

Vecteurs de Witt non commutatifs et représentabilité de l'homologie modulo p

Paul Goerss^{1,*}, Jean Lannes^{2,**} et Fabien Morel^{3,***}

¹ Department of Mathematics, GN-50, University of Washington, Seattle, Washington 98195, USA

² Département de Mathématiques, Université Paris VII, 2 Place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France
ou Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

³ Département de Mathématiques, Université Paris VII, 2 Place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France

Oblatum 9-IV-1991 & 30-IX-1991

0 Introduction

Soient p un nombre premier et n un entier.

Question. Soit \mathcal{C} une classe d'espaces. Existe-t-il un espace X et une classe d'homologie x dans $H_n(X; \mathbb{F}_p)$ tels que pour tout espace Y appartenant à \mathcal{C} et toute classe d'homologie y dans $H_n(Y; \mathbb{F}_p)$ il existe une application $f: X \rightarrow Y$ avec $f_* x = y$?

La réponse est non si \mathcal{C} est la classe de tous les espaces. En voici une raison. Ecrivons $n = k + \ell$ et notons $r_{k,\ell}(y)$ le rang du cap-produit par y , $H^k(Y; \mathbb{F}_p) \rightarrow H^\ell(Y; \mathbb{F}_p)$; il est clair que l'on a l'inégalité $r_{k,\ell}(f_* x) \leq r_{k,\ell}(x)$. Si la réponse était oui alors $r_{k,\ell}(y)$ serait majoré indépendamment de y ce qui est manifestement faux.

Cependant la réponse est oui si \mathcal{C} est la classe des espaces Y qui sont des suspensions. C'est là un des résultats principaux de cet article.

L'histoire commence avec le travail fondamental de Brown et Gitler [BG] qui implique en particulier que la réponse à la question ci-dessus est affirmative si \mathcal{C} est la classe des espaces Y qui sont des suspensions itérées $q(n)$ fois pour une certaine fonction q de n .

Avant d'énoncer précisément nos résultats et afin de motiver les définitions qui vont suivre commençons par considérer le cas bien connu de l'homologie rationnelle.

Soient n un entier strictement positif et Y un espace pointé alors l'homomorphisme d'Hurewicz rationnel $\mathbb{Q} \otimes \pi_{n+1} \Sigma Y \rightarrow H_{n+1}(\Sigma Y; \mathbb{Q})$ est surjectif. Cette surjectivité résulte de l'énoncé plus précis suivant (dû originalement à Cartan

* Avec le soutien de la NSF et de la Fondation Sloan

** URA 212 et UA D.0169 du CNRS

*** URA 212 du CNRS

et Serre): $\mathbb{Q} \otimes \pi_{n+1} Y$ est naturellement isomorphe au \mathbb{Q} -espace vectoriel des primitifs en degré n de l'algèbre de Hopf $H_*(\Omega Y; \mathbb{Q})$. Ce que l'on peut reformuler ainsi. Soient $\mathcal{H}_*^{\mathbb{Q}}$ la catégorie des \mathbb{Q} -algèbres de Hopf graduées cocommutatives connexes et $\Omega_0 Y$ la composante connexe du point base de l'espace de lacets ΩY , alors l'application naturelle:

$$\mathbb{Q} \otimes \pi_{n+1} Y \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{Q}}}(H_*(\Omega S^{n+1}; \mathbb{Q}), H_*(\Omega_0 Y; \mathbb{Q}))$$

est une bijection. En effet $H_*(\Omega S^{n+1}; \mathbb{Q})$ est isomorphe à la \mathbb{Q} -algèbre de Hopf graduée cocommutative $\text{Tens}(x)$ librement engendrée, comme \mathbb{Q} -algèbre graduée, par un élément primitif x de degré n ; $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{Q}}}(H_*(\Omega S^{n+1}; \mathbb{Q}), H)$ s'identifie donc, pour toute \mathbb{Q} -algèbre de Hopf graduée cocommutative connexe H , au \mathbb{Q} -espace vectoriel de ses primitifs en degré n . Notons $P_n H$ ce \mathbb{Q} -espace vectoriel. On observera que le foncteur $H \mapsto P_n H$ préserve les épimorphismes; en d'autres termes $\text{Tens}(x)$ est un objet projectif de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{Q}}$ (un objet D d'une catégorie \mathcal{D} est projectif si le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, -)$ transforme épimorphismes en surjections).

Revenons maintenant à l'homologie modulo p .

Soit $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ (resp. $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$) la catégorie des \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf graduées cocommutatives (resp. bicommutatives) connexes, que nous appellerons pour abrèger des \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf (resp. des \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf abéliennes). Le foncteur $H \mapsto P_n H$ qui associe à une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf (resp. \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf abélienne) H le \mathbb{F}_p -espace vectoriel $P_n H$ de ses primitifs de degré n est représentable:

$$P_n H \cong \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(\text{Tens}(x), H) \text{ (resp. } P_n H \cong \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}}(\text{Sym}(x), H)),$$

$\text{Tens}(x)$ (resp. $\text{Sym}(x)$) désignant la \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf (resp. \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf abélienne) librement engendrée, comme \mathbb{F}_p -algèbre graduée (resp. comme \mathbb{F}_p -algèbre graduée commutative) par un élément primitif x de degré n .

Contrairement au cas rationnel, les foncteurs $H \mapsto P_n H$ ci-dessus ne préservent pas les épimorphismes pour toutes les valeurs de n .

Colette Schoeller [Sc] a montré que $\text{Sym}(x)$ admettait une couverture projective dans $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$ (rappelons que cette catégorie est abélienne) que nous notons $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$. La justification de cette notation est la suivante. Supposons n pair si p est impair (pour p et n impairs, $\text{Sym}(x)$ est l'algèbre extérieure sur x et est déjà un objet projectif de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$); alors la \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf non graduée sous-jacente à $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$ est bicommutative et son spectre est isomorphe au groupe algébrique sur \mathbb{F}_p des vecteurs de Witt de longueur $v_p(n) + 1$, $v_p(n)$ désignant la valuation p -adique de n (ceci permet d'ailleurs de fixer le choix de $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$).

La situation est en fait analogue dans le cas non commutatif. Nous montrons que $\text{Tens}(x)$ admet une couverture projective dans $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ que nous notons $W^{\mathbb{F}_p}(n)$. Supposons à nouveau n pair si p est impair (pour p et n impairs, $\text{Tens}(x)$ est déjà un objet projectif de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$); alors la \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf $W^{\mathbb{F}_p}(n)$ est caractérisée à isomorphisme près par la propriété suivante: il existe un élément y de degré n dans $W^{\mathbb{F}_p}(n)$ tel que $W^{\mathbb{F}_p}(n)$ est librement engendrée, comme \mathbb{F}_p -algèbre graduée, par les $\xi^i y$, $0 \leq i \leq k$, ξ désignant le Verschiebung de $W^{\mathbb{F}_p}(n)$, ξ^i son i -ème itéré, et k la valuation p -adique de n . On observera que l'abélianisée de $W^{\mathbb{F}_p}(n)$ est isomorphe à $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$.

Théorème 0.1 Soit n un entier ≥ 2 . Il existe un espace pointé simplement connexe $T_1(n)$ (que nous appelons le n -ème espace de Brown-Gitler) et une transformation naturelle θ du foncteur $Y \mapsto [T_1(n), Y]$ (la notation $[-, -]$ désigne l'ensemble pointé des classes d'homotopie pointées) dans le foncteur $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W^{\mathbb{F}_p}(n), H_*(\Omega_0 Y; \mathbb{F}_p))$ (ces deux foncteurs sont définis sur la catégorie homotopique pointée et à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés) qui selon les valeurs de n modulo $2p$ possèdent les propriétés suivantes.

Pour $n \not\equiv \pm 1 \pmod{2p}$:

– θ_Y est une bijection pour tout espace pointé Y .

(Autrement dit le foncteur $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W^{\mathbb{F}_p}(n), H_*(\Omega_0 Y; \mathbb{F}_p))$ est représentable.)

Pour $n \equiv \pm 1 \pmod{2p}$:

– θ_Y est une surjection pour tout espace pointé Y ;

– θ_Y est une bijection lorsque Y est un espace d'Eilenberg-Mac Lane.

(Nous disons dans ce cas que le foncteur $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W^{\mathbb{F}_p}(n), H_*(\Omega_0 Y; \mathbb{F}_p))$ est semi-représentable.)

Remarques. – L'espace $T_1(n)$ ci-dessus à homotopie près (c'est évident dans le cas $n \not\equiv \pm 1 \pmod{2p}$, voir par exemple le paragraphe 2.2.3 pour le cas $n \equiv \pm 1 \pmod{2p}$ qui l'est un peu moins).

– Les cas $n=0, 1$ sont un peu particuliers et plutôt que de les faire entrer à toute force dans l'énoncé précédent nous avons préféré les écarter. Le lecteur se convaincra facilement qu'il est raisonnable de poser $T_1(0) = S^1$ et $T_1(1) = S^2$.

– Voici le type d'homotopie des espaces de Brown-Gitler pour les petites valeurs de n :

– pour $2 \leq n \leq 2p-1$, $T_1(n) = \Sigma^{n-1} M$, M désignant la cofibre de l'application $S^1 \rightarrow S^1$ de degré p ;

– pour $p=2$, $T_1(4) = \Sigma \mathbb{R}P^4$.

Méthode de démonstration du théorème 0.1 Posons $S(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W^{\mathbb{F}_p}(n), H_*(\Omega_0 Y; \mathbb{F}_p))$. Considérons une fibration $Z \rightarrow Y \rightarrow K(\pi, m)$. D'après Moore et Smith [MS1], la suite de \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf:

$$H_*(\Omega_0 Z; \mathbb{F}_p) \rightarrow H_*(\Omega_0 Y; \mathbb{F}_p) \rightarrow H_*(\Omega K(\pi, m); \mathbb{F}_p)$$

est exacte pour $m \geq 3$. Il en résulte, puisque $W^{\mathbb{F}_p}(n)$ est un objet projectif de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$, que la suite d'ensembles pointés:

$$S(Z) \rightarrow S(Y) \rightarrow S(K(\pi, m))$$

est exacte pour $m \geq 3$ et on se convainc sans difficultés qu'il en est encore ainsi pour $m \geq 2$.

C'est là la propriété essentielle qui permet de montrer que le foncteur S est semi-représentable pour tout $n \geq 2$ en appliquant le théorème de représentabilité du troisième auteur (appendice B). De la même manière on montre que le foncteur S est représentable pour $n \not\equiv \pm 1 \pmod{2p}$ en examinant le défaut d'exactitude (à nouveau décrit dans [MS1, MS2]) de la suite de \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf ($m \geq 3$):

$$H_*(\Omega^2 K(\pi, m); \mathbb{F}_p) \rightarrow H_*(\Omega_0 Z; \mathbb{F}_p) \rightarrow H_*(\Omega_0 Y; \mathbb{F}_p).$$

Le théorème 0.1 admet comme conséquence plus ou moins formelle le théorème 0.2 ci-dessous dont l'énoncé nécessite au préalable l'introduction de quelques notions et notations impliquant l'algèbre de Steenrod.

On note $\tilde{\mathcal{U}}_*$ la catégorie des A -modules à droite instables (nous oublierons par la suite la mention «à droite»), A désignant l'algèbre de Steenrod modulo p . L'homologie modulo p d'un espace Y , que nous noterons simplement $H_* Y$, est un exemple d'objet de $\tilde{\mathcal{U}}_*$. Soit $G(n)$ le A -module instable représentant «l'homologie en degré n » dans $\tilde{\mathcal{U}}_*$, c'est-à-dire caractérisé par l'isomorphisme fonctoriel (en le A -module instable M):

$$\text{Hom}_{\tilde{\mathcal{U}}_*}(G(n), M) \cong M_n$$

(en d'autre termes $G(n)$ est le A -module instable librement engendré par un élément de degré n).

On note enfin \mathcal{H}_* la catégorie des « A -algèbres de Hopf instables» qui sont à la fois des \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf et des A -modules instables, ces deux structures vérifiant les conditions de compatibilité usuelles. Par exemple la \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf $H_* \Omega_0 Y$ considérée précédemment est en fait un objet de \mathcal{H}_* .

Théorème 0.2 *Soit n un entier ≥ 2 . L'espace pointé $T_1(n)$ est, à homotopie près, l'unique espace pointé simplement connexe possédant les propriétés suivantes:*

- (a) *Il existe un isomorphisme de A -modules instables $\bar{H}_* T_1(n) \cong \Sigma G(n)$ ($\Sigma G(n)$ désignant la suspension du A -module instable $G(n)$);*
- (b) *l'application $\bar{H}_* \Sigma \Omega T_1(n) \rightarrow \bar{H}_* T_1(n)$ induite par la coïunité de l'adjonction $\Sigma \Omega T_1(n) \rightarrow T_1(n)$ est surjective;*
- (c) *l'homologie $\bar{H}_* \left(T_1(n); \mathbb{Z} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ p \end{smallmatrix} \right] \right)$ est triviale.*

L'espace pointé $T_1(n)$ possède en outre les propriétés suivantes:

- (d) *$T_1(n)$ est rétracte, à homotopie près, de la suspension d'un espace pointé;*
- (e) *pour tout espace pointé Y l'application naturelle:*

$$[T_1(n), \Sigma Y] \rightarrow \bar{H}_n Y (\cong \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{U}}_*}(\bar{H}_* T_1(n), \bar{H}_* \Sigma Y))$$

est surjective;

- (f) *l'application naturelle:*

$$[T_1(n), Y] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(H_* \Omega T_1(n), H_* \Omega_0 Y)$$

est surjective pour tout espace pointé Y et bijective lorsque Y est un espace d'Eilenberg-MacLane; de plus si $n \not\equiv \pm 1 \pmod{2p}$ elle est bijective pour tout espace pointé Y .

Commentaires. – Le point (e) montre bien que la réponse à la question initiale est affirmative si \mathcal{C} est la classe des espaces qui sont des suspensions.

– Le point (d) est en un certain sens optimal. En effet il existe des valeurs de n pour lesquelles $T_1(n)$ n'a pas le type d'homotopie d'une suspension. Il en est ainsi par exemple pour $T_1(2p)$ si $p > 2$ et pour $T_1(8)$ si $p = 2$.

En revanche:

Théorème 0.3 *Soit n un entier non congru à 0 mod $2p$. Alors il existe un espace pointé connexe $T_0(n)$ dont la suspension a le type d'homotopie de $T_1(n)$.*

(Le seul cas de ce théorème qui ne soit pas immédiat à partir du théorème 0.2 est $n \equiv 2 \pmod{2p}$, en effet dans les autres cas on a $G(n) \cong \Sigma G(n-1)$ et il suffit de prendre $T_0(n) = T_1(n-1)$.)

– L'existence d'un espace $T_1(n)$ possédant les propriétés (a), (b) et (c) de 0.2 apparaît déjà dans [GL]. On trouve une version «stable» de la propriété (d) dans [La1, Go1].

Espaces de Brown-Gitler et spectres de Brown-Gitler. On note $T(n)$ le spectre dont la suspension est le spectre des suspension itérées de l'espace $T_1(n)$:

$$\Sigma T(n) = \Sigma^\infty T_1(n).$$

Les propriétés (a) et (e) de $T_1(n)$ impliquent:

- (a) $H_* T(n) \cong G(n)$ comme A -module;
- (b) pour tout espace pointé Y l'homomorphisme naturel

$$[T(n), \Sigma^\infty Y] \rightarrow \bar{H}_n Y$$

est surjectif ($[T(n), \Sigma^\infty Y]$ désigne le groupe abélien des applications du spectre $T(n)$ dans le spectre des suspensions itérées de Y).

C'est l'existence d'un spectre $T(n)$ vérifiant (a) et (b) qui est le résultat essentiel du travail précédemment cité de Brown et Gitler [BG] (dans cet article ils se limitent au cas $p=2$, le plus important dans les applications, notamment [Mah, BP1, Co]); Brown et Gitler construisent en fait les n -duaux des spectres $T(n)$ et c'est plutôt à ces n -duaux que l'on réserve habituellement l'appellation de spectres de Brown-Gitler.

Le théorème 0.1 concernant les espaces de Brown-Gitler implique un théorème analogue pour les spectres $T(n)$:

Théorème 0.4 *Soit n un entier ≥ 2 ; soit Y un spectre. Il existe un épimorphisme de groupes abéliens, naturel en Y :*

$$[T(n), Y] \twoheadrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}}(\mathbb{W}^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n), H_* \Omega_0^\infty Y)$$

qui est un isomorphisme si n est non congru à ± 1 modulo $2p$ ou si Y est un spectre d'Eilenberg-Mac Lane (on note $\Omega^\infty Y$ le 0-ème espace d'un Ω -spectre équivalent à Y et $\Omega_0^\infty Y$ la composante connexe du point base dans $\Omega^\infty Y$).

Signalons qu'une variante de cet énoncé (pour p et n pairs) est démontrée dans [Go2] en s'appuyant sur les résultats de [LZ1].

Plan de l'article

Partie 1: Structure des objets projectifs de certaines catégories d'algèbres de Hopf

On classeifie les objets projectifs des catégories $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ et \mathcal{H}_* . On montre en particulier qu'une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf (resp. A -algèbre de Hopf instable) H est un objet projectif de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ (resp. \mathcal{H}_*) si et seulement si la \mathbb{F}_p -algèbre graduée sous-jacente est libre et si QH (cette notation désigne les indécomposables de H)

est projectif en tant que \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué «avec Verschiebung» (resp. A -module instable).

Partie 2: Réalisation des A -algèbres de Hopf instables projectives

On vérifie que les foncteurs $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(W, H_* \Omega_0 Y)$, W objet projectif de \mathcal{H}_* , qui généralisent les foncteurs $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W^{\mathbb{F}_p}(n), H_* \Omega_0 Y)$ évoqués plus haut, satisfont les hypothèses du théorème de représentabilité (ou de semi-représentabilité) de l'appendice B. Comme on l'a déjà dit les ingrédients essentiels de cette vérification sont contenus dans le travail de Moore-Smith sur la suite spectrale d'Eilenberg-Moore multiplicative [MS1, MS2, Sm]. On démontre également dans cette partie le théorème 0.2.

Partie 3: Quelques applications et exemples

On détaille notamment la construction des espaces $T_0(n) (n \equiv 2 \pmod{2p})$ du théorème 0.3.

Appendice A

On démontre deux propositions un peu techniques, achevant ainsi la preuve commencée dans la partie 2 de certains résultats concernant «l'invariant de Hopf» des applications dont la source est un espace de Brown-Gitler et qui sont triviales en homologie modulo p .

Appendice B (par Fabien Morel):

Une caractérisation des foncteurs homotopiques covariants représentables par un espace simplement connexe

Il s'agit d'une version «duale» du théorème de représentabilité de Brown [Br].

Récapitulatif des principales notations «catégoriques» utilisées dans cet article.

- L'algèbre de Steenrod est notée A .
- La catégorie des A -modules à droite instables connexes est notée \mathcal{U}_* (voir 1.6.1). L'étoile en indice est là pour signaler que l'on travaille en homologie (la notation \mathcal{U} étant traditionnellement réservée à la catégorie des A -modules à gauche instables).
- La catégorie des A -coalgèbres instables connexes est notée \mathcal{K}_* (voir 1.6.2).
- La catégorie des A -algèbres de Hopf instables connexes est notée \mathcal{H}_* (voir 1.6.3).

(Soit Y un espace connexe pointé. L'homologie modulo p réduite $\bar{H}_* Y$ est un exemple d'objet de \mathcal{U}_* ; $H_* Y$ est un exemple d'objet de \mathcal{K}_* . Si Y est un H -espace associatif, alors $H_* Y$ est un exemple d'objet de \mathcal{H}_* .)

Si l'on oublie l'action de l'algèbre de Steenrod on obtient respectivement:

- La catégorie des \mathbb{F}_p -coalgèbres \mathbb{N} -graduées cocommutatives connexes que nous notons $\mathcal{K}_*^{\mathbb{F}_p}$ (voir 1.1.1).

– La catégorie des \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf \mathbb{N} -graduées cocommutatives connexes que nous notons $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ (voir 1.1.2, la sous-catégorie pleine des \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf \mathbb{N} -graduées bicommutatives connexes est quant à elle notée $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, ab}$).

Enfin l'analogie dans ce contexte de la catégorie \mathcal{U}_* est celle des \mathbb{F}_p -espaces vectoriels $(\mathbb{N} - \{0\})$ -gradués avec Verschiebung que nous notons $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ (voir 1.1.1).

1 Structure des objets projectifs de certaines catégories d'algèbres de Hopf

1.1 Catégories des \mathbb{F}_p -coalgèbres et des \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf

1.1.1 \mathbb{F}_p -coalgèbres

On note $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ la catégorie des \mathbb{F}_p -coalgèbres graduées (i.e. \mathbb{N} -graduées) cocommutatives (au sens gradué) connexes (voir [MM]) que nous appellerons pour abrégé des \mathbb{F}_p -coalgèbres.

Soit K une \mathbb{F}_p -coalgèbre. On note \bar{K} le noyau de la coïunité $\varepsilon: K \rightarrow \mathbb{F}_p$ de K ; \bar{K} est nul en degré zéro et K s'identifie comme \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué à la somme directe $\mathbb{F}_p \oplus \bar{K}$, \mathbb{F}_p désignant le \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué concentré en degré zéro et égal à \mathbb{F}_p en ce degré.

Le Verschiebung des \mathbb{F}_p -coalgèbres. Le Verschiebung d'une \mathbb{F}_p -coalgèbre K est l'application linéaire $\xi: K \rightarrow K$ caractérisée par la formule $\langle \xi x, u \rangle = \langle x, u^p \rangle$, u désignant un élément de la \mathbb{F}_p -algèbre graduée commutative connexe duale. Le Verschiebung tel qu'il vient d'être défini ne préserve pas le degré. On peut cependant remédier à cet état de chose en introduisant le formalisme ci-après.

