\tilde{\mathcal{O}}$ -algèbre $A_{\mathcal{I}nt}$ est normale, le triplet (Φ, R, S) définit déjà un point de la limite projective complétée $\varprojlim_n \tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}$ à valeurs dans la $\tilde{\mathcal{O}}$ -algèbre $A_{\mathcal{I}nt}$.

On va maintenant vérifier que ce point se factorise en fait à travers le sous-schéma formel ouvert $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,P-\bullet\mathcal{O}^d}^0 = \text{Spf } \hat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$.

Il résulte déjà de (V.3.7) que $r_{i,j} \in \pi A_{\mathcal{I}nt}$, pour $j \geq d$.

Par ailleurs, pour $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$, $1 \leq j \leq d-1$ et $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, on a, pour $a \leq i$ et $b = i+k$ avec $k \geq j$,

$$1 - \alpha r_{i,j}^{a,b} = \frac{\text{Moore}(t_{i+1}, \dots, t_{i+j}^{q^{-j+1}} - \alpha t_i^q, \dots, t_{i+k}^{q^{-k+1}})}{\text{Moore}(t_{i+1}, \dots, t_{i+j}^{q^{-j+1}}, \dots, t_{i+k}^{q^{-k+1}})}.$$

A une constante près dans \mathbb{F}_q^\times , ceci est égal à

$$\prod_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k] \in \mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{F}_q)} \frac{\alpha_1 t_{i+1} + \dots + \alpha_j (t_{i+j}^{q^{-j+1}} - \alpha t_i^q) + \dots + \alpha_k t_{i+k}^{q^{-k+1}}}{\alpha_1 t_{i+1} + \dots + \alpha_j t_{i+j}^{q^{-j+1}} + \dots + \alpha_k t_{i+k}^{q^{-k+1}}}.$$

Or chaque terme est une unité dans $A_{\mathcal{I}nt}$, car t_i^q n'apparaît jamais en dernier. Donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$, $1 - \alpha r_{i,j}^{a,b}$ est une unité de $A_{\mathcal{I}nt}$. En passant à la limite, on voit qu'il en va de même pour $1 - \alpha r_{i,j}$, ce qui achève la vérification du fait

que le point (Φ, R, S) appartient à $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r, \infty, P-\bullet \mathcal{O}^d}^0 = \text{Spf } \widehat{A}_{\mathcal{D}r, \infty}$ – ou, de manière équivalente, définit un morphisme continu $A_{\mathcal{I}nt} \rightarrow \widehat{A}_{\mathcal{D}r, \infty}$.

Enfin, les morphismes

$$\widehat{A}_{\mathcal{D}r, \infty} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{(décomposition)}^*} \\ \xleftrightarrow{\text{(produit)}^*} \end{array} A_{\mathcal{I}nt}$$

sont des isomorphismes, inverses deux à deux. La démonstration est exactement du même type que du côté Lubin-Tate. Elle sera donc omise.

V.4 Déterminants et structure de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$

On va vérifier que les deux structures de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$ provenant des deux morphismes de décomposition coïncident et donner une formule pour l'élément $\pi \in A_{\mathcal{I}nt}$.

Pour cela, on va utiliser des morphismes déterminant analogues à celui de [G, ch. IV]. Ces morphismes déterminant envoient les tours de Lubin Tate et de Drinfeld en rang d vers les tours correspondantes en rang 1. On notera donc $A_{\mathcal{L}T}^d, A_{\mathcal{D}r}^d, \widehat{A}_{\mathcal{L}T, \infty}^d, \widehat{A}_{\mathcal{D}r, \infty}^d$ et $A_{\mathcal{I}nt}^d$ les $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbres notées $A_{\mathcal{L}T}, A_{\mathcal{D}r}, \widehat{A}_{\mathcal{L}T, \infty}, \widehat{A}_{\mathcal{D}r, \infty}$ et $A_{\mathcal{I}nt}$ jusqu' à présent.

Les déterminants des matrices Φ_X (2.2) et Φ_Y (2.3) sont, respectivement, $(-1)^{d-1}(z - \pi)$ et $1 - \pi/z$ et le déterminant de P est $(-1)^{d-1}z$. Les déterminants $\det R_*$ ($*$ = $\mathcal{L}T$ ou $\mathcal{D}r$) vérifient alors tous deux l'équation

$$\det R_* = (1 - \pi/z)^\tau \det R_*$$

et sont donc tous deux égaux à $(1 - \pi/z)^{-1}(1 - \pi^q/z)^{-1} \dots$, car ils sont congrus à 1 modulo π . On obtient ainsi un morphisme $\det : A_*^1 \rightarrow A_*^d$, qui n'est autre que le morphisme structural $\widetilde{\mathcal{O}} \rightarrow A_*$ de la $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre A_* .