Le foncteur Θ . On note $\tilde{\mathcal{E}}_*$ la catégorie dont les objets sont les \mathbb{F}_p -espaces vectoriels gradués et dont les morphismes sont les applications linéaires de degré zéro; on note \mathcal{E}_* la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathcal{E}}_*$ dont les objets sont les \mathbb{F}_p -espaces vectoriels gradués connexes c'est-à-dire nuls en degré zéro. On considère le foncteur $\Theta: \tilde{\mathcal{E}}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_*$ défini de la façon suivante:

- Si $p = 2$, $(\Theta M)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \\ M_{n/2} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases}$
- Si $p > 2$, $(\Theta M)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{2p} \\ M_{n/p} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2p}. \end{cases}$

On notera Θx l'élément de $(\Theta M)_n$ correspondant à un élément x de $M_{n/p}$ (n pair si $p = 2$ et congru à 0 mod $2p$ si $p > 2$).

Avec cette définition le Verschiebung d'une \mathbb{F}_p -coalgèbre K apparaît comme une application linéaire de degré zéro $\xi: K \rightarrow \Theta K$.

On peut alternativement définir le foncteur Θ de la façon suivante. On considère le \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué $\hat{H}^0(\mathfrak{S}_p; M^{\otimes p})$; dans cette formule \mathfrak{S}_p désigne le groupe symétrique d'ordre p que l'on fait agir sur $M^{\otimes p}$ par permutation des facteurs (attention aux signes: M est gradué!) et $\hat{H}^0(\ ; \)$ est le 0-ème foncteur de cohomologie de Tate («les invariants divisés par les normes»). Soit x un élément de M , que l'on suppose de degré pair pour $p > 2$, alors l'application $\Theta M \rightarrow \hat{H}^0(\mathfrak{S}_p; M^{\otimes p})$ qui envoie Θx sur la classe de $x^{\otimes p}$ est un isomorphisme de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels gradués.

Soit K une \mathbb{F}_p -coalgèbre. Le Verschiebung de K , $\xi: K \rightarrow \Theta K$, s'identifie à l'application linéaire de degré zéro $\hat{H}^0(\mathfrak{S}_p; K) \rightarrow \hat{H}^0(\mathfrak{S}_p; K^{\otimes p})$ induite par le coproduit itéré p fois $K \rightarrow K^{\otimes p}$ qui est équivariant lorsque l'on fait agir \mathfrak{S}_p trivialement sur K .

Les \mathbb{F}_p -espaces vectoriels gradués avec Verschiebung. Les considérations précédentes nous conduisent à introduire la catégorie $\hat{\mathcal{U}}_*^{\mathbb{F}_p}$ des « \mathbb{F}_p -espaces vectoriels gradués avec Verschiebung» définie comme suit. Un objet de $\hat{\mathcal{U}}_*^{\mathbb{F}_p}$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué M muni d'une application linéaire de degré zéro $\xi: M \rightarrow \Theta M$, appelée Verschiebung, qui est l'identité en degré zéro; les morphismes de $\hat{\mathcal{U}}_*^{\mathbb{F}_p}$ sont les applications linéaires de degré zéro commutant au Verschiebung. Comme précédemment on note $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ la sous-catégorie pleine de $\hat{\mathcal{U}}_*^{\mathbb{F}_p}$ dont les objets sont connexes; manifestement $\hat{\mathcal{U}}_*^{\mathbb{F}_p}$ est le produit de la catégorie $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ et de la catégorie des \mathbb{F}_p -espaces vectoriels.

On observera que le produit tensoriel $M \otimes N$ de deux \mathbb{F}_p -espaces vectoriels gradués avec Verschiebung possède un Verschiebung naturel.

La catégorie $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ est une catégorie abélienne. Elle possède des projectifs $G^{\mathbb{F}_p}(n)$, $n > 0$, caractérisés par l'isomorphisme fonctoriel en M :

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}}(G^{\mathbb{F}_p}(n), M) \cong M_n.$$

Ces projectifs peuvent s'explicitier de la façon suivante. Soient $[G^{\mathbb{F}_p}(n)]$ la «classe canonique» de $G^{\mathbb{F}_p}(n)$, c'est-à-dire l'élément de degré n correspondant par la bijection ci-dessus à l'identité de $G^{\mathbb{F}_p}(n)$, et κ l'application de $\mathbb{N} - \{0\}$ dans \mathbb{N} définie de la façon suivante:

$$\kappa(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ v_p(n) & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

$v_p(n)$ désignant la valuation p -adique de n .

Proposition 1.1.1.1 *Soit n un entier strictement positif. Les éléments $[G^{\mathbb{F}_p}(n)]$, $\zeta[G^{\mathbb{F}_p}(n)]$, ..., $\zeta^{\kappa(n)}[G^{\mathbb{F}_p}(n)]$ forment une \mathbb{F}_p -base de $G^{\mathbb{F}_p}(n)$.*

La vérification de cette proposition est laissée au lecteur.

On peut montrer par ailleurs que la catégorie $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ est de dimension projective un et que tout projectif est une somme directe $\bigoplus_{\alpha} G^{\mathbb{F}_p}(n_{\alpha})$.

Soit K une \mathbb{F}_p -coalgèbre, le Verschiebung de K fait de \bar{K} un \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué (connexe) avec Verschiebung.

Proposition-Définition 1.1.1.2 *Le foncteur $\mathcal{X}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$, $K \mapsto \bar{K}$ possède un adjoint à droite noté $V: \mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{X}_*^{\mathbb{F}_p}$.*

La démonstration de cette proposition ne présente pas de difficultés.

1.1.2 \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf

On note $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ (resp. $\mathcal{H}'_*^{\mathbb{F}_p}$) la catégorie des objets en groupes (resp. en monoïdes) de $\mathcal{X}_*^{\mathbb{F}_p}$. Le produit dans la catégorie $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ étant le produit tensoriel, un objet de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ est donc une \mathbb{F}_p -coalgèbre H munie d'un produit $\mu: H \otimes H \rightarrow H$ et d'une unité $\eta: \mathbb{F}_p \rightarrow H$ vérifiant les axiomes habituels; puisque nous avons con-

venu que les objets de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ sont connexes, il existe une unique antiinvolution $\chi: H \rightarrow H$ (voir [MM, p. 259]) et H est en fait un objet en groupe. Il n'y a donc pas lieu de distinguer entre les catégories $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ et $\mathcal{H}'_*^{\mathbb{F}_p}$ (voir [MM, Sect. 8.9, p. 260]). Nous appellerons \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf les objets de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$. La sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ dont les objets sont les \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf abéliennes, c'est-à-dire dont le produit est commutatif (au sens gradué) est notée $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, ab}$; notons que l'inclusion $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, ab} \hookrightarrow \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ admet un adjoint à gauche que l'on appelle «abélianisation» (pour une construction de ce foncteur voir par exemple [MS1]).

La \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf concentrée en degré zéro et égale à \mathbb{F}_p en ce degré, que l'on notera \mathbb{F}_p ou $*$, est un objet zéro de la catégorie $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ (c'est-à-dire à la fois initial et final, voir [Mac]).

La catégorie $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ possède des produits fibrés et donc des noyaux et des produits (voir [MS1]). Soient $H' \rightarrow H$ et $H'' \rightarrow H$ deux $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisms, rappelons que le H -comodule sous-jacent à la \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf $H' \times_H H''$ est le produit cotensoriel $H' \square_H H''$ (voir [MM, p. 219]); en particulier le produit tensoriel de deux \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf est leur produit dans $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ et le noyau d'un $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme $H' \rightarrow H$ est $\mathbb{F}_p \square_H H'$.

La catégorie $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ possède également des sommes quelconques (voir [MS1]).

$\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -suites exactes. Une suite de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisms $H^m \rightarrow H^{m+1} \rightarrow \dots \rightarrow H^n$ ($m+1 < n$) est dite exacte si l'image du morphisme $H^{k-1} \rightarrow H^k$ est égale au noyau (dans $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$) du morphisme $H^k \rightarrow H^{k+1}$ pour tout k avec $m < k < n$.

Sous- \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf normales

Proposition-Définition 1.1.2.1 Soit H' une sous- \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf d'une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf H . Les deux conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) pour toute \mathbb{F}_p -coalgèbre K le sous-groupe $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(K, H')$ est normal dans $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(K, H)$;
- (ii) l'idéal à droite et l'idéal à gauche de H engendrés par \bar{H}' coïncident.

Lorsque ces conditions sont réalisées on dit que H' est normale dans H .

Si (ii) est satisfaite on note $H//H'$ le quotient de H par l'idéal (bilatère) engendré par \bar{H}' ; $H//H'$ possède une unique $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -structure faisant de la projection canonique $H \rightarrow H//H'$ un $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme, dont le noyau (dans $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$) est précisément H' [MM]. Ceci prouve l'implication (ii) \Rightarrow (i). Pour vérifier l'implication (i) \Rightarrow (ii) on introduit le $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -automorphisme de $H' \otimes H$ correspondant à l'automorphisme naturel en K de l'ensemble pointé $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(K, H') \times \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(K, H)$ donné par la formule $(g', g) \mapsto (g' g' g^{-1}, g)$.

Sous- \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf centrales. La proposition suivante est évidente:

Proposition-Définition 1.1.2.2 Soit H' une sous- \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf d'une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf H . Les deux conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) pour toute \mathbb{F}_p -coalgèbre K le sous-groupe $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(K, H')$ est central dans $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(K, H)$;
- (ii) il existe un $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme (nécessairement unique) $H' \otimes H \rightarrow H$ dont les restrictions à $H' \otimes \mathbb{F}_p$ et $\mathbb{F}_p \otimes H$ s'identifient respectivement à l'inclusion de H' dans H et l'identité de H .

Lorsque ces conditions sont réalisées on dit que H' est centrale dans H (on observera que ceci impose à H' d'être abélienne et normale dans H).

Soient H' et H comme ci-dessus et $\alpha: H' \otimes H \rightarrow H$ le $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme mentionné dans (ii). Pour toute \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf L l'ensemble pointé $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(L, H')$ est naturellement muni d'une structure de groupe abélien et α induit une action de ce groupe sur l'ensemble pointé $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(L, H)$.

Proposition 1.1.2.3 *Soit H' une sous- \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf centrale d'une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf H . Alors pour toute \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf L l'action du groupe abélien $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(L, H')$ sur l'ensemble pointé $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(L, H)$ est libre et l'application d'ensemble pointés $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(L, H) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(L, H//H')$ induit une injection de l'ensemble des orbites dans $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(L, H//H')$.*

Démonstration. Soit $\iota: H' \otimes H \rightarrow H \times_{H//H'} H$ le $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme induisant la projection $H' \otimes H \rightarrow H$ sur le premier facteur et α sur le second; la proposition découle formellement de ce que ι est un isomorphisme. On s'en convainc en contemplant la transformation naturelle $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(-, \iota)$. \square

\mathbb{F}_p -algèbres de Hopf p -abéliennes. Nous dirons qu'une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf H est p -abélienne si elle est abélienne et si la puissance p -ème de tout élément de \bar{H} est nulle (il s'agit donc d'une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf coprimitive dans la terminologie de [MS1]). On note $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, p-ab}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ dont les objets sont les \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf p -abéliennes.

Remarque. Si H est p -abélienne alors pour toute une \mathbb{F}_p -coalgèbre K le groupe $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(K, H)$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel mais la réciproque n'est pas vraie.

Soit M un objet de $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$. L'addition $M \oplus M \rightarrow M$ induit une structure de \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf sur la \mathbb{F}_p -coalgèbre VM ; cette \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf est p -abélienne par construction. En fait le foncteur $V: \mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ ainsi obtenu induit une équivalence de catégories $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p} \cong \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, p-ab}$.

Soit H une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf; on note QH le \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué des indécomposables de H , c'est-à-dire le quotient \bar{H}/\bar{H}^2 . Le *Verschiebung* de H induit sur QH une structure de \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué connexe avec *Verschiebung*; le foncteur «indécomposables» défini sur la catégorie $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ est donc à valeurs dans la catégorie $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$.

Proposition 1.1.2.4 (a) *Le foncteur $V: \mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ est adjoint à droite du foncteur $Q: \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$.*

(b) *Soit M un \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué connexe avec *Verschiebung*. Alors la coïunité de l'adjonction $QVM \rightarrow M$ est un $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -isomorphisme.*

(c) *Soit H une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf. Alors l'unité de l'adjonction $H \rightarrow VQH$ est un $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -épimorphisme. De plus H est p -abélienne si et seulement si $H \rightarrow VQH$ est un $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -isomorphisme.*

(d) *Le foncteur $V: \mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ est exact: soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -suite exacte courte, alors la $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -suite $* \rightarrow VM' \rightarrow VM \rightarrow VM'' \rightarrow *$ est exacte.*

(e) *Pour toute paire (M, N) de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels gradués connexes avec *Verschiebung* l'application naturelle:*

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(VM, VN)$$

est bijective.

La vérification de cette proposition est laissée au lecteur (faire un usage répété de [MM]). Elle implique bien que le foncteur $V: \mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, p^{-ab}}$ est une équivalence de catégories (dont l'inverse est le foncteur $Q: \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, p^{-ab}} \rightarrow \mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$).

\mathbb{F}_p -algèbre de Hopf librement engendrée par une \mathbb{F}_p -coalgèbre. Nous avons besoin pour des raisons techniques d'introduire la catégorie $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$ définie de la façon suivante. Un objet de $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$ est la donnée :

- d'un \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué avec Verschiebung L ;
- de $\widehat{\mathcal{U}}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisms $\mu: L \otimes L \rightarrow L$ et $\eta: \mathbb{F}_p \rightarrow L$ faisant de L une \mathbb{F}_p -algèbre graduée connexe (ce qui signifie que l'unité $\eta: \mathbb{F}_p \rightarrow L$ induit un isomorphisme en degré zéro).

Soit M un \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué connexe avec Verschiebung; l'algèbre tensorielle sur M , $\text{Tens}(M)$, est canoniquement un objet de $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$. La proposition suivante est classique.

Proposition-Définition 1.1.2.5 *Le foncteur oublie $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ admet un adjoint à gauche $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ que l'on note J .*

Démonstration. Soit K une \mathbb{F}_p -coalgèbre. Considérons l'algèbre tensorielle $\text{Tens}(\bar{K})$; c'est un objet de $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$. Il existe un unique $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme $\Delta: \text{Tens}(\bar{K}) \rightarrow \text{Tens}(\bar{K}) \otimes \text{Tens}(\bar{K})$ qui fait de $\text{Tens}(\bar{K})$ une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf et de l'inclusion canonique $K \hookrightarrow \text{Tens}(\bar{K})$ un $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme. On note JK l'objet en monoïde de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ ainsi obtenu. On se convainc aisément que le foncteur J est adjoint à gauche du foncteur oublie $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$. \square

Commentaires. Ce paragraphe 1.1.2 met en évidence l'analogie entre la catégorie $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ et celle des groupes (voir [MM, p. 762]), $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, ab}$ jouant le rôle de la sous-catégorie des groupes abéliens et $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, p^{-ab}}$ celui de la sous-catégorie des \mathbb{F}_p -espaces vectoriels (et les JK jouant le rôle de groupe libres). En fait l'analogie est plus grande encore avec la catégorie des pro-(groupes p -nilpotents) (rappelons qu'un groupe G est dit p -nilpotent s'il existe une filtration finie de G , $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n = \{1\}$, par des sous-groupes normaux telle que G_k/G_{k+1} est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel et la suite exacte $\{1\} \rightarrow G_k/G_{k+1} \rightarrow G/G_{k+1} \rightarrow G/G_k \rightarrow \{1\}$ une extension centrale pour $0 \leq k < n$). En effet considérons la suite p -centrale descendante d'une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf H (voir [MS1, p. 766]):

$$H = \Gamma_1^{[p]} H \supset \Gamma_2^{[p]} H \supset \dots \supset \Gamma_n^{[p]} H \supset \dots,$$

alors par construction $H//\Gamma_n^{[p]} H$ est « p -nilpotente» et H est la limite inverse des $H//\Gamma_n^{[p]} H$.

Voici une autre illustration de ce point de vue.

Proposition 1.1.2.6 *Soit H' une sous- \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf d'une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf H . Alors il existe une suite décroissante (naturelle en la paire (H, H')) de sous- \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf :*

$$H = H^0 \supset H^1 \supset \dots \supset H^n \supset \dots \supset H'$$

telle que :

- H^{n+1} est normale dans H^n et $H^n//H^{n+1}$ est p -abélienne pour tout $n \geq 0$;
- $H' = \bigcap_{n \geq 0} H^n$.

Démonstration. On construit les H^n par récurrence sur n en utilisant le lemme ci-après.

Lemme 1.1.2.7 *Soit H' une sous- \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf d'une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf H . Soit M le conoyau du $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme $QH' \rightarrow QH$ et H'' le noyau du $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -épimorphisme canonique $H \twoheadrightarrow VM$. Si l'inclusion $H' \hookrightarrow H$ induit un isomorphisme en degré $\leq n$ alors l'inclusion $H' \hookrightarrow H''$ induit un isomorphisme en degré $\leq n + 1$.*

Démonstration. On utilise essentiellement le point suivant: si $* \rightarrow L \rightarrow L' \rightarrow *$ est une $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -suite exacte telle que QL' est nul en degré $\leq n$, alors la suite de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels $0 \rightarrow (QL)_{n+1} \rightarrow (QL)_{n+1} \rightarrow (QL')_{n+1} \rightarrow 0$ est exacte. \square

La proposition 1.1.2.6 admet le corollaire suivant dont l'analogue dans la catégorie des A -algèbres de Hopf instables (voir 1.6.3) aura son importance dans la partie 2.

Corollaire 1.1.2.8 *Soient $* \rightarrow H' \rightarrow H \rightarrow H''$ une $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -suite exacte et W un objet projectif de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ (ce qui signifie que le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W, -)$ transforme $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -épimorphismes en surjections). Si l'ensemble pointé $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W, H')$ est trivial alors l'application $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W, H) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W, H'')$ est injective.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que l'application $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W, H) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W, H \times_{H''} H)$ induite par le $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -monomorphisme «diagonal» est surjective (bijective). On pose $L = H \times_{H''} H$ et l'on note $\delta: H \rightarrow L$ ce monomorphisme. La méthode est d'appliquer la proposition 1.1.2.6 à l'inclusion $\delta(H) \hookrightarrow L$. On note $L = L^0 \supset L^1 \supset \dots \supset L^n \supset \dots \supset \delta(H)$ la suite décroissante de sous- \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf ainsi obtenue et on observe que $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W, \delta)$ s'identifie à l'application canonique de la limite inverse des $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W, L^n)$ dans $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W, L)$. En considérant la $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -suite exacte scindée:

$$* \rightarrow H' \cap L^n \rightarrow L^n \xrightarrow{\delta} H \rightarrow *$$

(dans laquelle les flèches $H' \cap L^n \rightarrow L^n$ et $L^n \rightarrow H$ sont respectivement induites par l'inclusion de $H' \times *$ dans $H \times H$ et par la projection de $H \times H$ sur le second facteur) et en utilisant l'exactitude à droite de Q et la proposition 1.1.2.4 on se convainc que le $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme canonique $H' \cap L^n \rightarrow L^n // L^{n+1}$ est un épimorphisme. Comme W est projectif on en déduit que l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W, L^n // L^{n+1})$ est trivial. L'application $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W, L^n) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W, L^{n+1})$ est donc bijective. \square

1.2 Structure des projectifs de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$

Rappelons que l'on dit qu'un objet P d'une catégorie \mathcal{C} est projectif (ou que P est \mathcal{C} -projectif) si pour tout \mathcal{C} -épimorphisme $\pi: A \twoheadrightarrow B$ tout morphisme $\phi: P \rightarrow B$ se relève en un morphisme $\tilde{\phi}: P \rightarrow A$ (voir [Mac]).

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant qui est le résultat essentiel de la partie 1:

Théorème 1.2.1 (a) Soit M un $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif. Alors :

(a.1) La $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$ -structure de $\text{Tens}(M)$ peut se prolonger en une $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -structure; en d'autres termes, il existe au moins un $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme $\text{Tens}(M) \rightarrow \text{Tens}(M) \otimes \text{Tens}(M)$ qui fasse de $\text{Tens}(M)$ une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf.

On note $C(M)$ l'ensemble de ces $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisms et $W(M, \Delta)$ la \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf associée à un élément Δ de $C(M)$.

(a.2) Soit Δ un élément de $C(M)$. Alors $W(M, \Delta)$ est $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif.

(a.3) Soient Δ et Δ' deux éléments de $C(M)$. Alors $W(M, \Delta)$ et $W(M, \Delta')$ sont $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -isomorphes.

(b) Réciproquement, soit H une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H est $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif;

(ii) QH est $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif et la \mathbb{F}_p -algèbre graduée sous-jacente à H est libre, c'est-à-dire isomorphe à l'algèbre tensorielle d'un \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué connexe.

De plus si ces conditions sont vérifiées H est isomorphe à $W(QH, \Delta)$ pour tout Δ dans $C(QH)$.

Remarques. (1) Un exemple de $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectifs est donné par la famille $\{G^{\mathbb{F}_p}(n)\}_{n>0}$ (voir 1.1.1).

Pour tout $n>0$, choisissons une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf $W^{\mathbb{F}_p}(n)$ dont la $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$ -structure sous-jacente est celle de $\text{Tens}(G^{\mathbb{F}_p}(n))$ (pour une «normalisation» de ce choix voir 1.5.4). Alors tout $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif est une $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -somme de $W^{\mathbb{F}_p}(n_\alpha)$. En effet d'après la deuxième partie du (b) le foncteur Q induit une bijection entre les classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectifs et de $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectifs et tout $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif est une $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -somme de $G^{\mathbb{F}_p}(n_\alpha)$. Un argument analogue montre que les $W^{\mathbb{F}_p}(n)$ sont des générateurs projectifs de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$: toute \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf H est le quotient d'une $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -somme de $W^{\mathbb{F}_p}(n_\alpha)$ (utiliser 1.2.3.3).

(2) Soit K une \mathbb{F}_p -coalgèbre telle que \bar{K} est $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif (ou ce qui revient au même telle que le \mathbb{F}_p -espace vectoriel avec Verschiebung sous-jacent à K est $\tilde{\mathcal{U}}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif). Alors la construction J de 1.1.2.5 fournit un élément particulier de $C(\bar{K})$ et JK est $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif d'après le théorème 1.2.1. Notons cependant qu'en général un $\tilde{\mathcal{U}}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif (de dimension un en degré zéro) ne possède pas de structure de \mathbb{F}_p -coalgèbre. Par exemple, $\mathbb{F}_p \oplus G^{\mathbb{F}_p}(n)$ possède une structure de \mathbb{F}_p -coalgèbre si et seulement si n n'est pas divisible par $2p$.

1.2.3 Démonstration du théorème 1.2.1

Le théorème 1.2.1 repose sur le lemme suivant, dont la démonstration sera donnée à la fin de ce paragraphe.

Lemme 1.2.3.1 Soient H et H' deux \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf et $\pi: H \rightarrow H'$ un $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -épimorphisme. Supposons que QH' est $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif. Alors il existe une sous- \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf H'' de H telle que la composition $QH' \rightarrow QH \rightarrow QH''$ est un isomorphisme.

Démonstration du point (a.1) du théorème 1.2.1 Soit M un $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif. Nous appliquons le lemme 1.2.3.1 en prenant pour H la \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf JVM et pour π le $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -épimorphisme $JVM \rightarrow VM$ composé de l'épimorphisme $JVM \rightarrow V\overline{VM}$ et de l'épimorphisme $V\overline{VM} \rightarrow VM$ induit par la coïunité de l'adjonction $\overline{VM} \rightarrow M$. Ce lemme nous fournit une sous- \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf de JVM que nous notons W telle que la composition $QW \rightarrow QJVM \cong \overline{VM} \rightarrow M$ est un isomorphisme. Puisque M est $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif il existe un $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$ -épimorphisme $\phi: \text{Tens}(M) \rightarrow W$ qui induit l'isomorphisme inverse sur les indécomposables. Nous allons montrer qu'un tel ϕ est un isomorphisme ce qui prouvera bien que la $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$ -structure de $\text{Tens}(M)$ se prolonge en une $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -structure.

Pour cela on montre que la composition $\text{Tens}(M) \xrightarrow{\phi} W \hookrightarrow JVM$ est un monomorphisme ce qui résulte du lemme suivant :

Lemme 1.2.3.2 *Soit $f: S \rightarrow T$ un homomorphisme de \mathbb{F}_p -algèbres graduées connexes avec T libre. Si $Qf: QS \rightarrow QT$ est un monomorphisme (resp. un isomorphisme) alors il en est de même pour f .*

Démonstration. Soit R une \mathbb{F}_p -algèbre graduée connexe, on pose $Gr(R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \overline{R}^n / R^{n+1}$ (\overline{R}^n désignant la puissance n -ème de l'idéal d'augmentation de

R); $Gr(R)$ est encore une \mathbb{F}_p -algèbre graduée connexe et l'on a un épimorphisme canonique $\tau_R: \text{Tens}(QR) \rightarrow Gr(R)$. Il est facile de voir que si $Gr(f): Gr(S) \rightarrow Gr(T)$ est un monomorphisme (resp. un isomorphisme) il en est de même pour f . On conclut en contemplant le diagramme commutatif ci-dessus :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Tens}(QS) & \xrightarrow{\text{Tens}(Qf)} & \text{Tens}(QT) \\
 \downarrow \tau_S & & \downarrow \tau_T \\
 Gr(S) & \xrightarrow{Gr(f)} & Gr(T)
 \end{array}$$

et en remarquant que si T est libre τ_T est un isomorphisme.

Démonstration du point (a.2) Soient $f: L \rightarrow L'$ un $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -épimorphisme, $g: W(M, \Delta) \rightarrow L'$ un $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme, H le produit fibré $W(M, \Delta) \times_{L'} K$ dans la catégorie $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ (produit cotensoriel). Il faut montrer que le morphisme canonique $\gamma: H \rightarrow W(M, \Delta)$ possède une section.

Puisque L est un L' -comodule colibre (voir [MM, proposition 4.9, p. 229]), donc «coplat», γ est surjectif si bien que l'on peut à nouveau appliquer le lemme 1.2.3.1. Il existe donc une sous- \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf H' de H telle que la restriction à H' de γ induit un isomorphisme sur les indécomposables. Le lemme 1.2.3.2 montre alors que cette restriction est un isomorphisme.

Démonstration des points (a.3) et (b) Le fait que si H est $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif QH est $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif résulte de ce que le foncteur Q est adjoint à gauche du foncteur $V: \mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ qui préserve les épimorphismes.

Le reste du point (b) et le point (a.3) découlent encore du lemme 1.2.3.2 et du lemme suivant qui est une conséquence formelle de la proposition 1.1.2.4 :

Lemme 1.2.3.3 *Soient W et H deux \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf. Si W est $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif, l'application naturelle $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W, H) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}}(QW, QH)$ est une surjection.*

Démonstration du lemme 1.2.3.1 Soient $\rho: QH \rightarrow \ker Q\pi$ une rétraction de QH sur $\ker Q\pi$ (une telle rétraction existe parce que QH'' est $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif), H^ρ la sous- \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf de H noyau (dans $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$) de la composition $H \rightarrow VQH \xrightarrow{V} V(\ker Q\pi)$, et π^ρ la composition $H^\rho \rightarrow H \rightarrow H''$.

Sous-lemme 1.2.3.4 (a) *Le $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme π^ρ est encore un épimorphisme. De plus si $Q\pi$ induit un isomorphisme en degré inférieur ou égal à un certain entier n alors :*

- (b) *$Q\pi^\rho$ induit un isomorphisme en degré inférieur ou égal à $n + 1$;*
- (c) *l'inclusion $H^\rho \hookrightarrow H$ induit un isomorphisme en degré $\leq n$.*

Démonstration. On utilise les points suivants :

- le foncteur $Q: \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ est exact à droite ;
- pour toute $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -suite exacte $* \rightarrow H' \rightarrow H \rightarrow H'' \rightarrow *$ telle que \bar{H}'' est nul en degré $\leq n$, les suites de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels $0 \rightarrow H'_d \rightarrow H_d \rightarrow \bar{H}''_d \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow (QH')_d \rightarrow (QH)_d \rightarrow (QH'')_d \cong \bar{H}''_d \rightarrow 0$, $d \leq n + 1$, sont exactes.

On démontre alors le lemme 1.2.3.1 de la façon suivante. En appliquant itérativement le sous-lemme ci dessus on construit une suite décroissante de sous- \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf de H , $H = H^0 \supset H^1 \supset \dots \supset H^n \supset \dots$, telle que :

- la composition $QH^n \rightarrow QH \xrightarrow{Q\pi} QH''$ est un épimorphisme qui induit un isomorphisme en degré $\leq n$;
- l'inclusion $H^{n+1} \hookrightarrow H^n$ induit un isomorphisme en degré $\leq n$, et l'on prend pour H' l'intersection des H^n . La composition $QH' \rightarrow QH \rightarrow QH''$ est bien un isomorphisme parce que l'inclusion $H' \hookrightarrow H^n$ induit un isomorphisme en degré $\leq n$ et donc un isomorphisme sur les indécomposables en degré $\leq n$. \square

1.3 Premières variantes du théorème 1.2.1

La démonstration du théorème 1.2.1 que nous avons donnée s'adapte à d'autres situations.

1.3.1 Variante abélienne du théorème 1.2.1

On note $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$ constitué des objets pour lesquels le produit μ est commutatif (au sens gradué). Soit M un \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué connexe. On note $\text{Sym}(M)$ la \mathbb{F}_p -algèbre graduée commutative (au sens gradué) libre sur M ; si M est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel avec *Verschiebung* $\text{Sym}(M)$ est alors un objet de $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$.

Théorème 1.3.1 *On peut dans l'énoncé 1.2.1 remplacer respectivement $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$, $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ et $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$ par $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$, $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ et $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$ et $\text{Tens}(-)$ par $\text{Sym}(-)$.*

La démonstration de ce théorème est formellement analogue à celle du théorème 1.2.1. On peut voir également le théorème 1.3.1 comme un corollaire du théorème 1.2.1.

1.3.2 De même le théorème 1.2.1 (resp. 1.3.1) admet une variante avec la mention «de dimension finie en chaque degrés» si l'on se place dans le contexte des catégories $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{gf}}$, $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p, \text{gf}}$, $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p, \text{gf}}$ (resp. $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab, gf}}$, $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab, gf}}$, $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab, gf}}$), sous-catégo-

ries pleines des catégories $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$, $\mathcal{W}_*^{\mathbb{F}_p}$, $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$ (resp. $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$, $\mathcal{W}_*^{\mathbb{F}_p}$, $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$), dont les objets sont de dimension finie en chaque degré.

1.3.3 On peut considérer également la catégorie $\mathcal{H}_*^{\mathbb{Q}}$ des \mathbb{Q} -algèbres de Hopf graduées cocommutatives connexes, la catégorie des \mathbb{Q} -espaces vectoriels jouant le rôle de $\mathcal{W}_*^{\mathbb{F}_p}$. En particulier un objet de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{Q}}$ est projectif si et seulement si son algèbre sous-jacente est libre (i.e. tensorielle).

1.4 Lien avec les vecteurs de Witt

1.4.1 Soit $n > 0$; on pose $C(n) = C(G^{\mathbb{F}_p}(n))$ et $C^{\text{ab}}(n) = C^{\text{ab}}(G^{\mathbb{F}_p}(n))$, $C^{\text{ab}}(-)$ désignant l'analogie, dans le contexte de 1.2.2, de la notation $C(\)$ introduite dans l'énoncé du théorème 1.2.1. On se propose tout d'abord d'expliciter la définition des ensembles $C(n)$ et $C^{\text{ab}}(n)$.

On pose $k = \kappa(n)$ et $x_i = \zeta^{k-i}[G^{\mathbb{F}_p}(n)]$, $i = 0, 1, \dots, k$; x_i est un élément de degré n/p^{k-i} . Les x_i forment une \mathbb{F}_p -base de $G^{\mathbb{F}_p}(n)$ (c'est ce qu'affirme la proposition 1.1.1) et l'on a par définition $\zeta x_i = x_{i-1}$ pour $k \geq i \geq 1$ et $\zeta x_0 = 0$. La \mathbb{F}_p -algèbre graduée $\text{Tens}(G^{\mathbb{F}_p}(n))$ (resp. $\text{Sym}(G^{\mathbb{F}_p}(n))$) s'identifie à la \mathbb{F}_p -algèbre graduée (resp. \mathbb{F}_p -algèbre graduée commutative) librement engendrée par les x_i que l'on notera encore $\text{Tens}(x_0, x_1, \dots, x_k)$ (resp. $\text{Sym}(x_0, x_1, \dots, x_k)$). L'ensemble $C(n)$ (resp. $C^{\text{ab}}(n)$) est donc celui des homomorphismes de \mathbb{F}_p -algèbres graduées $\Delta: \text{Tens}(x_0, x_1, \dots, x_k) \rightarrow \text{Tens}(x_0, x_1, \dots, x_k) \otimes \text{Tens}(x_0, x_1, \dots, x_k)$ (resp. $\Delta: \text{Sym}(x_0, x_1, \dots, x_k) \rightarrow \text{Sym}(x_0, x_1, \dots, x_k) \otimes \text{Sym}(x_0, x_1, \dots, x_k)$) munissant la \mathbb{F}_p -algèbre graduée $\text{Tens}(x_0, x_1, \dots, x_k)$ (resp. $\text{Sym}(x_0, x_1, \dots, x_k)$) d'une structure de \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf (resp. \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf abélienne) dont le *Verschiebung* est déterminé par $\zeta x_i = x_{i-1}$ pour $k \geq i \geq 1$ et $\zeta x_0 = 0$.

Manifestement:

- Les ensembles $C(n)$ et $C^{\text{ab}}(n)$ sont finis.
- On a une application « d'abélianisation » $\alpha: C(n) \rightarrow C^{\text{ab}}(n)$.
- Si $k \geq 1$ (c'est-à-dire, pour $p = 2$ si n est pair et pour $p > 2$ si n est divisible par $2p$) on a des applications de restrictions $\rho: C(n) \rightarrow C(n/p)$ et $\rho^{\text{ab}}: C^{\text{ab}}(n) \rightarrow C^{\text{ab}}(n/p)$.

Soit Δ un élément de $C(n)$ (resp. de $C^{\text{ab}}(n)$). On désignera par $W^{\mathbb{F}_p}(n, \Delta)$ (resp. $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n, \Delta)$) la \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf (resp. \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf abélienne) obtenue en munissant la \mathbb{F}_p -algèbre graduée $\text{Tens}(x_0, x_1, \dots, x_k)$ (resp. $\text{Sym}(x_0, x_1, \dots, x_k)$) du coproduit Δ (on a donc avec les notations de 1.2.1, $W^{\mathbb{F}_p}(n, \Delta) = W(G^{\mathbb{F}_p}(n), \Delta)$).

Le théorème 1.2.1 (resp. 1.3.1) affirme entre autres que l'ensemble $C(n)$ (resp. $C^{\text{ab}}(n)$) est non vide et que si Δ et Δ' sont deux éléments de $C(n)$ (resp. $C^{\text{ab}}(n)$) $W^{\mathbb{F}_p}(n, \Delta)$ et $W^{\mathbb{F}_p}(n, \Delta')$ (resp. $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n, \Delta)$ et $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n, \Delta')$) sont deux objets isomorphes de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ (resp. $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$).

Nous démontrerons au prochain paragraphe la proposition suivante.

Proposition 1.4.1 (a) *L'application d'abélianisation $\alpha: C(n) \rightarrow C^{\text{ab}}(n)$ est surjective pour tout n .*

Si $k \geq 1$ alors:

(b) *les applications de restriction $\rho: C(n) \rightarrow C(n/p)$ et $\rho^{\text{ab}}: C^{\text{ab}}(n) \rightarrow C^{\text{ab}}(n/p)$ sont surjectives:*

(c) *de plus l'application de $C(n)$ dans le produit fibré ensembliste de $C^{\text{ab}}(n)$ et de $C(n/p)$ au-dessus de $C^{\text{ab}}(n/p)$ est surjective.*

Si n est impair, $C(n)$ est réduit à un élément: la \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf correspondante est l'algèbre de polynômes sur un générateur de dimension n , $\mathbb{F}_p[x_0]$, munie du coproduit pour lequel x_0 est primitif.

Noter que pour $p > 2$, contrairement aux apparences, cette algèbre de Hopf n'est pas abélienne! Son abélianisée est l'algèbre extérieure sur x_0 , $\mathbb{F}_p[x_0]/(x_0)^2$, correspondant à l'unique élément de $C^{ab}(n)$.

Pour éviter ce cas particulier trivial et atypique nous supposons désormais, sauf mention expresse du contraire, que si le nombre premier p avec lequel on travaille est différent de 2 alors n est pair.

Soit ℓ un entier que l'on suppose impair si $p = 2$, pair et non divisible par p pour $p > 2$.

On note $G^{\mathbb{F}_p}(p^\infty \ell)$ le \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué avec Verschiebung réunion croissante des $G^{\mathbb{F}_p}(p^k \ell)$ (comme $\kappa(p^k \ell) = k$ cette notation est bien compatible avec ce qui précède); $G^{\mathbb{F}_p}(p^\infty \ell)$ a donc pour \mathbb{F}_p -base la famille des éléments x_k , $k \in \mathbb{N}$, de degré respectif $p^k \ell$, et son Verschiebung est donné par $\xi x_k = x_{k-1}$ pour $k \geq 1$ et $\xi x_0 = 0$.

On définit l'ensemble $C(p^\infty \ell)$ (resp. $C^{ab}(p^\infty \ell)$) en remplaçant dans la définition ci-dessus de $C(n)$ (resp. $C^{ab}(n)$) $\text{Tens}(x_0, x_1, \dots, x_k)$ (resp. $\text{Sym}(x_0, x_1, \dots, x_k)$) par $\text{Tens}(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$ (resp. $\text{Sym}(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$); observer que compte tenu de l'hypothèse faite sur ℓ la \mathbb{F}_p -algèbre graduée commutative $\text{Sym}(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$ n'est rien d'autre que l'algèbre de polynômes $\mathbb{F}_p[x_0, x_1, \dots, x_k, \dots]$. Il est clair que $C(p^\infty \ell)$ (resp. $C^{ab}(p^\infty \ell)$) s'identifie à la limite inverse en k des $C(p^k \ell)$ (resp. $C^{ab}(p^k \ell)$).

On note encore $\alpha: C(p^\infty \ell) \rightarrow C^{ab}(p^\infty \ell)$ l'application d'abélianisation et $W^{\mathbb{F}_p}(p^\infty \ell, \Delta)$ (resp. $W^{\mathbb{F}_p, ab}(p^\infty \ell, \Delta)$) la \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf définie par un élément Δ de $C(p^\infty \ell)$ (resp. $C^{ab}(p^\infty \ell)$). L'ensemble $C(p^\infty \ell)$ (resp. $C^{ab}(p^\infty \ell)$) est non vide. On peut voir ceci comme une conséquence de 1.4.1 (b). Ou alternativement de 1.3.2. En effet $G^{\mathbb{F}_p}(p^\infty \ell)$ est un $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p, \text{gf}}$ -projectif (bien qu'il ne soit pas $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif, c'est là la $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ -version du début de la Sect. 6 de [Mi]). Le point 1.3.2 montre en outre que la classe de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -isomorphisme de $W^{\mathbb{F}_p}(p^\infty \ell, \Delta)$ (resp. $W^{\mathbb{F}_p, ab}(p^\infty \ell, \Delta)$) est indépendante du choix de Δ dans $C(p^\infty \ell)$ (resp. $C^{ab}(p^\infty \ell)$) et que ces objets sont $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{gf}}$ -projectifs (resp. $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, ab, \text{gf}}$ -projectifs).

Nous allons décrire ci-dessous à l'aide des formules de Witt [Wi] un élément canonique Δ^{Witt} de $C^{ab}(p^\infty \ell)$. Le cas non abélien est plus mystérieux; il ne semble pas exister d'élément «canonique» dans $C(p^\infty \ell)$. Cependant la proposition 1.4.1 montre que le sous-ensemble $\alpha^{-1}(\Delta^{\text{Witt}})$ est non vide.

1.4.2 Rappels sur les vecteurs de Witt

Théorème 1.4.2 (Witt) Soient Φ_k , $k \in \mathbb{N}$, les polynômes, en les indéterminées (non graduées) x_k , $k \in \mathbb{N}$, à coefficients entiers, définis de la façon suivante :

$$\Phi_0 = x_0, \quad \Phi_1 = (x_0)^p + p x_1, \dots, \Phi_k = (x_0)^{p^k} + p(x_1)^{p^{k-1}} + \dots + p^k x_k, \dots$$

Alors il existe sur l'anneau $\mathbb{Z}[x_0, x_1, \dots, x_k, \dots]$ une unique structure d'anneau de Hopf pour laquelle les Φ_k sont primitifs.

Il est facile de voir que cette structure existe sur l'anneau $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right][x_0, x_1, \dots, x_k, \dots]$. Toute la difficulté du théorème précédent est de mon-

trer que les formules qui expriment le coproduit des x_k ont leurs coefficients dans \mathbb{Z} . Pour une démonstration, voir [Se].

Si l'on attribue à x_k le degré $p^k \ell$ alors $\mathbb{Z}[x_0, x_1, \dots, x_k, \dots]$ devient un anneau de Hopf bicommutatif gradué (qui est bicommutatif au sens gradué pour $p > 2$ mais non pour $p = 2$ car dans ce cas le degré de x_0 est impair) que l'on notera $W^{\mathbb{Z}, \text{ab}}(p^\infty \ell)$; le sous-anneau gradué $\mathbb{Z}[x_0, x_1, \dots, x_k]$ est en fait un sous-anneau de Hopf gradué que l'on notera $W^{\mathbb{Z}, \text{ab}}(p^k \ell)$.

On pose $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(p^\infty \ell) = \mathbb{F}_p \otimes W^{\mathbb{Z}, \text{ab}}(p^\infty \ell)$ (resp. $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n) = \mathbb{F}_p \otimes W^{\mathbb{Z}, \text{ab}}(n)$). La structure d'anneau de Hopf gradué de $W^{\mathbb{Z}, \text{ab}}(p^\infty \ell)$ (resp. $W^{\mathbb{Z}, \text{ab}}(n)$) induit une structure de \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf (graduée) abélienne sur $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(p^\infty \ell)$ (resp. $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$).

On peut montrer que le Verschiebung de $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(p^\infty \ell)$ (et donc de $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$) est donné par $\xi x_k = x_{k-1}$ pour $k \geq 1$ et $\xi x_0 = 0$. Pour une démonstration, voir par exemple [De]. Le coproduit de $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(p^\infty \ell)$ (resp. $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$) fournit donc bien un élément de $C^{\text{ab}}(p^\infty \ell)$ (resp. $C^{\text{ab}}(p^\infty \ell)$) que l'on appellera le coproduit de Witt et que l'on notera Δ^{Witt} .