Ceci permet déjà de vérifier que les deux structures de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$ induites par les deux morphismes de décomposition coïncident. En effet, $\det S_*$ s'écrit comme une série entière en z , alors que $\det R_*$ s'écrit sous la forme $1 + z^{-1} \times$ (série entière en z^{-1}); on a ainsi, évidemment, $\det R_{\mathcal{L}T} = \det R_{\mathcal{D}r}$ et les deux structures de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$ coïncident donc.

Pour expliciter en termes intrinsèques la structure de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre ainsi obtenue, on pourrait utiliser (en rang 1) les formules de décomposition donnant R_* en fonction de S_* . Il est cependant plus commode d'utiliser celles donnant la matrice S_* , qui sont en fait plus simples. On remarque que l'on a $(-1)^{d-1}(z - \pi) \det S_* = \tau \det S_*$ et $(-1)^{d-1}z \det T_* = \tau \det T_*$. Choissant une racine $(q-1)$ -ème μ de -1 dans $\widetilde{\mathcal{O}}$, on obtient alors des morphismes déterminant

$$\det_\mu : \text{Spf } \widehat{A}_{*, \infty}^d \rightarrow \text{Spf } \widehat{A}_{*, \infty}^1 \quad \text{et} \quad \det_\mu : \text{Spf } A_{\mathcal{I}nt}^d \rightarrow \text{Spf } A_{\mathcal{I}nt}^1$$

$$(R_*, S_*) \mapsto (\det R_*, \mu \det S_*) \quad T_* \mapsto \mu \det T_*$$

compatibles aux morphismes de décomposition

$$\mathrm{Spf} A_{\mathcal{I}nt}^d \rightarrow \mathrm{Spf} \widehat{A}_{*,\infty}^d \quad \text{et} \quad \mathrm{Spf} A_{\mathcal{I}nt}^1 \rightarrow \mathrm{Spf} \widehat{A}_{*,\infty}^1.$$

En particulier, appliquant la décomposition du paragraphe V.3 à

$$\det T_* = \sum_{j \in \mathbb{Z}} t^{q^{-j}} ((-1)^{d-1} z)^j,$$

on trouve

$$\det S_* = s_0 + s_1 z + \cdots \quad \text{avec} \quad s_0^{q-1} = \pi.$$

Explicitement, la structure de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$ est la suivante:

$$\pi = \lim_{k \rightarrow +\infty} (-1)^{d-1} \left(\frac{D_{k+1}(t)}{D_k(t)} \right)^{q-1}, \quad \text{où}$$

$$D_k(t) = \det \begin{pmatrix} t & t^q & \cdots & t^{q^k} \\ t^{q^{-1}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t^q \\ t^{q^{-k}} & \cdots & t^{q^{-1}} & t \end{pmatrix}.$$

On peut aussi caractériser π comme l'unique solution de valuation t -adique $q-1$ de l'équation $\sum_{j \in \mathbb{Z}} t^{q^{-j}} ((-1)^{d-1} z)^j = 0$ dans $A_{\mathcal{I}nt}^1$.

En effet, la série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} t^{q^{-j}} ((-1)^{d-1} z)^j$ converge sur le disque ouvert épointé de rayon 1; la série $\det R_*^{-1} = (1 - \pi/z)(1 - \pi^q/z)$ converge aussi sur ce disque ouvert épointé (et même au-delà...) et a des zéros en $z = \pi, \pi^q, \pi^{q^2} \cdots$, alors que la série $\det S_* = \mu^{-1}(s_0 + s_1 z + \cdots)$ converge sur le disque ouvert de rayon 1 et a des zéros en $z = \pi^{q^{-1}}, \pi^{q^{-2}} \cdots$. Il suffit alors de se rappeler que la valuation π -adique de t est $1/(q-1)$; la valuation t -adique de π est donc $q-1$.

Remarque V.4.1. La structure de $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbre de $A_{\mathcal{I}nt}$ est assez simple, mais sa structure de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre est plus compliquée, comme la formule ci-dessus le montre. On peut rapprocher cela de la situation pour les espaces de modules avec structures de niveau $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n}$ (ou de ceux considérés dans la remarque II.2.3). L'algèbre de fonctions du $\overline{\mathbb{F}}_q$ -schéma formel affine $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n}$ (ou, plus précisément, de sa composante connexe $\{\mathrm{ht} \rho = 0\}$) est une $\overline{\mathbb{F}}_q$ -algèbre de séries formelles, puisque $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\mathcal{T},n}^{\mathrm{ht}=0}$ est pro-artinienne et régulière [D1], mais l'élément π est, là aussi, donné par une formule un peu compliquée, faisant d'ailleurs elle aussi intervenir des déterminants de Moore comme ceux que l'on a rencontrés dans le paragraphe V.1.