Commentaires. L'algèbre de Hopf non graduée sous-jacente à $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(p^k \ell)$ est l'algèbre des fonctions régulières d'un groupe algébrique défini sur \mathbb{F}_p : le groupe W_k des vecteurs de Witt de longueurs $k + 1$. Ces W_k jouent un rôle clé dans l'étude des groupes unipotents commutatifs. Plus précisément on sait associer à un tel groupe un module sur l'anneau de Dieudonné (dont une complétion convenable est l'anneau des endomorphismes du groupe $W_\infty = \varprojlim W_k$) qui le caractérise à isomorphisme près (voir [DG]). Essentiellement, Schoeller a développé dans [Sc] une théorie analogue pour la catégorie des \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf graduées abéliennes connexes (i.e. $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$) en montrant que cette catégorie est isomorphe à une catégorie de modules de Dieudonné gradués. La $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$ -projectivité des $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$ apparaît déjà dans son travail.

Signalons enfin que l'existence d'un élément Δ de $C(p^\infty \ell)$ au-dessus de Δ^{Witt} a été obtenue (différemment) par Dieudonné dans son travail sur les groupes formels non commutatifs où il met en évidence le rôle universel de l'algèbre de Hopf $W^{\mathbb{F}_p}(p^\infty \ell, \Delta)$ (voir [Die] ou encore [Dit]).

1.4.3 Quelques exemples « non abéliens »

Voici quelques exemples d'éléments de $C(n)$, pour les petites valeurs de $k = \kappa(n)$, « au-dessus » du coproduit de Witt.

– $k = 1$.

L'ensemble $C(n)$ est réduit à un élément. Le coproduit réduit correspondant est déterminé par la formule suivante (rappelons que le coproduit réduit d'une \mathbb{F}_p -coalgèbre K est l'application $\bar{\Delta}: K \rightarrow \bar{K} \otimes \bar{K}$ induite par le coproduit):

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} x_1 &= - \sum_{0 < r < p} (C_r^r/p)(x_0)^{\otimes r} \otimes (x_0)^{\otimes (p-r)} \\ &= \sum_{0 < r < p} ((x_0)^{\otimes r}/r!) \otimes ((x_0)^{\otimes (p-r)}/(p-r)!) \\ &= \sum_{0 < r < p} ((-1)^r/r)(x_0)^{\otimes r} \otimes (x_0)^{\otimes (p-r)}. \end{aligned}$$

Pour $p=2$ on a $\bar{\Delta}x_1 = x_0 \otimes x_0$. En fait dans ce cas $\mathbb{F}_2 \oplus G^{\mathbb{F}_2}(n)$ possède une et une seule structure de \mathbb{F}_2 -coalgèbre, compatible avec le Verschiebung de $G^{\mathbb{F}_2}(n)$, donnée précisément par cette formule et $W^{\mathbb{F}_2}(n, \Delta)$ s'identifie à $J(\mathbb{F}_2 \oplus G^{\mathbb{F}_2}(n))$ (voir 1.1.2.5).

– $k=2, p=2$.

Le sous-ensemble $\alpha^{-1}(\Delta^{\text{Witt}})$ de $C(n)$ contient deux éléments. Le premier est déterminé par les formules :

$$\bar{\Delta}x_1 = x_0 \otimes x_0;$$

$$\bar{\Delta}x_2 = x_1 \otimes x_1 + x_0 x_1 \otimes x_0 + x_0 \otimes x_0 x_1 + (x_0)^3 \otimes x_0 + x_0 \otimes (x_0)^3.$$

Le second est obtenu en remplaçant dans l'expression de $\bar{\Delta}x_2$ ci-dessus le terme $x_0 x_1 \otimes x_0 + x_0 \otimes x_0 x_1$ par $x_1 x_0 \otimes x_0 + x_0 \otimes x_1 x_0$.

D'une manière générale, plus k est grand et plus il y a d'éléments de $C(n)$ au-dessus de Δ^{Witt} .

1.5 Construction par récurrence des \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf $W^{\mathbb{F}_p}(n, -)$

1.5.1 Rappels concernant les extensions de \mathbb{F}_p -coalgèbres

Soient K une \mathbb{F}_p -coalgèbre et M un \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué connexe. Une extension de K par M est la donnée d'une suite exacte $0 \rightarrow K \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels gradués telle que :

- E est un objet de $\mathcal{X}_*^{\mathbb{F}_p}$;
- $K \rightarrow E$ est un morphisme de \mathbb{F}_p -coalgèbres;
- M est un « coidéal coabsorbant », i.e. le coproduit réduit de $E, \bar{\Delta}: E \rightarrow (\bar{E} \otimes \bar{E})^{\mathfrak{S}_2}$ se factorise par l'inclusion $(\bar{K} \otimes \bar{K})^{\mathfrak{S}_2} \rightarrow (\bar{E} \otimes \bar{E})^{\mathfrak{S}_2}$ ($(\)^{\mathfrak{S}_2}$ désigne les invariants de l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_2 opérant par permutation des facteurs).

Deux telles extensions $0 \rightarrow K \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow K \rightarrow E' \rightarrow M \rightarrow 0$ sont dites équivalentes s'il existe un homomorphisme de \mathbb{F}_p -coalgèbres $E \rightarrow E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif.

On note $\text{Ext}_{\mathcal{X}_*^{\mathbb{F}_p}}^1(M, K)$ l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions de K par M que l'on munit par le procédé habituel d'une structure de groupe abélien.

Les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{X}_*^{\mathbb{F}_p}}^1(M, K)$ peuvent se calculer de la façon suivante.

Soit K \mathbb{F}_p -coalgèbre. On considère le complexe suivant :

$$\bar{K} \xrightarrow{\bar{\Delta}} (\bar{K} \otimes \bar{K})^{\mathfrak{S}_2} \xrightarrow{\bar{\Delta} \otimes \text{Id} - \text{Id} \otimes \bar{\Delta}} \bar{K} \otimes \bar{K} \otimes \bar{K}$$

où \bar{K} est le noyau de la coïunité et $\bar{\Delta}$ est le coproduit réduit. On note $\hat{P}K$ l'homologie de ce complexe en $(\bar{K} \otimes \bar{K})^{\mathfrak{S}_2}$ et ZK l'espace des cycles, c'est-à-dire le noyau de $\bar{\Delta} \otimes \text{Id} - \text{Id} \otimes \bar{\Delta}: (\bar{K} \otimes \bar{K})^{\mathfrak{S}_2} \rightarrow \bar{K} \otimes \bar{K} \otimes \bar{K}$.

Rappelons que le sous-espace des primitifs de K que l'on note PK est le noyau de $\bar{K} \xrightarrow{\Delta} (\bar{K} \otimes \bar{K})^{\mathfrak{S}_2}$.

Tout comme le foncteur P le foncteur $\hat{P}: \mathcal{X}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{E}_*$ commute aux limites directes filtrantes et aux produits finis. La première affirmation est claire et la vérification de la seconde est laissée au lecteur.

Nous noterons $P_n K$ (resp. $\hat{P}_n K, Z_n K$) le sous-espace des éléments de degré n de PK (resp. $\hat{P}K, ZK$).

Reprenons l'extension précédente $0 \rightarrow K \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$. La coassociativité du coproduit entraîne que le coproduit réduit de E se factorise en fait par un homomorphisme $\bar{E} \rightarrow ZK$; par passage au quotient on obtient un homomorphisme $M \rightarrow \hat{P}K$. Cette construction permet de définir un homomorphisme $\chi: \text{Ext}_{\mathcal{X}_*^{\mathbb{F}_p}}^1(M, K) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{E}_*}(M, \hat{P}K)$ (rappelons que la notation \mathcal{E}_* désigne la catégorie des \mathbb{F}_p -espaces vectoriels gradués connexes). On vérifie:

Proposition 1.5.1.1 *L'homomorphisme $\chi: \text{Ext}_{\mathcal{X}_*^{\mathbb{F}_p}}^1(M, K) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{E}_*}(M, \hat{P}K)$ est un isomorphisme.*

Soit z un élément de $Z_n K$; nous notons $(K, z)\langle x \rangle$ la \mathbb{F}_p -coalgèbre construite de la façon suivante. Comme \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué $(K, z)\langle x \rangle$ est la somme directe de K et du \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué de dimension un engendré par un indéterminé x de degré n ; le coproduit est le prolongement de celui de K déterminé par $\bar{\Delta}x = z$.

En associant à z l'élément ξx on définit un homomorphisme $ZK \rightarrow \Theta \bar{K}$ que l'on note θ . La commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccc} ZK & \xrightarrow{\theta} & \Theta \bar{K} \\ \uparrow \Delta & & \uparrow \xi \\ \bar{K} & = & \bar{K} \end{array}$$

montre que θ induit par passage au quotient un homomorphisme $v: \hat{P}K \rightarrow \text{Coker}(\xi: K \rightarrow \Theta K)$.

Proposition 1.5.1.2 *Soit H une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf, de dimension finie en chaque degré et concentrée en degrés pairs si $p > 2$. On suppose que le *Verschiebung* $\xi: H \rightarrow \Theta H$ est surjectif en degré strictement inférieur à un certain entier n . Alors $\hat{P}H$ est nul en degré $< n$ et v réalise un isomorphisme $\hat{P}_n H \cong (\text{Coker}(\xi: H \rightarrow \Theta H))_n$.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que la propriété que l'on veut établir ne concerne que la \mathbb{F}_p -coalgèbre sous-jacente à H .

On remarque ensuite que la \mathbb{F}_p -coalgèbre sous-jacente à H est d'après un théorème de Borel (voir [MM, p. 255]) isomorphe à une limite directe filtrante de produits (produits tensoriels) finis de \mathbb{F}_p -coalgèbres chacune duale d'une \mathbb{F}_p -algèbre graduée de la forme $\mathbb{F}_p[x]$ ou $\mathbb{F}_p[x]/x^{p^h}$ (x de degré pair si $p > 2$).

Comme le foncteur \hat{P} commute aux limites directes filtrantes et aux produits finis, on est ramené à vérifier la propriété de l'énoncé pour ces coalgèbres particulières, ce que l'on fait par inspection. \square

Corollaire-Définition 1.5.1.3 *Soient n un entier, que l'on suppose pair pour $p = 2$ et divisible par $2p$ pour $p > 2$, et Δ un élément de $C(n/p)$. Alors $\hat{P}W^{\mathbb{F}_p}(n/p, \Delta)$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel de dimension un, de base l'élément e_n dont l'image par v est la classe de Θx_{k-1} .*

1.5.2 Extension d'une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf H définie par un élément de ZH

Etant donnée une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf H et un élément z de $Z_n H$, nous définissons une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf, notée $(H, z)[x]$, de la façon suivante. Comme \mathbb{F}_p -algèbre graduée $(H, z)[x]$ est la somme (dans la catégorie des \mathbb{F}_p -algèbres graduées) de H et de l'algèbre de polynômes $\mathbb{F}_p[x]$ en une indéterminée x de degré n ; le coproduit est à nouveau le prolongement de celui de H déterminé par $\bar{\Delta}x = z$.

Par construction même on a, pour toute \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf L , un carré cartésien (d'ensembles pointés):

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}((H, z)[x], L) & \xrightarrow{\text{restriction}} & \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(H, L) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 L_n & \xrightarrow{\bar{\Delta}} & Z_n L
 \end{array}$$

dans lequel la flèche verticale de gauche est l'application $g \mapsto g(x)$ et la flèche verticale de droite l'application $f \mapsto (Zf)(z)$.

On note ω la composée $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(H, L) \rightarrow Z_n L \rightarrow \hat{P}_n L$.

Compte tenu de ce que le noyau et le conoyau de $\bar{\Delta}: L_n \rightarrow Z_n L$ sont respectivement $P_n L$ et $\hat{P}_n L$ on obtient une action libre de $P_n L$ sur l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}((H, z)[x], L)$ dont l'ensemble des orbites s'identifie via l'application de restriction au sous-ensemble $\omega^{-1}(0)$ de $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(H, L)$.

On observera aussi que $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}((H, z)[x], L)$ est le sous-ensemble de $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}((H, z)\langle x \rangle, L)$ formé des $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme dont la restriction à H est un $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme.

Soient n un entier, que l'on suppose pair pour $p=2$ et divisible par $2p$ pour $p>2$, et Δ est un élément de $C(n)$. En combinant la notation ci-dessus et celles introduites en 1.4.1 on peut écrire:

$$W^{\mathbb{F}_p}(n, \Delta) = (W^{\mathbb{F}_p}(n/p, \rho \Delta), \bar{\Delta} x_k)[x_k].$$

1.5.3 Démonstration de la proposition 1.4.1

On observe tout d'abord que le point (a) résulte par récurrence du point (c).

Démonstration du point (b) Soit Δ un élément de $C(n/p)$. Le corollaire-définition 1.5.1.3 montre que l'on peut trouver un élément z de $Z_n W^{\mathbb{F}_p}(n/p, \Delta)$ dont l'image par l'application $\theta: ZW^{\mathbb{F}_p}(n/p, \Delta) \rightarrow \Theta \bar{W}^{\mathbb{F}_p}(n/p, \Delta)$ est Θx_{k-1} . Le coproduit de $(W^{\mathbb{F}_p}(n/p, \Delta), z)[x_k]$ fournit alors un élément de $C(n)$ dont l'image par ρ est Δ . La surjectivité de ρ^{ab} est analogue.

Démonstration du point (c) On se donne à nouveau un élément Δ de $C(n/p)$ et l'on note F (resp. F^{ab}) l'image réciproque de Δ (resp. $\alpha \Delta$) par ρ (resp. ρ^{ab}). On se convainc aisément à l'aide de 1.5.1.2 de ce que l'ensemble F (resp. F^{ab}) est muni d'une action transitive du \mathbb{F}_p -espace vectoriel I_n (resp. $(I^{ab})_n$), I (resp. I^{ab}) désignant l'idéal bilatère de $\text{Tens}(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ (resp. l'idéal de

$\text{Sym}(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ engendré par x_0 , et de ce que l'application $\alpha: F \rightarrow F^{\text{ab}}$ est équivariante par rapport à l'application linéaire naturelle $I_n \rightarrow (I^{\text{ab}})_n$. Le point (c) découle alors de la surjectivité de cette application linéaire. \square

1.5.4 Les \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf $W^{\mathbb{F}_p}(n)$

On pose $\lambda_p = 1$ pour $p=2$ et $\lambda_p = 2$ pour $p > 2$. La proposition 1.4.1 montre que l'application $\alpha: C(p^\infty \lambda_p) \rightarrow C^{\text{ab}}(p^\infty \lambda_p)$ est surjective. On choisit une fois pour toutes un élément de $\alpha^{-1}(\Delta^{\text{Witt}})$ que l'on note Δ^{norm} . Plus généralement, on note encore Δ^{norm} l'image dans $C(p^k \ell)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, de cet élément par la composée de la bijection «homothétie sur les degrés» $C(p^\infty \lambda_p) \cong C(p^\infty \ell)$ et de la restriction $C(p^\infty \ell) \rightarrow C(p^k \ell)$.

On pose alors $W^{\mathbb{F}_p}(n) = W^{\mathbb{F}_p}(n, \Delta^{\text{norm}})$. On a donc tout fait pour que l'abélianisée de $W^{\mathbb{F}_p}(n)$ s'identifie à $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$.

Pour être complet il faut fixer la définition de $W^{\mathbb{F}_p}(n)$ (et de $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$) pour $p > 2$ et n impair. Mais ceci ne présente pas de difficultés puisque dans ce cas $C(n)$ (ainsi que $C^{\text{ab}}(n)$) est réduit à un élément!

Nous noterons S_n le foncteur $H \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W^{\mathbb{F}_p}(n), H)$ défini sur la catégorie des \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf et à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés; rappelons que d'après 1.2.1 ce foncteur est exact. Puisque $W^{\mathbb{F}_p}(n)$ est par construction «la» couverture projective de la \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf $\text{Tens}(x)$, x primitif de degré n , qui représente le foncteur $H \mapsto P_n H$, on peut voir S_n comme «le plus petit» foncteur exact (représentable) qui «contient» P_n comme sous-foncteur.

1.5.5 Relations entre les foncteurs S_n et $S_{n/p}$

Soit n un entier, pair pour $p=2$ et divisible par $2p$ pour $p > 2$, alors $W^{\mathbb{F}_p}(n/p)$ est par définition une sous- \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf de $W^{\mathbb{F}_p}(n)$; cette inclusion induit une transformation naturelle $S_n \rightarrow S_{n/p}$.

Proposition 1.5.5 *Soit n un entier, pair pour $p=2$ et divisible par $2p$ pour $p > 2$. Pour toute \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf H , on a une «suite exacte» naturelle:*

$$0 \longrightarrow P_n H \longrightarrow S_n H \longrightarrow S_{n/p} H \xrightarrow{\omega} \hat{P}_n H \longrightarrow 0.$$

C'est-à-dire:

- On a une action naturelle du groupe $P_n H$ sur l'ensemble pointé $S_n H$.
- On a une application naturelle ω de l'ensemble pointé $S_{n/p} H$ dans le groupe $\hat{P}_n H$ (correspondant à l'élément e_n de $\hat{P}_n W^{\mathbb{F}_p}(n/p)$ défini en 1.5.1.3).
- L'action de $P_n H$ est libre, l'application $S_n H \rightarrow S_{n/p} H$ induit une bijection de l'ensemble des orbites sur $\omega^{-1}(0)$, et ω est une surjection.

Démonstration. Compte tenu de 1.5.2, la seule chose qu'il nous reste à montrer est la surjectivité de ω .

Soit q un élément de $\hat{P}_n H$. Représentons q par un élément r de $Z_n H$ et considérons le $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} & (H, r)[x] & \\ & \downarrow & \\ W^{\mathbb{F}_p}(n) & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[x]. \end{array}$$

Puisque $W^{\mathbb{F}_p}(n)$ est projective l'application $W^{\mathbb{F}_p}(n) \rightarrow \mathbb{F}_p[x]$ se relève en une application $g: W^{\mathbb{F}_p}(n) \rightarrow (H, r)[x]$. Par construction, $g(x_k)$ s'écrit $x + h$, h désignant un élément de degré n de H (on utilise ici la connexité de H). Puisque g commute au *Verschiebung* et que ξx appartient à H il en résulte que $g(W^{\mathbb{F}_p}(n/p))$ est contenue dans H ; soit $f: W^{\mathbb{F}_p}(n/p) \rightarrow H$ l'application induite. On a $(Zf)(\bar{A}x_k) = \bar{A}x + \bar{A}h$ ce qui implique $\omega(f) = q$. \square

Remarques. – Lorsque n ne vérifie pas les hypothèses de 1.5.5 on a en fait un isomorphisme $P_n H \cong S_n H$.

– Pour $p = 2$ et $n \equiv 2 \pmod 4$ on a $S_n H = \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(\mathbb{F}_2 \oplus G^{\mathbb{F}_2}(n), H)$ (voir 1.1.2.5) et S_n est donc un foncteur en groupes puisque les \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf sont précisément les objets en groupes de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$. On vérifie que dans ce cas la suite exacte de 1.5.5 devient une suite exacte de groupes:

$$\{1\} \rightarrow P_n H \rightarrow S_n H \rightarrow P_{n/2} H \rightarrow \{1\}.$$

On vérifie également que cette extension est centrale et que l'application quadratique $P_{n/2} H \rightarrow P_n H$ qui lui correspond est l'élévation au carré ($S_n H$ n'est donc pas en général commutatif).

– Dans la catégorie abélienne $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$, on a une suite exacte:

$$0 \rightarrow W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n/p) \rightarrow W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n) \rightarrow \mathbb{F}_p[x_k] \rightarrow 0$$

qui constitue une résolution projective de $\mathbb{F}_p[x_k]$ et pour toute \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf abélienne H , la suite exacte de la proposition 1.5.5 s'identifie avec la suite exacte de groupes abéliens:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}(\mathbb{F}_p[x_k], H) \rightarrow \text{Hom}(W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n), H) \\ &\rightarrow \text{Hom}(W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n/p), H) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathbb{F}_p[x_k], H) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

– On peut montrer plus généralement que le foncteur $\hat{P}: \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{E}_*$ est naturellement isomorphe au premier dérivé à droite $R^1 P$ du foncteur primitifs $P: \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{E}_*$ (voir [An, chap. XV]).

– Bousfield montre dans [Bo] que toute $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -suite exacte $* \rightarrow H' \rightarrow H \rightarrow H'' \rightarrow *$ induit une suite exacte à six termes:

$$0 \rightarrow PH' \rightarrow PH \rightarrow PH'' \rightarrow R^1 PH' \rightarrow R^1 PH \rightarrow R^1 PH'' \rightarrow 0.$$

Signalons qu'il est possible d'obtenir cette suite exacte par les techniques employées ci-dessus.

1.6 Catégories des modules, coalgèbres, algèbres de Hopf instables sur l'algèbre de Steenrod

On note A l'algèbre de Steenrod modulo p .

1.6.1 *A*-modules instables

Un *A*-module instable est un *A*-module à droite M (M est donc un \mathbb{F}_p -espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué et l'action de *A* est donnée par des applications linéaires $M_n \otimes A^i \rightarrow M_{n-i}$) vérifiant la condition d'instabilité suivante:

- pour $p=2$, $xS q^i = 0$ dès que $2i > |x|$;
- pour $p > 2$, $xP^i = 0$ dès que $2ip > |x|$ et $x\beta P^i = 0$ dès que $2ip + 1 = |x|$, $|x|$ désignant le degré de x .

Un tel M est forcément nul en degrés strictement négatifs et sera donc considéré comme \mathbb{N} -gradué.

Nous notons $\tilde{\mathcal{U}}_*$ la catégorie (abélienne) dont les objets sont les *A*-modules instables et les morphismes sont les applications *A*-linéaires de degré zéro. Nous aurons le plus souvent à considérer des *A*-modules instables connexes c'est-à-dire nuls en degré zéro; la sous-catégorie pleine correspondante sera notée \mathcal{U}_* . La catégorie $\tilde{\mathcal{U}}_*$ s'identifie au produit de \mathcal{U}_* et de la catégorie des \mathbb{F}_p -espaces vectoriels.

Soit X un espace; l'homologie de X à coefficients dans le corps \mathbb{F}_p , que nous noterons simplement $H_* X$, est un *A*-module instable.

Soient M et N deux *A*-modules à droite, le coproduit de *A* permet de munir le produit tensoriel de M et de N sur \mathbb{F}_p d'une structure de *A*-module à droite; si M et N sont instables il en est de même pour $M \otimes N$. Un exemple de cette notion est fourni par le théorème de Künneth: soient X et Y deux espaces, alors l'isomorphisme $H_*(X \times Y) \cong H_*(X) \otimes H_*(Y)$ est un isomorphisme de *A*-modules instables.

Le Verschiebung d'un A-module instable. La définition du foncteur Θ en termes de \hat{H}^0 détaillée en 1.1.1 met en évidence le fait que ce foncteur «induit» un foncteur $\tilde{\mathcal{U}}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_*$ (resp. $\mathcal{U}_* \rightarrow \mathcal{U}_*$), que l'on notera encore Θ . Pour une explicitation du foncteur $\Theta: \tilde{\mathcal{U}}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_*$ ou plutôt de sa version «duale» voir par exemple [La2, chap. 2].

Soit M un *A*-module instable, on définit une application *A*-linéaire de degré zéro $\xi^A: M \rightarrow \Theta M$, que l'on appelle le Verschiebung de M , de la façon suivante. Pour $p=2$ (resp. $p > 2$), étant donné x de degré pair (resp. divisible par $2p$), on pose $\xi^A(x) = \Theta(xS q^{|x|/2})$ (resp. $\xi^A(x) = \Theta(xP^{|x|/2p})$). On dispose donc d'un foncteur oublié $\tilde{\mathcal{U}}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_*^{\mathbb{F}_p}$ (resp. $\mathcal{U}_* \rightarrow \mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$). On vérifie que cet oubli est compatible avec les produits tensoriels.

Les modules de Brown-Gitler. On note $G(n)$ et on appelle module de Brown-Gitler les *A*-modules instables caractérisés par l'isomorphisme fonctoriel:

$$\text{Hom}_{\tilde{\mathcal{U}}_*}(G(n), M) \cong M_n.$$

Par construction ces *A*-modules instables sont projectifs et tout *A*-module instable est quotient d'une somme directe $\bigoplus G(n_\alpha)$. En conséquence tout $\tilde{\mathcal{U}}_*$ -projectif est facteur direct d'une telle somme. α

1.6.2 *A*-coalgèbres instables

Une *A*-coalgèbre instable est la donnée:

- d'une \mathbb{F}_p -coalgèbre K (au sens de 1.1.1);

- d'une structure de A -module instable sur K ;
- ces deux structures vérifiant les conditions de compatibilité suivantes:
- le coproduit $K \rightarrow K \otimes K$ est A -linéaire,
 - le Verschiebung de la \mathbb{F}_p -coalgèbre K , $\xi: K \rightarrow \Theta K$, et le Verschiebung du A -module instable \bar{K} , $\xi^A: \bar{K} \rightarrow \Theta \bar{K}$, coïncident.

On note \mathcal{H}_* la catégorie des A -coalgèbres instables. L'homologie modulo p d'un espace connexe X est l'exemple type d'une A -coalgèbre instable.

Lorsque M est un A -module instable la \mathbb{F}_p -coalgèbre VM associée au \mathbb{F}_p -espace vectoriel avec Verschiebung sous-jacent à M est en fait une A -coalgèbre instable. Le foncteur $V: \mathcal{U}_* \rightarrow \mathcal{H}_*$ est toujours adjoint à droite de l'oubli $\mathcal{H}_* \rightarrow \mathcal{U}_*$.

1.6.3 A -algèbres de Hopf instables

On note \mathcal{H}_* la catégorie des objets en groupes de \mathcal{H}_* . De même qu'en 1.1.2 il n'y a pas lieu de distinguer entre la catégorie \mathcal{H}_* et la catégorie des objets en monoïdes de \mathcal{H}_* . Nous appellerons A -algèbres de Hopf instables les objets de \mathcal{H}_* . Voici un exemple d'un tel objet.

Soit X un espace pointé. On note $\Omega_0 X$ la composante connexe du point base de son espace des lacets ΩX ; $\Omega_0 X$ est un groupe à homotopie près et $H_* \Omega_0 X$ est une A -algèbre de Hopf instable.

Une A -algèbre de Hopf instable H est donc une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf munie d'une structure de A -module instable qui fait de la \mathbb{F}_p -coalgèbre sous-jacente une A -coalgèbre instable et pour laquelle le produit $H \otimes H \rightarrow H$ est A -linéaire.

On dira qu'une sous- A -algèbre de Hopf instable H' est normale (resp. centrale) dans H si la sous- \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf sous-jacente l'est. On définit pareillement la notion de A -algèbre de Hopf instable p -abélienne.

Le foncteur «indécomposables» défini sur \mathcal{H}_* est maintenant à valeurs dans \mathcal{U}_* . Le foncteur $V: \mathcal{U}_* \rightarrow \mathcal{H}_*$ est toujours adjoint à droite du foncteur $Q: \mathcal{H}_* \rightarrow \mathcal{U}_*$.

De même le foncteur $J: \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ de 1.1.2 «induit» un foncteur $\mathcal{H}_* \rightarrow \mathcal{H}_*$ que l'on note encore J et qui est adjoint à gauche de l'oubli $\mathcal{H}_* \rightarrow \mathcal{H}_*$.

Remarque. Soit X un espace pointé connexe alors $H_* \Omega \Sigma X$ est naturellement isomorphe (comme A -algèbre de Hopf instable) à $JH_* X$ [BS].

Il est clair que les énoncés 1.1.2.3, 1.1.2.4 et 1.1.2.8 restent valables *mutatis mutandis* dans le contexte des A -algèbres de Hopf instables. On focalise maintenant sur l'analogie du théorème 1.2.1.

1.6.4 Structure des projectifs de \mathcal{H}_*

On est amené comme en 1.1.2 à introduire la catégorie \mathcal{L}_* définie de la façon suivante. Un objet de \mathcal{L}_* est la donnée:

- d'un A -module instable L ;
- d'homomorphismes de A -modules instables $\mu: L \otimes L \rightarrow L$ et $\eta: \mathbb{F}_p \rightarrow L$ faisant de L une \mathbb{F}_p -algèbre graduée connexe.

Soit M un A -module instable connexe. L'algèbre tensorielle sur M , $\text{Tens}(M)$, est canoniquement un objet de \mathcal{L}_* .

Théorème 1.6.4 *On peut dans l'énoncé 1.2.1 remplacer respectivement $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$, $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$ et $\mathcal{L}_*^{\mathbb{F}_p}$ par \mathcal{H}_* , \mathcal{U}_* et \mathcal{L}_* .*

Remarques. (1) Le théorème 1.6.4 montre que le foncteur $Q: \mathcal{H}_* \rightarrow \mathcal{U}_*$ induit une bijection entre les classes d'isomorphisme de \mathcal{H}_* -projectifs et de \mathcal{U}_* -projectifs.

(2) Pour tout $n > 0$, choisissons une algèbre de Hopf $W(n)$ dont la \mathcal{L}_* -structure sous-jacente est celle de $\text{Tens}(G(n))$ (pour une «normalisation» de ce choix voir 1.7). Alors la famille $\{W(n)\}_{n > 0}$ est une famille de générateurs projectifs de \mathcal{H}_* et tout \mathcal{H}_* -projectif est rétracte d'une \mathcal{H}_* -somme de $W(n_\alpha)$.

(3) Soit K une A -coalgèbre instable telle que le noyau de la coünité \bar{K} est \mathcal{U}_* -projectif (il revient au même de demander que le A -module instable sous-jacent à K soit $\tilde{\mathcal{U}}_*$ -projectif). Alors la construction de James fournit un élément particulier de $C(\bar{K})$ et JK est \mathcal{H}_* -projective d'après le théorème 1.5.5. Notons cependant qu'en général un A -module instable projectif (de dimension 1 en degré zéro) ne possède pas de structure de A -coalgèbre instable. Par exemple, si $p=2$, $\mathbb{F}_2 \oplus G(8)$ ne possède pas de structure de A -coalgèbre instable (voir [La1]); même chose pour $\mathbb{F}_p \oplus G(2p)$ si $p > 2$.

D'autre part, il existe des A -modules instables connexes M tels que l'algèbre $\text{Tens}(M)$ ne possède pas de \mathcal{H}_* -structure prolongeant sa \mathcal{L}_* -structure. Si $p=2$, prendre par exemple pour M le A -module instable obtenu en «tuant» dans $G(4) \cong \bar{H}_* \mathbb{R}P^4$ le générateur de degré 3.

1.7 Les A -algèbres de Hopf instables $W(n)$ engendrées par les $W^{\mathbb{F}_p}(n)$

Proposition 1.7 *Les foncteurs «oubli» $\mathcal{U}_* \rightarrow \mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$, $\mathcal{K}_* \rightarrow \mathcal{K}_*^{\mathbb{F}_p}$ et $\mathcal{H}_* \rightarrow \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ admettent des adjoints à gauche.*

Démonstration. On note indifféremment o ces foncteurs oubli; leurs adjoints à gauche, que nous allons construire, seront notés δ .

Pour le foncteur $o: \mathcal{U}_* \rightarrow \mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$, on pose $\delta(G^{\mathbb{F}_p}(n)) = G(n)$ et l'on utilise le fait que les $G^{\mathbb{F}_p}(n)$ sont des générateurs de $\mathcal{U}_*^{\mathbb{F}_p}$. L'existence de l'adjoint à gauche pour $o: \mathcal{K}_* \rightarrow \mathcal{K}_*^{\mathbb{F}_p}$ en découle en remarquant que pour toute \mathbb{F}_p -coalgèbre K le A -module instable δK possède une structure canonique de A -coalgèbre instable.

Pour le foncteur oubli $\mathcal{H}_* \rightarrow \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$, on procède comme suit. Soit K un objet de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$, compte tenu de la définition même du foncteur J on est conduit à poser $\delta JK = J\delta K$. Soit maintenant H un objet quelconque de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$; H est le conoyau dans $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ du morphisme $JK \rightarrow JH$, où K désigne le noyau dans $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ de l'épimorphisme canonique $JH \rightarrow H$. On définit alors δH comme le conoyau dans \mathcal{H}_* du morphisme $\delta JK \rightarrow \delta JH$. \square

Soit o le foncteur oubli $\mathcal{H}_* \rightarrow \mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$, on note $W(n)$ la A -algèbre de Hopf instable représentant le foncteur $S_n \circ o$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(W(n), H) \cong S_n(oH) \cong \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}}(W^{\mathbb{F}_p}(n), oH);$$

en d'autres termes on pose $W(n) = \delta W^{\mathbb{F}_p}(n)$ (voir 1.5.4). Cette A -algèbre de Hopf instable est dans la classe d'isomorphisme des $W(G(n), \Delta)$, Δ parcourant $C(G(n))$ (notations analogues à celles de 1.2.1). En effet il est clair que $\delta W^{\mathbb{F}_p}(n)$ est un objet projectif de \mathcal{H}_* et que $Q\delta W^{\mathbb{F}_p}(n)$ est \mathcal{U}_* -isomorphe à $G(n)$ (puisque l'on a pour tout A -module instable connexe M un isomorphisme naturel $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(W(n), VM) \cong M_n$). Or ces deux propriétés caractérisent la classe d'isomorphisme des $W(G(n), \Delta)$.

Voici une description directe de $W(n)$. Soient $[G(n)]$ la «classe canonique» de $G(n)$ et t_n l'élément de $\text{Tens}(G(n)) \otimes \text{Tens}(G(n))$ obtenu en remplaçant dans l'expression de $\Delta^{\text{norm}} x_k$ en fonction des x_i , $0 \leq i \leq k$, fixée en 1.5.4, les x_i par $(\xi^A)^{k-i}[G(n)]$. Soit encore $\Delta^{\text{norm}}: \text{Tens}(G(n)) \rightarrow \text{Tens}(G(n)) \otimes \text{Tens}(G(n))$ le \mathcal{L}_* -morphisme défini par $\Delta^{\text{norm}}[G(n)] = t_n$; alors Δ^{norm} est un élément de $C(G(n))$ et l'on a $W(n) = W(G(n), \Delta^{\text{norm}})$.

1.8 Variantes du théorème 1.6.4 (ou autres variantes du théorème 1.2.1)

1.8.1 Si l'on se restreint à l'étude des espaces dont l'homologie modulo p est de dimension finie en chaque degré, on considèrera les catégories $\mathcal{H}_*^{\text{gf}}$, $\mathcal{U}_*^{\text{gf}}$ et $\mathcal{L}_*^{\text{gf}}$ qui sont respectivement les sous-catégories pleines de \mathcal{H}_* , \mathcal{U}_* et \mathcal{L}_* dont les objets sont de dimension finie en chaque degré. Le théorème 1.6.4 a un analogue dans ce contexte.

Signalons qu'il existe des $\mathcal{U}_*^{\text{gf}}$ -projectifs qui sont de dimension projective 1 dans \mathcal{U}_* . Par exemple l'homologie modulo p d'un p -groupe abélien élémentaire est un tel objet (voir [Da]). Les projectifs de $\mathcal{H}_*^{\text{gf}}$ ne sont donc pas les projectifs de \mathcal{H}_* qui appartiennent à $\mathcal{H}_*^{\text{gf}}$.

1.8.2 Si l'on s'intéresse à l'homotopie stable, on est amené à considérer la catégorie des \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf graduées abéliennes munies d'actions de l'algèbre de Steenrod et de l'algèbre de Dyer-Lashof vérifiant certains axiomes de compatibilité (voir [Go3]).

2 Réalisation des A -algèbres de Hopf instables projectives

On montre dans cette partie que les A -algèbres de Hopf instables projectives considérées dans la partie précédente se réalisent comme l'homologie modulo p de certains espaces des lacets possédant des propriétés très particulières.

2.1 Rappels concernant la suite spectrale d'Eilenberg-Moore multiplicative

Commençons par rappeler certaines constructions classiques dans la catégorie des A -modules instables.

Foncteurs «suspension» et «espaces des lacets» dans la catégorie des A -modules instables. On note $\Sigma \mathbb{F}_p$ (resp. $\Sigma^{-1} \mathbb{F}_p$) le A -module concentré en degré 1 (resp. -1) et égal à \mathbb{F}_p en ce degré. Soit M un A -module, on pose $\Sigma M = (\Sigma \mathbb{F}_p) \otimes M$ (resp. $\Sigma^{-1} M = (\Sigma^{-1} \mathbb{F}_p) \otimes M$); ΣM s'appelle la suspension de M . Si M est instable (ce que l'on suppose ci-après) il en est de même pour ΣM . Le foncteur Σ :

$\tilde{\mathcal{U}}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_*$ est exact et son adjoint à droite que l'on note $\Omega: \tilde{\mathcal{U}}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_*$ est exact à gauche. Pour expliciter Ω on peut procéder comme suit.

Pour $p=2$ on a une $\tilde{\mathcal{U}}_*$ -suite exacte naturelle:

$$0 \longrightarrow \Sigma \Omega M \longrightarrow M \xrightarrow{\xi^A} \Theta M$$

(l'application $\Sigma \Omega M \rightarrow M$ est la co-unité de l'adjonction).

Pour $p > 2$, $\ker \xi^A$ n'est plus une suspension. On définit une application naturelle A -linéaire de degré zéro $\eta: \ker \xi^A \rightarrow \Sigma^2 \Theta \Sigma^{-1} M$ de la façon suivante (observer que le foncteur Θ s'étend à la catégorie des A -modules « stables », c'est-à-dire pas nécessairement instables, et que bien que $\Sigma^{-1} M$ ne soit pas *a priori* un A -module instable $\Theta \Sigma^{-1} M$ en est un):

$$\eta(x) = \begin{cases} \Sigma^2 \Theta \Sigma^{-1}(x \beta P^{(|x|-2)/2p}) & \text{si } |x| \equiv 2 \pmod{2p} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a maintenant une $\tilde{\mathcal{U}}_*$ -suite exacte naturelle:

$$0 \longrightarrow \Sigma \Omega M \longrightarrow \ker \xi^A \xrightarrow{\eta} \Sigma^2 \Theta \Sigma^{-1} M.$$

En fait on peut encore expliciter ΩM « en seul coup ». On définit une extension naturelle de A -modules instables $0 \rightarrow \Sigma^2 \Theta \Sigma^{-1} M \rightarrow \Phi M \rightarrow \Theta M \rightarrow 0$ et une application naturelle A -linéaire de degré zéro $\lambda: M \rightarrow \Phi M$ telle que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Sigma^2 \Theta \Sigma^{-1} M & \longrightarrow & \Phi M & \longrightarrow & \Theta M \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \swarrow \lambda & & \nearrow \xi^A \\ & & \ker \xi^A & \hookrightarrow & M & & \end{array}$$

On a alors une $\tilde{\mathcal{U}}_*$ -suite exacte naturelle:

$$0 \longrightarrow \Sigma \Omega M \longrightarrow M \xrightarrow{\lambda} \Phi M.$$

Précisons un peu.

- Comme extension de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels gradués $0 \rightarrow \Sigma^2 \Theta \Sigma^{-1} M \rightarrow \Phi M \rightarrow \Theta M \rightarrow 0$ est canoniquement scindée (puisque ΘM et $\Sigma^2 \Theta \Sigma^{-1} M$ sont respectivement concentrés en degrés congrus à 0 et 2 modulo $2p$).
- La seule opération de Steenrod sur ΦM qui n'est pas imposée par d'évidentes raisons de degré (et qui empêche l'extension d'être triviale) est $P^1: (\Theta x)P^1 = \Sigma^2 \Theta \Sigma^{-1} x \beta$.
- L'unique application λ de degré zéro qui fait commuter le diagramme ci-dessus est A -linéaire.

Pour unifier la notation on pose $\Phi = \Theta$ et $\lambda = \xi^A$ si $p=2$.

Le foncteur Ω a un seul dérivé à droite non trivial, à savoir le premier que l'on note $R^1 \Omega$, et $\Sigma R^1 \Omega M$ s'identifie au conoyau de λ . Ceci résulte de

ce que le foncteur $\Phi: \tilde{\mathcal{U}}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_*$ est exact et de ce que $\lambda: I \rightarrow \Phi I$ est surjectif pour tout A -module instable injectif I .

On a donc finalement, pour tout p , une $\tilde{\mathcal{U}}_*$ -suite exacte naturelle:

$$0 \longrightarrow \Sigma \Omega M \longrightarrow M \xrightarrow{\lambda} \Phi M \longrightarrow \Sigma R^1 \Omega M \longrightarrow 0.$$

Les suites exactes d'algèbres de Hopf associées à certaines fibrations. Soient Y un espace pointé, π un groupe abélien, n un entier ≥ 3 , $f: Y \rightarrow K(\pi, n)$ une application pointée de Y dans un espace d'Eilenberg-Mac Lane, et Z la fibre homotopique de f . On rappelle que l'on note $\Omega_0 X$ la composante connexe du point base de l'espace des lacets d'un espace pointé X .

Proposition 2.1.1 (J. Moore et L. Smith) *La suite de \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf:*

$$(S) \quad H_* \Omega_0 Z \rightarrow H_* \Omega_0 Y \rightarrow H_* \Omega K(\pi, n)$$

est exacte (cette suite est donc aussi une suite exacte de A -algèbres de Hopf instables).

La démonstration de cette proposition repose sur l'analyse de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore (pour l'homologie modulo p) de la fibration $\Omega_0 Z \rightarrow \Omega_0 Y \rightarrow \Omega K(\pi, n)$. Cette suite spectrale est ici particulièrement efficace parce que la fibration que l'on considère est multiplicative et que la base est un $K(\pi, n-1)$ avec $n-1 \geq 2$ ou plus généralement un H -espace simplement connexe B dont l'homologie $H_* B$ est une A -algèbre de Hopf p -abélienne avec $R^1 \Omega(QH_* B) = 0$; voir [MS1, Sm]. Moore et Smith obtiennent également des renseignements sur le noyau du \mathcal{H}_* -morphisme $H_* \Omega_0 Z \rightarrow H_* \Omega_0 Y$. Avant de préciser ce point, rappelons quelques généralités sur la suite spectrale d'Eilenberg-Moore.

On considère une fibration $F \xrightarrow{i} E \rightarrow B$, dont la base B est simplement connexe. La suite spectrale d'Eilenberg-Moore de cette fibration est une suite spectrale de \mathbb{F}_p -coalgèbres bigraduées convergeant fortement vers l'homologie modulo p de F . Son terme $E^2 = \{E_*^{2,s}\}_{s \geq 0}$ est isomorphe comme \mathbb{F}_p -coalgèbre bigraduée à $\text{Cotor}_{H_* B}^1(H_* E, \mathbb{F}_p)$.

Cette suite spectrale possède deux homomorphismes de coins (qui sont des $\tilde{\mathcal{U}}_*$ -morphisms):

$$\begin{aligned} - \kappa_0: H_* F &\rightarrow \text{Cotor}_{H_* B}^0(H_* E, \mathbb{F}_p) = H_* E \square_{H_* B} \mathbb{F}_p; \\ - \kappa_1: \Sigma F_1 &\rightarrow \text{Cotor}_{H_* B}^1(H_* E, \mathbb{F}_p), F_1 \text{ désignant le noyau de } \kappa_0. \end{aligned}$$

L'application $i_*: H_* F \rightarrow H_* E$ est la composition de κ_0 et de l'inclusion canonique $H_* E \square_{H_* B} \mathbb{F}_p \hookrightarrow H_* E$; pour une interprétation analogue de κ_1 voir A.2.1.