V.5 Démonstration de IV.1.1.2

On va se placer dans $A_{\mathcal{I}nt}$ et considérer les éléments x_i^q/x_{i+1} et y_i comme des éléments de $A_{\mathcal{I}nt}$. On rappelle qu'on a $x_i = (s_{i,0}^{\mathcal{L}T})^{q-1}$ et $y_i = (s_{i,0}^{\mathcal{D}r})^q/s_{i+1,0}^{\mathcal{D}r}$. On rappelle aussi que $s_{i,0}^{\mathcal{L}T}/t_i$ et $s_{i,0}^{\mathcal{D}r}/t_i$ sont des unités de $A_{\mathcal{I}nt}$ (voir les propositions V.2.2 et V.2.4 et utiliser le fait que les morphismes de produit 5.2 sont des isomorphismes). L'élément $s_{i,0}^{\mathcal{L}T}/s_{i,0}^{\mathcal{D}r}$ est alors une unité et on a

$$x_i^q/x_{i+1} = (s_{i,0}^{\mathcal{L}T}/s_{i,0}^{\mathcal{D}r})^{q(q-1)}(s_{i+1,0}^{\mathcal{L}T}/s_{i+1,0}^{\mathcal{D}r})^{1-q}y_i^{q-1},$$

ce qui démontre la deuxième partie du théorème IV.1.1 et achève, par conséquent, la démonstration du théorème I.5.3.

Bibliographie

- [B] P. Berthelot. Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propre, première partie. *Prépublication* 96-03, *Université de Rennes 1*. Disponible sur le site perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/.
- [BC] J.-F. Boutot et H. Carayol. Uniformisation p -adique des courbes de Shimura: les théorèmes de Cherednik et de Drinfeld. *Courbes modulaires et courbes de Shimura (Orsay, 1987/1988)*, volume 196–197 de *Astérisque*, pages 45–149, 1991.
- [BL] A. Beauville et Y. Laszlo. Conformal blocks and generalized theta functions. *Comm. Math. Phys.* 164(2), pages 385–419, 1994.
- [C] H. Carayol. Nonabelian Lubin-Tate theory. *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988)*, volume 11 de *Perspect. Math.*, pages 15–39. Academic Press.
- [D1] V.G. Drinfeld. Elliptic modules. *Mat. Sb. (N.S.)* 94(136), pages 594–62, 1974.
- [D2] V.G. Drinfeld. Coverings of p -adic symmetric domains. *Funkcional. Anal. i Priložen.* 10(2), pages 29–40, 1976.
- [Fal1] G. Faltings. A relation between two moduli spaces studied by V.G. Drinfeld. *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 de *Contemp. Math.*, pages 115–129. 2002.
- [Fal2] G. Faltings. Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles. *J. Eur. Math. Soc.* 5(1), pages 41–68, 2003.
- [Far1] L. Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques. *Ce volume*.
- [Far2] L. Fargues. Application de Hodge-Tate duale d'un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification. *Prépublication arXiv math.NT/0604252v1*, à paraître à *Duke Math. Journal*.

- [G] A. Genestier. Espaces symétriques de Drinfeld. *Astérisque* 234, 1996.
- [GI] O. Goldman et N. Iwahori. The space of \mathfrak{p} -adic norms. *Acta Math.* 109, pages 137–177, 1963.
- [HG1] M.J. Hopkins et B.H. Gross. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 de *Contemp. Math.*, pages 23–88. 1994.
- [HG2] M.J. Hopkins et B.H. Gross. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space (*la prépublication*).
- [K] N. Katz. Serre-Tate local moduli. In *Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78)*, volume 868 de *Lecture Notes in Math.*, pages 138–202. Springer, 1981.
- [LT] J. Lubin et J. Tate. Formal moduli for one-parameter formal Lie groups. *Bull. Soc. Math. France* 94, pages 49–59, 1966.
- [PS] A. Pressley et G. Segal. *Loop groups*. Oxford Mathematical Monographs. 1986.
- [RZ] M. Rapoport et Th. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*, volume 141 de *Annals of Mathematics Studies*. 1996.
- [T] J. Tits. Reductive groups over local fields. *Automorphic forms, Representations and L -functions, part 1 (Corvallis, 1977)*, volume 33 de *Proceedings of symposia in pure mathematics*, pages 29–69. A.M.S.
- [vdPV] M. van der Put et H. Voskuil. Symmetric spaces associated to split algebraic groups over a local field. *J. Reine Angew. Math.* 433, pages 69–100, 1992.