On revient maintenant à la fibration à homotopie près multiplicative $\Omega_0 Z \rightarrow \Omega_0 Y \rightarrow \Omega K(\pi, n)$. On note K le noyau du \mathcal{H}_* -morphisme $H_* \Omega_0 Z \rightarrow H_* \Omega_0 Y$ et M le conoyau du \mathcal{U}_* -morphisme $QH_* \Omega_0 Y \rightarrow QH_* \Omega K(\pi, n)$; on a par adjonction un \mathcal{H}_* -épimorphisme $H_* \Omega K(\pi, n) \twoheadrightarrow VM$.

On définit un \mathcal{H}_* -morphisme naturel $\iota: K \rightarrow V\Omega M$ de la façon suivante. On considère la composition naturelle:

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{K} \hookrightarrow \Sigma F_1 \xrightarrow{\kappa_1} \text{Cotor}_{H_* \Omega K(\pi, n)}^1(H_* \Omega_0 Y, \mathbb{F}_p) &\longrightarrow \text{Cotor}_{V M}^1(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \cong PVM \\ &= \ker(\xi^A: M \longrightarrow \Theta M). \end{aligned}$$

Cette composition est un \mathcal{U}_* -morphisme. Comme \bar{K} est un A -module instable elle se factorise en fait par la suspension d'un \mathcal{U}_* -morphisme naturel $\bar{K} \rightarrow \Omega M$ et l'on obtient par adjonction un \mathcal{H}_* -morphisme naturel $\iota: K \rightarrow V\Omega M$. La proposition suivante est implicite dans [MS1].

Proposition 2.1.2 *Le \mathcal{H}_* -morphisme $\iota: K \rightarrow V\Omega M$ est un \mathcal{H}_* -isomorphisme.*

Remarque. Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega K(\pi, n) & \longrightarrow & * & \longrightarrow & K(\pi, n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ Z & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & K(\pi, n). \end{array}$$

La functorialité de la définition de ι donne un \mathcal{H}_* -diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H_*(\Omega^2 K(\pi, n)) \cong V\Omega QH_*(\Omega K(\pi, n)) & & \\ \downarrow & \cong & \downarrow \\ K & & V\Omega M \end{array}$$

(observer que pour la fibration $\Omega K(\pi, n) \rightarrow * \rightarrow K(\pi, n)$ on a $M = QH_*\Omega K(\pi, n)$ et $K = H_*\Omega^2 K(\pi, n)$) où le \mathcal{H}_* -morphisme vertical de droite est induit par le \mathcal{U}_* -épimorphisme (de définition) $QH_*\Omega K(\pi, n) \rightarrow M$. On note N le noyau de ce \mathcal{U}_* -épimorphisme; compte tenu de ce que $R^1\Omega(QH_*\Omega K(\pi, n))$ est trivial pour $n \geq 3$ (ceci est une conséquence des résultats de [Ca], voir la proposition 2.2.1), on a une \mathcal{U}_* -suite exacte $\Omega QH_*\Omega K(\pi, n) \rightarrow \Omega M \rightarrow R^1\Omega N \rightarrow 0$ et il résulte de l'analogie dans \mathcal{H}_* de 1.1.2.4 et du diagramme précédent que le conoyau du \mathcal{H}_* -morphisme $H_*\Omega^2 K(\pi, n) \rightarrow K$ s'identifie à $VR^1\Omega N$.

Considérons maintenant le «complexe» de A -algèbres de Hopf instables:

$$(S') \quad H_*\Omega^2 K(\pi, n) \rightarrow H_*\Omega_0 Z \rightarrow H_*\Omega_0 Y \rightarrow H_*\Omega K(\pi, n).$$

Les propositions 2.1.1, 2.1.2, et ce qui précède nous permettent d'énoncer:

Scholie 2.1.3 *L'homologie du complexe de A -algèbres de Hopf instables (S') est triviale en $H_*\Omega_0 Y$ et est naturellement isomorphe à $VR^1\Omega N$ en $H_*\Omega_0 Z$.*

Démonstration de la proposition 2.1.2 Fixons tout d'abord quelques notations. Soit M un \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué connexe; on note $A^{[p]}M$ le quotient de la \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf graduée abélienne $\text{Sym } M$ (dans laquelle les éléments de M sont primitifs) par la sous- \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf graduée engendrée par les puissances p -èmes des éléments de M . On fait de $A^{[p]}M$ une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf bigraduée abélienne en attribuant à un élément de M_n le bidegré $(1, n)$.

Soit H une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf. La \mathbb{F}_p -algèbre bigraduée $GrH = \bigoplus_{s \geq 0} \bar{H}^s / \bar{H}^{s+1}$ associée à la filtration de H par les puissances de l'idéal d'augmentation est ici une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf bigraduée. Soit M un A -module instable; on vérifie que l'homomorphisme canonique de \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf bigraduées abéliennes $A^{[p]}M \rightarrow GrVM$ est un isomorphisme.

Considérons maintenant la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de la fibration multiplicative $\Omega_0 Z \rightarrow \Omega_0 Y \rightarrow \Omega K(\pi, n)$. Notons $\{F_s K\}_{s \geq 0}$ la filtration de K

induite par la filtration d'Eilenberg-Moore de $H_*\Omega_0 Z$, il s'agit d'une filtration décroissante par des sous- \mathbb{F}_p -espaces vectoriels gradués possédant les propriétés suivantes :

- (a) $F_0 K = K$;
- (b) $F_1 K = \bar{K}$;
- (c) $\bigcap_{s \geq 0} F_s K = 0$;
- (d) le produit d'un élément de $F_{s'} K$ et d'un élément de $F_{s''} K$ appartient à $F_{s'+s''} K$;
- (e) $\Delta(F_s K)$ est contenu dans la somme des $F_{s'} K \otimes F_{s''} K$ pour $s' + s'' = s$;
- (f) l'application $\bar{K} \rightarrow \Omega M$ qui apparait dans la définition de ι se factorise par un isomorphisme $F_1 K / F_2 K \cong \Omega M$;
- (g) l'isomorphisme $F_1 K / F_2 K \cong \Omega M$ se prolonge en un isomorphisme de \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf bigraduées $GK \cong A^{[p]} \Omega M$, GK désignant le gradué de la filtration $\{F_s K\}_{s \geq 0}$ (qui est une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf bigraduée d'après (d) et (e)).

La propriété (g) est une conséquence immédiate de la théorie de Moore et Smith qui montrent dans [MS1, Sm] que la suite spectrale en question dégénère au terme E^p et explicitent ce dernier.

On conclut à l'aide du lemme suivant dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme 2.1.4 *Soient K une \mathbb{F}_p -algèbre graduée (connexe) et $\{F_s K\}_{s \geq 0}$ une filtration décroissante de K vérifiant (a) (b) (c) et (d). Si le gradué de cette filtration est engendré par $F_1 K / F_2 K$ alors $\{F_s K\}_{s \geq 0}$ coïncide avec la filtration de K par les puissances de l'idéal d'augmentation.*

En effet $A^{[p]} \Omega M$ est bien engendrée par $\Omega M = (A^{[p]} \Omega M)_{(1,*)}$ et ce lemme montre que $Gr(\iota) : GK \rightarrow GrVM$ s'identifie à un endomorphisme de \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf bigraduées $A^{[p]} \Omega M \rightarrow A^{[p]} \Omega M$ qui est l'identité sur ΩM et qui est donc l'identité. \square

2.2 Sur la représentabilité des foncteurs $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(W, H_* \Omega Y)$ associés aux A -algèbres de Hopf instables projectives W .

On note $h\mathcal{S}_{p_i}$ la «catégorie homotopique pointée» c'est-à-dire la catégorie de fractions obtenue en inversant les équivalences faibles de la catégorie des espaces topologiques pointés ou de la catégorie des ensembles simpliciaux pointés (voir [GZ, Qu, BK]). Dans ce qui suit, le terme «espace» signifiera indifféremment espace topologique ou ensemble simplicial. Les objets de $h\mathcal{S}_{p_i}$ sont donc les espaces pointés; on note $[X, Y]$ l'ensemble (pointé) des $h\mathcal{S}_{p_i}$ -morphisms entre deux espaces pointés X et Y , il s'identifie aux classes d'homotopie d'applications pointées si X et Y sont respectivement cofibrant et fibrant (ce que l'on supposera implicitement si le contexte le demande). On note $\mathcal{E}ns_{p_i}$ la catégorie des ensembles pointés.

Soit H une A -algèbre de Hopf instable (rappelons que nous avons convenu que les A -algèbres de Hopf instables sont connexes). On note $S_H : h\mathcal{S}_{p_i} \rightarrow \mathcal{E}ns_{p_i}$ le foncteur $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(H, H_* \Omega_0 Y)$. Dans cette partie nous allons mettre en évidence certaines propriétés que possède le foncteur S_H et qui impliqueront au bout du compte, sous certaines hypothèses sur H , notamment la \mathcal{H}_* -projectivité, que le foncteur S_H est représentable.

2.2.1 *Quelques propriétés communes aux foncteurs S_H*

Dans ce paragraphe, H est une A -algèbre de Hopf instable quelconque. Le foncteur homotopique S_H possède les propriétés (C.1), (C.2), (C.3) et (C.4) suivantes:

(C.1) *Soit Y_0 la composante connexe du point base de l'espace pointé Y , et \tilde{Y}_0 son revêtement universel. Alors l'application canonique $S_H \tilde{Y}_0 \rightarrow S_H Y$ est une bijection.*

(C.2) *Pour tous espaces pointés Y et Z , l'application naturelle $S_H(Y \times Z) \rightarrow S_H Y \times S_H Z$ est une bijection.*

(C.3) *Pour tout ensemble E et tout entier $n \geq 1$, l'application naturelle:*

$$S_H((K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, n))^E) \rightarrow (S_H(K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, n)))^E$$

est une bijection.

(C.4) *Soient $Z \rightarrow Y$ une application pointée et:*

$$Z \rightarrow \dots \rightarrow Y_{n+1} \rightarrow Y_n \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow Y_0 \cong Y,$$

sa tour de Postnikov. Alors l'application naturelle

$$S_H Y \rightarrow \varprojlim S_H Y_n$$

est surjective.

Vérification de (C.3) On utilise les résultats de [Ca] concernant l'homologie modulo p des espaces d'Eilenberg-Mac Lane que l'on peut reformuler ainsi. Soit \mathcal{C} la catégorie des flèches de la catégorie des \mathbb{F}_p -espaces vectoriels. Soient π un groupe abélien et $n \geq 1$ un entier, on note $\Gamma_n: \mathcal{H}_* \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur qui associe à une A -algèbre de Hopf instable H l'homomorphisme de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels $\text{coker}(\beta: (QH)_{n+2} \rightarrow (QH)_{n+1}) \rightarrow (QH)_n$ induit par $\beta: (QH)_{n+1} \rightarrow (QH)_n$; le \mathcal{C} -objet $\Gamma_n(H_* K(\pi, n))$ s'identifie à $p\pi \rightarrow \pi/p\pi$, $p\pi$ et $\pi/p\pi$ désignant respectivement le noyau et le conoyau de la multiplication par p de π dans π et la flèche $p\pi \rightarrow \pi/p\pi$ étant induite par l'inclusion de $p\pi$ dans π .

Proposition 2.2.1 *Pour tout groupe abélien π et tout entier $n \geq 1$, l'application naturelle*

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(H, H_* K(\pi, n)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Gamma_n H, p\pi \rightarrow \pi/p\pi)$$

est bijective.

Cette proposition montre que le foncteur $\pi \mapsto S_H K(\pi, n)$ commute aux produits arbitraires; (C.3) est un cas particulier de cette commutation.

Signalons au passage que l'on peut déduire de cette proposition les propriétés suivantes:

- Le \mathcal{H}_* -morphisme $H_* K(\pi, n) \rightarrow V\Omega QH_* K(\pi, n+1)$ est un isomorphisme pour $n \geq 1$.
- Le A -module instable $R^1 \Omega(QH_* K(\pi, n))$ est trivial pour $n \geq 2$.

Vérification de (C.4) En fait l'application naturelle en question est une bijection. C'est une conséquence de la formule $H_*(\Omega \varprojlim Y_n) = \varprojlim H_*(\Omega Y_n)$ qui résulte de ce que la connexité des fibres tend vers l'infini.

2.2.2 *La suite de Puppe des foncteurs S_W associés aux A -algèbres de Hopf instables projectives W*

Nous allons être amenés à supposer que le A -module instable connexe QW est «1-coconnexe» c'est-à-dire ne contient pas $G(1)$ comme facteur direct (pour plus de précisions voir ci-dessous). Rappelons que le module de Brown-Gitler $G(k)$, $k=0, 1$, est simplement le A -module instable concentré en degré k et égal à \mathbb{F}_p en ce degré.

Proposition-Définition 2.2.2.1 *Soit M un A -module instable. On note M^0 (resp. M^1) le A -module instable concentré en degré 0 (resp. 1) tel que $(M^0)_0 = M_0$ (resp. $(M^1)_1 = \text{coker}(\beta: M_2 \rightarrow M_1)$); on note M' le noyau de l'homomorphisme naturel (scindable) $M \rightarrow M^0 \oplus M^1$.*

Pour k égal à 0 ou 1 les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) $M^k = 0$;
- (ii) $\text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(M, G(k)) = 0$;
- (iii) M ne contient pas $G(k)$ comme facteur direct.

Si ces conditions sont vérifiées pour $k=0$ et 1 nous dirons que M est 1-coconnexe (on observera que si ces conditions sont vérifiées pour $k=0$ alors M est connexe!).

On a donc un \mathcal{U}_ -isomorphisme $M \cong M' \oplus M^0 \oplus M^1$ avec M' 1-coconnexe.*

(L'équivalence des conditions ci-dessus est immédiate.)

Remarques. (1) Le module de Brown-Gitler $G(n)$ est 1-coconnexe dès que $n \geq 2$. (2) Il résulte du lemme 1.1 de [GL] que pour un A -module instable projectif M les deux conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) M est 1-coconnexe;
 - (ii) M est β -acyclique.
- (3) Soit H une A -algèbre de Hopf instable. On a $S_H K(\mathbb{Z}, 2) = \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(QH, G(1))$, si bien que les deux conditions suivantes sont équivalentes:
- (i) $S_H K(\mathbb{Z}, 2) = *$;
 - (ii) le A -module instable QH est 1-coconnexe.

Soit W un objet \mathcal{H}_* -projectif; rappelons que QW est \mathcal{U}_* -projectif. Supposons en outre que QW est 1-coconnexe. Le foncteur S_W possède alors la propriété suivante:

(C.5) *Soient Y un espace pointé, π un groupe abélien, n un entier ≥ 2 , $f: Y \rightarrow K(\pi, n)$ une application de Y dans un espace d'Eilenberg-Mac Lane, et Z la fibre homotopique de f . Alors la suite d'ensembles pointés $S_W Z \rightarrow S_W Y \rightarrow S_W K(\pi, n)$ est exacte: un élément de $S_W Y$ est l'image d'un élément de $S_W Z$ si et seulement si son image dans $S_W K(\pi, n)$ est triviale.*

Remarque. En prenant pour f la «multiplication par p » de $K(\mathbb{Z}, 2)$ on constate que la condition de 1-coconnexité de QW est nécessaire pour avoir (C.5).

Observons que l'action à homotopie près de $\Omega K(\pi, n)$ sur Z induit en vertu de (C.2) une action du groupe abélien $S_W \Omega K(\pi, n)$ sur l'ensemble pointé $S_W Z$.

Nous allons supposer maintenant que ΣQW est \mathcal{U}_* -projectif. Remarquons que si M est un A -module instable tel que ΣM est un A -module instable projectif, alors M lui-même est un A -module instable projectif. Signalons aussi que $\Sigma G(n)$ est \mathcal{U}_* -projectif si et seulement si $n \not\equiv \pm 1 \pmod{2p}$ (en prenant $n = 1$ on voit d'ailleurs que si M est connexe et si ΣM est \mathcal{U}_* -projectif alors M est 1-coconnexe).

Si ΣQW est \mathcal{U}_* -projectif alors le foncteur S_W possède la propriété suivante:

(C.6) Soient Y un espace pointé, π un groupe abélien, n un entier ≥ 2 , $f: Y \rightarrow K(\pi, n)$ une application de Y dans un espace d'Eilenberg-Mac Lane, et Z la fibre homotopique de f . Deux éléments de $S_W Z$ diffèrent par l'action du groupe abélien $S_W \Omega K(\pi, n)$ sur $S_W Z$ si et seulement s'ils ont même image dans $S_W Y$.

Vérification du point (C.5) Pour $n \geq 3$ c'est une conséquence immédiate de la proposition 2.1.1 et de la \mathcal{H}_* -projectivité de W .

Pour $n = 2$, il nous faut utiliser la 1-coconnexité de QW . Démontrons tout d'abord le lemme suivant:

Lemme 2.2.2.2 *Supposons le groupe π libre. Alors $S_W K(\pi, n)$ est trivial et l'application $S_W Z \rightarrow S_W Y$ est bijective.*

Démonstration du lemme. La trivialité de $S_W K(\pi, n)$ traduit la 1-coconnexité de QW .

Pour le second point on se ramène au cas où l'application $\pi_2(Y) \rightarrow \pi$ est surjective en factorisant l'application $f: Y \rightarrow K(\pi, 2)$ via l'application $K(\pi', 2) \rightarrow K(\pi, 2)$, π' désignant l'image de $\pi_2(f)$. Dans ce cas ΩY est homotopiquement équivalent (comme espace) au produit cartésien $\Omega Z \times K(\pi, 1)$ puisque $K(\pi, 1)$ est un produit faible de cercles et que l'application $\Omega Y \rightarrow K(\pi, 1)$ possède donc une section. On en déduit que la \mathcal{H}_* -suite $* \rightarrow H_* \Omega_0 Z \rightarrow H_* \Omega_0 Y \rightarrow H_* \Omega K(\pi, 2) \rightarrow *$ est exacte. La bijection $S_W Z \cong S_W Y$ en découle. \square

Le lemme précédent établit la propriété (C.5) pour $n = 2$ et π un groupe abélien libre. Dans le cas d'un groupe abélien π général, on considère une résolution libre $0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow \pi \rightarrow 0$ de π et le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & K(\pi, 2) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 Z' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & K(L_1, 3)
 \end{array}$$

où $K(\pi, 2) \rightarrow K(L_1, 3)$ est le «connectant» associé à cette résolution et Z' la fibre homotopique de l'application composée $Y \rightarrow K(L_1, 3)$. En remarquant que l'on a une fibration $Z \rightarrow Z' \rightarrow K(L_0, 2)$ et en utilisant le lemme 2.2.2.2 on voit que l'application $S_W Z \rightarrow S_W Z'$ est bijective ce qui permet de conclure puisque la propriété (C.5) est vraie pour la fibration $Z' \rightarrow Y \rightarrow K(L_1, 3)$.

Vérification du point (C.6) Supposons $n \geq 3$. Soit I la sous- A -algèbre de Hopf instable de $H_* \Omega_0 Z$ image du \mathcal{H}_* -morphisme $H_* \Omega^2 K(\pi, n) \rightarrow H_* \Omega_0 Z$. On se convainc pour commencer que I est centrale dans $H_* \Omega_0 Z$. Pour cela on observe que l'action de $\Omega^2 K(\pi, n)$ sur ΩZ est obtenue en appliquant le foncteur Ω à l'action de $\Omega K(\pi, n)$ sur Z ce qui donne bien un \mathcal{H}_* -morphisme $I \otimes H_* \Omega_0 Z$

→ $H_*\Omega_0 Z$ vérifiant les propriétés de 1.1.2.2 (ii). On introduit ensuite la A -algèbre de Hopf instable quotient $H_*\Omega_0 Z/I$ que l'on note H . D'après l'analogie dans \mathcal{H}_* de la proposition 1.1.2.3 et la \mathcal{H}_* -projectivité de W l'application canonique de l'espace d'orbites $S_W\Omega K(\pi, n)\backslash S_W Z \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(W, H)$ est bijective. Il nous suffit donc pour conclure de montrer que l'application évidente $\phi: \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(W, H) \rightarrow S_W Y$ est injective. Or la scholie 2.1.3 montre que l'on a une \mathcal{H}_* -suite exacte:

$$* \rightarrow VR^1\Omega N \rightarrow H \rightarrow H_*\Omega_0 Y.$$

L'injectivité de ϕ découle donc de l'analogie dans \mathcal{H}_* de 1.1.2.8 si l'on sait que l'ensemble pointé $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(W, VR^1\Omega N)$ est trivial. Or $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(W, VR^1\Omega N)$ s'identifie d'après l'analogie dans \mathcal{H}_* de 1.1.2.4 à $\text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(QW, R^1\Omega N)$ puis à $\text{Ext}_{\mathcal{U}_*}^1(\Sigma QW, N)$ (parce que QW est \mathcal{U}_* -projectif); ΣQW étant aussi \mathcal{U}_* -projectif, $\text{Ext}_{\mathcal{U}_*}^1(\Sigma QW, N)$ est trivial.

Pour $n=2$ on remarque tout d'abord que le groupe $S_W\Omega K(\pi, 2)$ est trivial pour tout groupe abélien π : il faut donc montrer que l'application $S_W Z \rightarrow S_W Y$ est injective. Ceci est vrai d'après 2.2.2.2 si π est un groupe abélien libre et le cas général se traite comme pour (C.5) en considérant une résolution libre de π . □

2.2.3 Sur la représentabilité ou la semi-représentabilité des foncteurs S_W

On considère un foncteur (covariant) $S: h\mathcal{S}_{pt} \rightarrow \mathcal{E}ns_{pt}$. Soit X un espace pointé, le foncteur $Y \mapsto [X, Y]$, que l'on note R_X , est un exemple d'un tel foncteur. Les transformations naturelles de R_X vers S sont en bijection avec l'ensemble pointé SX .

Rappelons que l'on dit que S est représentable s'il est isomorphe à un foncteur R_X pour un certain espace pointé X . Soit ι l'élément de SX correspondant à l'isomorphisme fonctoriel $R_X \cong S$ alors la paire (X, ι) est unique à isomorphisme canonique près (de $h\mathcal{S}_{pt}$).

Nous dirons que S est simplement connexe s'il vérifie la condition (C.1) de 2.2.1 (avec S à la place de S_H !).

Enfin nous dirons qu'un foncteur simplement connexe S est «semi-représentable» s'il existe un espace pointé simplement connexe X et une transformation naturelle $\theta: R_X \rightarrow S$ tels que:

- (a) pour tout espace pointé Y l'application θ_Y est surjective;
- (b) pour tout groupe abélien π et tout entier $n \geq 2$ l'application $\theta_{K(\pi, n)}$ est bijective.

Soit ι l'élément de SX correspondant à θ , on peut déduire de (b) l'unicité à isomorphisme (non canonique) près dans $h\mathcal{S}_{pt}$ de la paire (X, ι) .

Théorème 2.2.3 *Soit W une A -algèbre de Hopf instable projective. On suppose que QW est 1-coconnexe. Alors:*

- (a) le foncteur S_W est semi-représentable;
- (b) si de plus ΣQW est un A -module instable projectif, S_W est représentable.

Démonstration. Le théorème 2.2.3 est conséquence immédiate des propriétés (C.1), (C.2), (C.3), (C.4), (C.5) (et éventuellement (C.6)) du foncteur S_W mises en évidence au paragraphe 2.2 et du théorème B.1 de l'appendice B. \square

2.3 Propriétés des espaces (semi-)représentant les foncteurs $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(W, H_* \Omega_0 Y)$ associés aux \mathcal{H}_* -projectifs W

Soit W un \mathcal{H}_* -projectif avec QW 1-coconnexe, d'après le théorème précédent il existe un espace pointé simplement connexe que l'on note $X(W)$ et un \mathcal{H}_* -morphisme $i: W \rightarrow H_* \Omega X(W)$ qui induit une transformation naturelle $R_{X(W)}: S_W \rightarrow S_W$ vérifiant les conditions de semi-représentabilité.

Théorème 2.3.1 *La paire $(X(W), i)$ possède les propriétés suivantes:*

- (a) *Le \mathcal{H}_* -morphisme $i: W \rightarrow H_* \Omega X(W)$ est un isomorphisme.*
- (b) *Le \mathcal{U}_* -morphisme $\Sigma QW \rightarrow \bar{H}_* X(W)$ composé de ΣQ_1 et du \mathcal{U}_* -morphisme $\Sigma QH_* \Omega X(W) \rightarrow \bar{H}_* X(W)$ induit par la coïtité de l'adjonction $\Sigma \Omega X(W) \rightarrow X(W)$ est un isomorphisme.*
- (c) *La coïtité de l'adjonction $\Sigma \Omega X(W) \rightarrow X(W)$ admet une section (à homotopie près).*
- (d) *Pour tout espace pointé Y l'application naturelle:*

$$[X(W), \Sigma Y] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(\bar{H}_* X(W), \bar{H}_* \Sigma Y)$$

est surjective.

- (e) *L'application naturelle:*

$$[X(W), Y] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(H_* \Omega X(W), H_* \Omega_0 Y)$$

est surjective pour tout espace pointé Y et bijective lorsque Y est un espace d'Eilenberg-Mac Lane.

Si ΣQW est un A -module instable projectif alors l'application naturelle précédente est bijective pour tout espace pointé Y .

- (f) *L'homologie $\bar{H}_* \left(X(W); \mathbb{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} \right)$ est triviale.*

L'observation qui suit la définition de la notion de semi-représentabilité montre que le type d'homotopie de $X(W)$ ne dépend que de la classe de \mathcal{H}_* -isomorphisme de W , or on a vu dans la partie 1 que le foncteur $Q: \mathcal{H}_* \rightarrow \mathcal{U}_*$ induit une bijection entre les classes d'isomorphisme de \mathcal{H}_* -projectifs et de \mathcal{U}_* -projectifs, aussi est-on conduit à introduire la notation ci-dessous.

Soit M un \mathcal{U}_* -projectif 1-coconnexe, on choisit un \mathcal{H}_* -projectif $W(M)$ avec $QW(M) = M$ et on pose $T_1(M) = X(W(M))$. D'après ce qui précède le type d'homotopie de $T_1(M)$ est indépendant du choix de $W(M)$.

Théorème 2.3.2 *Soit M un A -module instable projectif 1-coconnexe (donc connexe). Alors l'espace pointé simplement connexe $T_1(M)$ est caractérisé, à équivalence d'homotopie près, par les propriétés suivantes:*

- (a) *$\bar{H}_* T_1(M)$ est \mathcal{U}_* -isomorphe à ΣM ;*
- (b) *le \mathcal{H}_* -morphisme $H_* \Sigma \Omega T_1(M) \rightarrow H_* T_1(M)$ induit par la coïtité de l'adjonction est surjectif;*

$$(c) \bar{H}_* \left(T_1(M); \mathbb{Z} \left[\frac{1}{p} \right] \right) = 0.$$

Remarques à propos des énoncés 2.3.1 et 2.3.2 (1) Soient π un groupe abélien et n un entier ≥ 2 , la bijection $H^n(X(W); \pi) \cong \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(H_* \Omega X(W), H_* \Omega K(\pi, n))$ du point (e) de 2.3.1 est en fait un isomorphisme de groupes abéliens. Comme le second membre est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel on obtient en prenant $\pi = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ que l'homologie entière $\bar{H}_*(X(W); \mathbb{Z})$ est annulée par la multiplication par p ce qui est un peu plus précis que le point (f) et qui compte tenu du point (b) redonne bien la β -acyclicité de QW .

(2) Le point (c) de 2.3.1 affirme que $T_1(M)$ est rétracte (à homotopie près) d'une suspension. Par contre $T_1(M)$ n'a pas en général le type d'homotopie d'une suspension. En effet il existe des A -modules instables projectifs 1-coconnexes M tels que $\mathbb{F}_p \oplus M$ ne possède pas de structure de A -coalgèbre instable (prendre par exemple $M = G(2p)$ pour $p > 2$ et $M = G(8)$ pour $p = 2$).

(3) On pourrait énoncer un théorème analogue à 2.3.1 sans condition de 1-coconnexité au prix de quelques contorsions.

On étend la définition de $T_1(M)$ de la façon suivante. Soit M un A -module instable projectif; d'après 2.2.2.1 on peut trouver un \mathcal{U}_* -isomorphisme $M \cong M' \oplus M^0 \oplus M^1$ où M' est projectif et 1-coconnexe et M^0 et M^1 sont des A -modules instables concentrés respectivement en degré 0 et 1. On choisit un bouquet de cercles (resp. un bouquet de 2-sphères), que l'on note $T_1(M^0)$ (resp. $T_1(M^1)$), tel que $\bar{H}_* T_1(M^0)$ (resp. $\bar{H}_* T_1(M^1)$) est isomorphe à ΣM^0 (resp. ΣM^1) et on pose $T_1(M) = T_1(M') \vee T_1(M^0) \vee T_1(M^1)$. On introduit la catégorie \mathcal{H}_* des A -algèbres de Hopf instables non nécessairement connexes et on remplace $H_*(\Omega_0 -)$ par $H_*(\Omega -)$. Alors:

- les points (a) (b) (c) (d) (convenablement reformulés) restent vrais;
- le point (e) est vrai si M^1 est trivial (utiliser l'isomorphisme $\pi_1 Y \cong \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(H_* \Omega S^1, H_* \Omega Y)$!); il est faux dès que M^1 est non trivial (par exemple l'application $[S^2, Y] = \pi_2 Y \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(H_* \Omega S^2, H_* \Omega_0 Y) = \pi_2 Y \otimes \mathbb{F}_p$ n'est pas bijective pour $Y = K(\mathbb{Z}, 2)$) cependant pour tout A -module instable projectif M l'application $[T_1(M), Y] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(H_* \Omega T_1(M), H_* \Omega Y)$ est surjective pour tout Y .
- le point (f) (et la remarque (1)) est clairement faux en général.

(4) Pour tout espace pointé Y la A -coalgèbre instable $H_* \Sigma Y$ ne dépend que du A -module instable $\bar{H}_* Y$: comme A -module instable $H_* \Sigma Y$ est la somme directe $\mathbb{F}_p \oplus \Sigma \bar{H}_* Y$ et le coproduit est trivial. On est donc amené à introduire le foncteur $\Sigma_+ : \mathcal{U}_* \rightarrow \mathcal{H}_*$ qui associe à un A -module instable N la somme directe $\mathbb{F}_p \oplus \Sigma N$ munie du coproduit trivial.

Les propriétés (a) et (b) de 2.3.2 impliquent que $H_* T_1(M)$ est \mathcal{H}_* -isomorphe à $\Sigma_+ M$.

Démonstration du théorème 2.3.1 On note $\theta : R_{X(W)} \rightarrow S_W$ la transformation naturelle induite par ι ; θ vérifie donc:

- $\theta_{K(\pi, n)}$ est une bijection pour tout groupe abélien π et tout entier $n \geq 2$;
- θ_Y est une surjection (resp. une bijection si ΣQW est \mathcal{U}_* -projectif) pour tout espace pointé Y .

On introduit également le foncteur $S'_W : h\mathcal{S}_{p_1} \rightarrow \mathcal{E} n s_{p_1}$ qui associe à l'espace pointé Y l'ensemble pointé $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(\Sigma_+ QW, H_* Y_0)$, Y_0 désignant la composante connexe

du point base de Y . On note ω la transformation naturelle $S_W \rightarrow S'_W$ induite par la coïté de l'adjonction $\varepsilon_Y: \Sigma \Omega Y \rightarrow Y$. Soit $\Omega_0: \mathcal{U}_* \rightarrow \mathcal{U}_*$ le foncteur qui associe à un A -module instable N le sous- A -module de ΩN formé des éléments de degré strictement positif, on observera que l'on peut considérer

$$\omega_Y: \text{Hom}_{\mathcal{K}_*}(W, H_* \Omega_0 Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}_*}(\Sigma + QW, H_* Y_0) = \text{Hom}_{\mathcal{K}_*}(W, V \Omega_0 P H_* Y)$$

comme la composition par le \mathcal{K}_* -morphisme $\sigma_Y: H_* \Omega_0 Y \rightarrow V \Omega_0 P H_* Y$ induit par ε_Y . On note $i': \Sigma + QW \rightarrow H_* X(W)$ le \mathcal{K}_* -morphisme associé à la transformation naturelle $\theta' = \omega \circ \theta$; i' est le composé de $\Sigma + Q\iota$ et du \mathcal{K}_* -morphisme $\Sigma + QH_* \Omega X(W) \rightarrow H_* X(W)$ induit par $\varepsilon_{X(W)}$.

Démonstration des points (b) et (f) Soient π un groupe abélien et $n \geq 2$ un entier, $\sigma_{K(\pi, n)}$ est un isomorphisme et l'application $\theta'_{K(\pi, n)}: [X(W), K(\pi, n)] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}_*}(\Sigma + QW, H_* K(\pi, n))$. En prenant pour π un \mathbb{F}_p -espace vectoriel arbitraire on voit que i' est un isomorphisme. Ceci démontre (b). En prenant pour π le quotient $\mathbb{Q} / \left(\mathbb{Z} \left[\frac{1}{p} \right] \right)$ on obtient (f).

Démonstration des points (d) et (c) Soit Y un espace pointé. Compte tenu de ce qui précède l'application naturelle $[X(W), \Sigma Y] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(\bar{H}_* X(W), \bar{H}_* \Sigma Y)$ s'identifie à $\theta'_{\Sigma Y}$. Comme $\sigma_{\Sigma Y}$ est un épimorphisme (observer que même si Y n'est pas connexe $\varepsilon_{\Sigma Y}$ induit un \mathcal{U}_* -isomorphisme de $QH_* \Omega_0 \Sigma Y$ sur le sous- A -module instable de $\bar{H}_* Y$ formé par les éléments de degré strictement positif) et que W est \mathcal{K}_* -projectif, l'application $\theta'_{\Sigma Y}$ est une surjection et (d) est bien vérifié. Le point (c) découle maintenant du point (d). Soit $\eta: X(W) \rightarrow \Sigma \Omega X(W)$ une application induisant en homologie modulo p une \mathcal{U}_* -section de $(\varepsilon_{X(W)})_*$ (une telle section existe parce que QW est \mathcal{U}_* -projectif), alors $\eta \circ \varepsilon_{X(W)}$ est une équivalence d'homotopie. En effet $\eta \circ \varepsilon_{X(W)}$ induit par construction l'identité en homologie modulo p , donc aussi en homologie entière d'après le point (f) (voir la remarque (1) qui suit les énoncés des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2), et l'espace $X(W)$ est simplement connexe.

Démonstration des points (a) et (e) Le point (e) est clairement une conséquence du point (a). Pour démontrer (a) on utilise le théorème suivant:

Théorème 2.3.3 (Bott et Samelson) *Soit X un espace pointé simplement connexe tel que l'homomorphisme $(\varepsilon_X)_*: H_* \Sigma \Omega X \rightarrow H_* X$ est surjectif. Soit E un sous-espace vectoriel de $\bar{H}_* \Omega X$ tel que $(\varepsilon_X)_*$ induit un isomorphisme de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels gradués $\Sigma E \cong \bar{H}_* X$, alors l'application canonique $\text{Tens}(E) \rightarrow H_* \Omega X$ est un isomorphisme de \mathbb{F}_p -algèbres graduées.*

Bott et Samelson ont démontré originalement ce théorème à l'aide de la suite spectrale de Serre de la fibration $\Omega X \rightarrow * \rightarrow X$ [BS]. On peut également le démontrer à l'aide de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore qui ici dégénère au terme E^2 .

Scholie 2.3.4 *Soit X un espace pointé simplement connexe, les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *Le \mathcal{K}_* -morphisme $\Sigma + QH_* \Omega X \rightarrow H_* X$ induit par ε_X est un épimorphisme.*
- (ii) *Le \mathcal{K}_* -morphisme $\Sigma + QH_* \Omega X \rightarrow H_* X$ induit par ε_X est un isomorphisme.*

On sait donc que le \mathcal{K}_* -morphisme $\Sigma_+ QH_* \Omega X(W) \rightarrow H_* X(W)$ est un isomorphisme et que $H_* \Omega T_1(M)$ est libre en tant que \mathbb{F}_p -algèbre graduée. Il en résulte que $Q\iota$ est un isomorphisme (considérer à nouveau la factorisation de ι') puis que ι en est un (utiliser le lemme 1.2.3.2).

Démonstration du théorème 2.3.2 On procède comme dans la démonstration ci-dessus du point (c) de 2.3.1. Soient $T_1^{\text{bis}}(M)$ un espace pointé simplement connexe vérifiant (a), (b) et (c) et $f: T_1(M) \rightarrow \Sigma \Omega T_1^{\text{bis}}(M)$ une application induisant en homologie modulo p une \mathcal{U}_* -section du composé de $(\varepsilon_{T_1^{\text{bis}}(M)_*})$ et du \mathcal{U}_* -isomorphisme $H_* T_1^{\text{bis}}(M) \cong H_* T_1(M)$ (l'existence de f est assurée par le point (d) de 2.3.1), alors $\varepsilon_{T_1^{\text{bis}}(M)} \circ f$ est une équivalence d'homotopie.

2.4 Espaces de Brown-Gitler et représentation de l'homologie modulo p après suspension

Soit n un entier; on suppose tout d'abord $n \geq 2$ et $n \not\equiv \pm 1 \pmod{2p}$.

On considère la A -algèbre de Hopf instable projective $W(n)$ introduite en 1.7. Le foncteur $S_{W(n)}$ associe donc à un espace pointé Y l'ensemble pointé $\text{Hom}_{\mathcal{K}_* \mathbb{F}_p}(W^{\mathbb{F}_p}(n), H_* \Omega_0 Y)$. Rappelons également que l'on a par construction $QW(n) = G(n)$. Pour $n \not\equiv \pm 1 \pmod{2p}$ le A -module instable $\Sigma G(n)$ est projectif puisqu'il est isomorphe à $G(n+1)$ (pour davantage de précisions voir 3.3.1) et on peut appliquer le théorème 2.2.3(b): le foncteur $S_{W(n)}$ est représentable. On note $T_1(n)$ l'espace qui le représente; en d'autre termes on pose $T_1(n) = X(W(n))$ (ou encore $T_1(n) = T_1(G(n))$ si l'on convient que $W(G(n)) = W(n)$). D'après 2.3.1(a) et (b) on dispose d'un \mathcal{K}_* -isomorphisme $H_* \Omega T_1(n) \cong W(n)$ et d'un \mathcal{K}_* -isomorphisme $H_* T_1(n) \cong \Sigma_+ G(n)$, tous deux canoniques. On observera que $T_1(n)$ ne dépend à isomorphisme canonique près (de $h\mathcal{S}_p$) que du choix d'un élément de $C(n)$, choix que nous avons essayé tant bien que mal de normaliser en 1.5.4.

Pour $n \geq 2$ et $n \equiv \pm 1 \pmod{2p}$ on pose $T_1(n) = \Sigma T_1(n-1)$. L'espace $T_1(n)$ ainsi défini vérifie les propriétés (a), (b) et (c) du théorème 2.3.2 pour $M = G(n)$ si bien que l'on a encore une équivalence d'homotopie $T_1(G(n)) \cong T_1(n)$. Soit H une A -algèbre de Hopf instable, la suite d'isomorphismes naturels $\text{Hom}_{\mathcal{K}_*}(H_* \Omega \Sigma T_1(n-1), H) \cong \text{Hom}_{\mathcal{K}_*}(\Sigma_+ G(n-1), H) \cong \text{Hom}_{\mathcal{K}_*}(G(n), PH) \cong P_n H$ montre que l'on a toujours un \mathcal{K}_* -isomorphisme canonique $H_* \Omega T_1(n) \cong W(n)$.

Enfin, en accord avec la remarque (3) qui suit les énoncés des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2, on peut poser $T_1(0) = S^1$ et $T_1(1) = S^2$.

Nous appellerons les espaces $T_1(n)$ introduits ci-dessus les espaces de Brown-Gitler. Pour une justification de cette terminologie voir 3.2.

Les théorèmes 0.1 et 0.2 sont respectivement les théorèmes 2.2.3 et 2.3.1 pour $W = W(n)$ et $n \geq 2$. On observera que la démonstration du théorème 2.2.3 dans ce cas particulier ne fait pas intervenir l'algèbre de Steenrod.

Remarques. (1) On suppose à nouveau $n \geq 2$ et $n \not\equiv \pm 1 \pmod{2p}$. Soit Y un espace pointé connexe, on vérifie que la composition:

$$P_n H_* Y \rightarrow P_n H_* \Omega \Sigma Y \rightarrow S_n H_* \Omega \Sigma Y \cong [T_1(n), \Sigma Y] \rightarrow H_n Y$$

dans laquelle la flèche du centre correspond à la transformation naturelle $P_n \rightarrow S_n$ de 1.5.5, est l'inclusion naturelle de $P_n H_* Y$ dans $H_n Y$. On dispose donc d'une

section canonique de l'application naturelle $[T_1(n), \Sigma Y] \rightarrow H_n Y$ sur le sous-espace de $H_n Y$ formé des classes d'homologie primitives.

(2) L'observation ci-dessus et la définition même des $T_1(n)$ pour $n \geq 2$ et $n \equiv \pm 1 \pmod{2p}$ et pour $n=0, 1$ fournissent pour tout $n \geq 1$ une application canonique $T_1(n) \rightarrow \Sigma T_1(n-1)$ induisant en homologie le \mathcal{U}_* -morphisme canonique $G(n) \rightarrow \Sigma G(n-1)$ (qui est un isomorphisme pour $n \not\equiv 0, 2 \pmod{2p}$). Cette application canonique est une équivalence d'homotopie pour $n \not\equiv 0, 2 \pmod{2p}$. Le seul cas où ceci ne résulte pas de nos conventions est celui où n est de la forme $n=2kp+2+r$ avec $0 < r < 2p-4$ (on peut donc supposer $p > 2$). On a alors au bout du compte une équivalence d'homotopie canonique $T_1(n) \cong \Sigma^r T_1(2kp+2)$.

(3) Soit M un A -module instable projectif; M est donc facteur direct d'une somme directe $\bigoplus_{\alpha} G(n_{\alpha})$. On se convainc sans difficultés que $T_1(M)$ est rétracte du bouquet $\bigvee_{\alpha} T_1(n_{\alpha})$.

2.5 Sur l'invariant de Hopf des applications dont la source est un espace $T_1(M)$ et qui sont triviales en homologie modulo p

Soient X et Y deux espaces connexes pointés, on note $[X, Y]^1$ le sous-ensemble de $[X, Y]$ formé des classes d'homotopie des applications f telles que l'application induite $f_* : H_* X \rightarrow H_* Y$ est triviale.

On définit une application $h^1 : [X, Y]^1 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{K}_*}^1(\Sigma \bar{H}_* X, H_* Y)$ en associant à la classe d'homotopie de f la classe de l'extension de A -coalgèbres instables:

$$0 \rightarrow H_* Y \rightarrow H_* C_f \rightarrow \Sigma \bar{H}_* X \rightarrow 0,$$

C_f désignant la cofibre homotopique de f ($h^1(f)$ est «l'invariant de Hopf» de f).

Rappels sur les extensions de A -coalgèbres instables. Soient K une A -coalgèbre instable et M un A -module instable connexe dont le Verschiebung $\xi^A : M \rightarrow \Theta M$ est nul. Une extension de K par M est la donnée d'une A -coalgèbre instable E et d'une extension de \mathbb{F}_p -coalgèbres (voir 1.5.1):

$$0 \rightarrow K \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$$

pour laquelle les applications $K \rightarrow E$ et $E \rightarrow M$ sont A -linéaires.

L'équivalence de deux telles extension $0 \rightarrow K \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow K \rightarrow E' \rightarrow M \rightarrow 0$ est définie comme en 1.5.1 en imposant en outre que l'application $E \rightarrow E'$ soit A -linéaire.

On note $\text{Ext}_{\mathcal{K}_*}^1(M, K)$ l'ensemble des classes d'équivalences des extensions de K par M ; cet ensemble possède toujours une structure naturelle de groupe abélien.

Observons que l'on dispose de deux homomorphismes $\lambda : \text{Ext}_{\mathcal{K}_*}^1(M, K) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}_*}^1(M, \bar{K})$ et $\chi : \text{Ext}_{\mathcal{K}_*}^1(M, K) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(M, \hat{P}K)$ dont la définition est la suivante:

- λ associe à la classe de la \mathcal{K}_* -extension $0 \rightarrow K \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ celle de la \mathcal{U}_* -extension $0 \rightarrow \bar{K} \rightarrow \bar{E} \rightarrow M \rightarrow 0$;

- χ associe à la classe de la \mathcal{K}_* -extension $0 \rightarrow K \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ l'homomorphisme $M \rightarrow \hat{P}K$ considéré en 1.5.1 qui maintenant est A -linéaire (il est clair que le foncteur $\hat{P} : \mathcal{K}_*^{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{E}_*$ induit un foncteur $\hat{P} : \mathcal{K}_* \rightarrow \mathcal{U}_*$).

L'un des objets de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.5.1 *Soit M un A -module instable projectif 1-coconnexe. Pour tout espace pointé Y l'application $h^1 : [T_1(M), \Sigma Y]^1 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 M, H_* \Sigma Y)$ est surjective.*

Remarque. On pourrait, dans le fil de la remarque (3) qui suit les énoncés des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2, supprimer ci-dessus la condition de 1-coconnexité.

Calcul des groupes $\text{Ext}_{\mathcal{X}_}^1(\Sigma^2 M, \Sigma_+ N)$ pour deux A -modules instables arbitraires M et N .* On va se convaincre de ce que l'homomorphisme produit $\lambda \times \chi : \text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma_+ N) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma N) \times \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(\Sigma^2 M, \hat{P}(\Sigma_+ N))$ est injectif et déterminer son image. On observera que l'on a ici $\hat{P}(\Sigma_+ N) = (\Sigma N \otimes \Sigma N)^{\oplus 2}$ puisque le coproduit de $\Sigma_+ N$ est trivial.

Soit \mathcal{X}_*^o la catégorie obtenue en supprimant dans la définition de la catégorie \mathcal{X}_* l'axiome relatif au Verschiebung; \mathcal{X}_*^o contient donc \mathcal{X}_* comme sous-catégorie pleine. On définit les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{X}_*^o}^1(\Sigma^2 M, \Sigma_+ N)$ comme ci-dessus; il est clair que $\text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma_+ N)$ est un sous-groupe de $\text{Ext}_{\mathcal{X}_*^o}^1(\Sigma^2 M, \Sigma_+ N)$. Cette fois l'homomorphisme produit $\lambda \times \chi : \text{Ext}_{\mathcal{X}_*^o}^1(\Sigma^2 M, \Sigma_+ N) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{U}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma N) \times \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(\Sigma^2 M, (\Sigma N \otimes \Sigma N)^{\oplus 2})$ est un isomorphisme (la définition ci-dessus des homomorphismes χ et λ s'étend à la catégorie \mathcal{X}_*^o car elle ne fait pas intervenir l'axiome du Verschiebung). Soient e un élément de $\text{Ext}_{\mathcal{X}_*^o}^1(\Sigma^2 M, \Sigma N)$ et f un élément de $\text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(\Sigma^2 M, (\Sigma N \otimes \Sigma N)^{\oplus 2})$, on obtient une \mathcal{X}_*^o -extension représentant $(\chi \times \lambda)^{-1}(e, f)$ de la façon suivante :

- on représente e par une \mathcal{U}_* -extension $0 \rightarrow \Sigma N \rightarrow \bar{E} \rightarrow \Sigma^2 M \rightarrow 0$;
- on fait de la suite exacte $0 \rightarrow \Sigma_+ N \rightarrow E \rightarrow \Sigma^2 M \rightarrow 0$ somme directe de la suite exacte précédente et de la suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{F}_p \xrightarrow{\text{Id}} \mathbb{F}_p \rightarrow 0 \rightarrow 0$ une \mathcal{X}_*^o -extension en définissant le coproduit réduit $\bar{E} \rightarrow \bar{E} \otimes \bar{E}$ comme la composition $\bar{E} \rightarrow \Sigma^2 M \xrightarrow{f} (\Sigma N \otimes \Sigma N)^{\oplus 2} \hookrightarrow (\bar{E} \otimes \bar{E})^{\oplus 2}$.

Explicitons maintenant «l'équation» qui définit $\text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma_+ N)$ en tant que sous-groupe de $\text{Ext}_{\mathcal{X}_*^o}^1(\Sigma^2 M, \Sigma_+ N)$. Comme le Verschiebung des A -modules instables ΣN et $\Sigma^2 M$ est trivial, celui du A -module instable \bar{E} admet une factorisation de la forme $\bar{E} \rightarrow \Sigma^2 M \rightarrow \Theta \Sigma N \hookrightarrow \Theta \bar{E}$. Ceci définit un homomorphisme $\partial : \text{Ext}_{\mathcal{U}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(\Sigma^2 M, \Theta \Sigma N)$. De même la restriction à \bar{E} du Verschiebung de \mathbb{F}_p -coalgèbre de E admet une factorisation de la forme $\bar{E} \rightarrow \Sigma^2 M \xrightarrow{v \circ f} \Theta \Sigma N \hookrightarrow \Theta \bar{E}$, $v : (\Sigma N \otimes \Sigma N)^{\oplus 2} \rightarrow \Theta \Sigma N$ désignant l'homomorphisme trivial pour $p > 2$ et l'épimorphisme canonique $(\Sigma N \otimes \Sigma N)^{\oplus 2} \rightarrow \Theta \Sigma N$ pour $p = 2$. Par construction le \mathcal{X}_*^o -objet E vérifie l'axiome du Verschiebung si et seulement si $\partial e = v \circ f$.

Nous pouvons donc énoncer :

Proposition 2.5.2 *Pour tous A -modules instables M et N le diagramme suivant de groupes abéliens :*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma_+ N) & \xrightarrow{\lambda} & \text{Ext}_{\mathcal{U}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma N) \\
 \downarrow \chi & & \downarrow \partial \\
 \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(\Sigma^2 M, (\Sigma N \otimes \Sigma N)^{\oplus 2}) & \xrightarrow{v \circ -} & \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(\Sigma^2 M, \Theta \Sigma N)
 \end{array}$$

est cartésien.

Il peut être utile de reformuler le résultat ci-dessus en introduisant les notations suivantes. On désigne par $\Theta': \tilde{\mathcal{U}}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_*$ le foncteur défini par $\Theta \Sigma N = \Sigma^2(\Theta' N)$; pour $p=2$ on a donc $\Theta' = \Theta$. On note $(N \otimes N)^{-\mathfrak{E}_2}$ le sous- A -module instable de $N \otimes N$ formé des éléments antisymétriques (pour $p=2$ on a donc $(N \otimes N)^{-\mathfrak{E}_2} \cong (N \otimes N)^{\mathfrak{E}_2}$); l'isomorphisme canonique $(\Sigma N \otimes \Sigma N) \cong \Sigma^2(N \otimes N)$ induit un isomorphisme $(\Sigma N \otimes \Sigma N)^{\mathfrak{E}_2} \cong \Sigma^2((N \otimes N)^{-\mathfrak{E}_2})$.

On obtient en fin de compte:

– pour $p=2$ un diagramme cartésien:

$$\begin{CD} \text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma_+ N) @>\lambda>> \text{Ext}_{\mathcal{U}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma N) \\ @V\chi VV @VV\partial V \\ \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(M, (N \otimes N)^{\mathfrak{E}_2}) @>\nu>> \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(M, \Theta N); \end{CD}$$

– pour $p > 2$ un isomorphisme induit par $\lambda \times \chi$:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma_+ N) &\cong \ker(\partial: \text{Ext}_{\mathcal{U}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(M, \Theta' N)) \\ &\quad \times \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(M, (N \otimes N)^{\mathfrak{E}_2}). \end{aligned}$$

Calcul des groupes $\text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma_+ N)$ lorsque le A -module instable M est projectif. On note $\Omega^2: \tilde{\mathcal{U}}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_*$ le foncteur composé $\Omega \circ \Omega$; Ω^2 est l'adjoint à droite du foncteur $\Sigma^2 = \Sigma \circ \Sigma$. Cette adjonction fournit une application naturelle $\pi: \text{Ext}_{\mathcal{U}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(M, R^1 \Omega^2(\Sigma N))$, $R^1 \Omega^2: \tilde{\mathcal{U}}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_*$ désignant le premier dérivé à droite de Ω^2 , qui est un isomorphisme si M est $\tilde{\mathcal{U}}_*$ -projectif. La suite spectrale de Grothendieck pour les dérivés des foncteurs composés donne une suite exacte (voir [Mi, Sect. 8]):

$$0 \rightarrow ((R^1 \Omega) \circ \Omega)(\Sigma N) \rightarrow R^1 \Omega^2(\Sigma N) \rightarrow (\Omega \circ R^1 \Omega)(\Sigma N) \rightarrow 0$$

soit encore:

$$0 \rightarrow R^1 \Omega(N) \rightarrow R^1 \Omega^2(\Sigma N) \rightarrow \Phi' N \rightarrow 0$$

$\Phi': \tilde{\mathcal{U}}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_*$ désignant le foncteur défini par $\Phi(\Sigma N) = \Sigma^2(\Phi' N)$. Pour $p=2$ on a donc $\Phi' = \Phi = \Theta = \Theta'$; pour $p > 2$ on a une $\tilde{\mathcal{U}}_*$ -suite exacte naturelle $0 \rightarrow \Theta N \rightarrow \Phi' N \rightarrow \Theta' N \rightarrow 0$. On note δ la composition $R^1 \Omega^2(\Sigma N) \rightarrow \Phi' N \rightarrow \Theta' N$ et $\check{\Theta}$ son noyau; par définition l'application $\partial: \text{Ext}_{\mathcal{U}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(\Sigma^2 M, \Theta \Sigma N)$ est la composée $\delta \circ \pi$.

On note enfin $\check{R}N$ la limite inverse du diagramme:

$$\begin{array}{ccc} (N \otimes N)^{-\mathfrak{E}_2} & & R^1 \Omega^2(\Sigma N) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Theta' N. & \end{array}$$

Pour $p > 2$, $\check{R}N$ est simplement la somme directe $\check{\Theta} N \oplus (N \otimes N)^{-\mathfrak{E}_2}$; pour $p=2$, $\check{R}N$ est le produit fibré de $R^1 \Omega^2(\Sigma N)$ et de $(N \otimes N)^{\mathfrak{E}_2}$ au dessus de ΘN . On

a tout fait pour avoir une application naturelle:

$$\text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 M, \Sigma_+ N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(M, \check{R}N),$$

que l'on notera encore π , qui est un isomorphisme si M est $\check{\mathcal{U}}_*$ -projectif.

Décrivons maintenant certaines filtrations de $\check{R}N$ et leurs gradués. Par définition $R^1\Omega(N)$ est un sous- A -module de $\check{R}N$. On désigne par RN le quotient $\check{R}N/R^1\Omega(N)$; pour $p=2$, $RN=(N \otimes N)^{\oplus 2}$, pour $p>2$, $RN=\Theta N \oplus (N \otimes N)^{-\oplus 2}$. On dispose des $\check{\mathcal{U}}_*$ -suites exactes suivantes:

- $0 \rightarrow R^1\Omega(N) \rightarrow \check{R}N \rightarrow RN \rightarrow 0$ (par définition du foncteur R);
- $0 \rightarrow A^2 N \rightarrow RN \rightarrow \Theta N \rightarrow 0$ ($A^2 N$ désigne la seconde puissance extérieure de l' A -module instable N , pour $p>2$ cette puissance extérieure s'identifie à $(N \otimes N)^{-\oplus 2}$ et la suite exacte est naturellement scindée);
- $0 \rightarrow R^1\Omega(N) \rightarrow \check{\Theta} N \rightarrow \Theta N \rightarrow 0$;
- $0 \rightarrow A^2 N \rightarrow \check{R}N \rightarrow \check{\Theta} N \rightarrow 0$.

Remarques. On pourrait définir plus savamment le foncteur $\check{R}: \check{\mathcal{U}}_* \rightarrow \check{\mathcal{U}}_*$ comme la composition $R^1(\Omega^2 P) \circ \Sigma_+$, $R^1(\Omega^2 P)$ désignant le premier dérivé du foncteur non additif $\Omega^2 P: \mathcal{X}_* \rightarrow \check{\mathcal{U}}_*$. On pourrait également retrouver la proposition 2.5.2 à l'aide de la suite spectrale de Miller [Mi].

Démonstration du théorème 2.5.1 On travaille dans la catégorie des ensembles simpliciaux pointés fibrants. Soient $\mathbb{F}_p[\Sigma Y]$ le \mathbb{F}_p -espace vectoriel simplicial libre engendré par l'espace pointé ΣY et Z la fibre de l'application naturelle $\Sigma Y \rightarrow \mathbb{F}_p[\Sigma Y]$. Soit f une application de $T_1(M)$ dans ΣY , alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) $f_*: H_* T_1(M) \rightarrow H_* \Sigma Y$ est triviale;
- (ii) f se factorise à homotopie près par l'application $Z \rightarrow \Sigma Y$.

En fait comme $T_1(M)$ est rétracte (à homotopie près) de $\Sigma \Omega T_1(M)$ la condition (ii) est aussi équivalente à la suivante:

- (iii) f se factorise à homotopie près par la composée $\Sigma \Omega Z \rightarrow Z \rightarrow \Sigma Y$.

On note u cette composée et $v: \check{H}_* \Omega Z \rightarrow \check{R} \check{H}_* Y$ l'image de sa classe d'homotopie par

$$\pi \circ h^1: [\Sigma \Omega Z, \Sigma Y]^1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(\check{H}_* \Omega Z, \check{R} \check{H}_* Y).$$

Soit g un élément de $[T_1(M), \Sigma \Omega Z]$, alors:

- $g_*: H_* T_1(M) \rightarrow H_* \Sigma \Omega Z$ s'identifie à l'image par le foncteur Σ_+ d'un $\check{\mathcal{U}}_*$ -morphisme que l'on note $\Sigma_+^{-1} g_*$;
- l'image de $u \circ g$ par $\pi \circ h^1: [T_1(M), \Sigma Y]^1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(M, \check{R} \check{H}_* Y)$ est la composée $v \circ \Sigma_+^{-1} g_*$.

Compte tenu de ce que l'application $[T_1(M), \Sigma \Omega Z] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(M, \check{H}_* \Omega Z)$, $g \mapsto \Sigma_+^{-1} g_*$ est surjective (théorème 2.3.1 (d)) et de ce que l'homomorphisme $\pi: \text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 M, H_* \Sigma Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}_*}(M, \check{R} \check{H}_* Y)$ est bijectif le théorème 2.5.1 est maintenant équivalent à la proposition suivante:

Proposition 2.5.3 *Pour tout espace pointé Y l'application naturelle $v: \check{H}_* \Omega Z \rightarrow \check{R} \check{H}_* Y$ est surjective.*

La démonstration de cette proposition est faite dans l'appendice 1. Un des ingrédients en est l'analyse de $H_* \Omega Z$ à l'aide d'une variante de 2.1.2.

Sur le « noyau » de l'application $[T_1(M), \Sigma Y] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(H_* \Omega T_1(M), H_* \Omega_0 \Sigma Y)$. On note $[T_1(M), \Sigma Y]^\perp$ le noyau de l'application $[T_1(M), \Sigma Y] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(H_* \Omega T_1(M), H_* \Omega_0 \Sigma Y)$ c'est-à-dire le sous-ensemble de $[T_1(M), \Sigma Y]$ formé des classes d'homotopie des applications f telles que l'application $(\Omega f)_* : H_* \Omega T_1(M) \rightarrow H_* \Omega_0 \Sigma Y$ est triviale; on observera que $[T_1(M), \Sigma Y]^\perp$ est en fait un sous-ensemble de $[T_1(M), \Sigma Y]^1$ (en effet l'application $f_* : \bar{H}_* T_1(M) \rightarrow \bar{H}_* \Sigma Y$ s'identifie à $\Sigma Q(\Omega f)_*$, au moins si Y est connexe).

Proposition-Définition 2.5.4 *La restriction à $[T_1(M), \Sigma Y]^\perp$ de l'application $h^1 : [T_1(M), \Sigma Y]^1 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{H}_*}^1(\Sigma^2 M, H_* \Sigma Y)$ se factorise par l'inclusion $\text{Ext}_{\mathcal{H}_*}^1(\Sigma M, \bar{H}_* Y) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{H}_*}^1(\Sigma^2 M, H_* \Sigma Y)$ induite par le foncteur Σ_+ ; on note $h^1 : [T_1(M), \Sigma Y]^\perp \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{H}_*}^1(\Sigma M, \bar{H}_* Y)$ l'application définie par cette factorisation.*

Cette proposition est une conséquence du lemme suivant (comparer avec [La1, proposition 4.1.3]):

Lemme 2.5.5 *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application d'espaces pointés; soit C_f sa cofibre. On fait les hypothèses suivantes:*

- les applications naturelles $\bar{H}_* \Sigma \Omega X \rightarrow \bar{H}_* X$ et $\bar{H}_* \Sigma \Omega Y \rightarrow \bar{H}_* Y$ sont surjectives (ce qui entraîne en particulier que les coproduits de $H_* X$ et de $H_* Y$ sont triviaux et que les A -modules instables $\bar{H}_* X$ et $\bar{H}_* Y$ sont des suspensions);
- l'application $(\Omega f)_* : H_* \Omega X \rightarrow H_* \Omega Y$ est triviale (ce qui compte tenu de l'hypothèse précédente entraîne que $f_* : \bar{H}_* X \rightarrow \bar{H}_* Y$ est également triviale).

Alors l'application naturelle $\bar{H}_* \Sigma \Omega C_f \rightarrow \bar{H}_* C_f$ est surjective et la \mathcal{H}_* -extension $0 \rightarrow H_* Y \rightarrow H_* C_f \rightarrow \bar{H}_* X \rightarrow 0$ est somme directe de la suspension (terme à terme) d'une $\bar{\mathcal{H}}_*$ -extension et de la suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow 0 \rightarrow 0$.

Théorème 2.5.6 *Soit M un A -module instable projectif 1-coconnexe. Pour tout espace pointé Y l'application $h^1 : [T_1(M), \Sigma Y]^\perp \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{H}_*}^1(\Sigma M, \bar{H}_* Y)$ est surjective.*

Cet énoncé est bien sûr trivial si ΣM est \mathcal{U}_* -projectif. On observera par ailleurs que le théorème 2.3.1 implique dans ce cas que l'ensemble $[T_1(M), \Sigma Y]^\perp$ est réduit à un point.

Démonstration du lemme 2.5.5 On considère le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
 \Sigma \Omega X & \xrightarrow{\Sigma \Omega f} & \Sigma \Omega Y & \longrightarrow & \Sigma C_{\Omega f} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & C_f
 \end{array} ;$$

dans ce diagramme $C_{\Omega f}$ désigne la cofibre de Ωf , les flèches verticales de gauche et du centre correspondant à l'unité de l'adjonction, et la flèche verticale de droite est induite par la commutativité du diagramme de gauche. On en déduit le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Sigma + \bar{H}_* \Omega Y & \longrightarrow & \Sigma + \bar{H}_* C_{\Omega f} & \longrightarrow & \Sigma^2 \bar{H}_* \Omega Y \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H_* Y & \longrightarrow & H_* C_f & \longrightarrow & \Sigma \bar{H}_* X \longrightarrow 0
 \end{array}$$

dans lequel les horizontales sont des \mathcal{K}_* -extensions, les flèches verticales de gauche et du centre des \mathcal{K}_* -morphisms, et la flèche verticale de droite la suspension d'un \mathcal{K}_* -morphisme. Ce diagramme montre que l'application $\Sigma \bar{H}_* C_{\Omega f} \rightarrow \bar{H}_* C_f$ est surjective et que la \mathcal{K}_* -extension $0 \rightarrow H_* Y \rightarrow H_* C_f \rightarrow \Sigma \bar{H}_* X \rightarrow 0$ est bien de la forme annoncé (ce qui suffit pour 2.5.4); l'application $\Sigma \bar{H}_* \Omega C_f \rightarrow \bar{H}_* C_f$ est bien surjective parce que l'application $\Sigma C_{\Omega f} \rightarrow C_f$ (comme toute application dont la source est une suspension) se factorise par la coüinité de l'adjonction $\Sigma \Omega C_f \rightarrow C_f$.

Démonstration du théorème 2.5.6 La méthode est la même que celle employée pour démontrer le théorème 2.5.1.

On note toujours $\pi: \text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_*}^1(\Sigma M, \bar{H}_* Y) \rightarrow \text{Hom}_{\bar{\mathcal{U}}_*}(M, R^1 \Omega \bar{H}_* Y)$ l'application naturelle qui est un isomorphisme si M est $\bar{\mathcal{U}}_*$ -projectif. On vérifie que cette application naturelle est compatible avec l'application naturelle $\pi: \text{Ext}_{\mathcal{K}_*}^1(\Sigma^2 M, H_* \Sigma Y) \rightarrow \text{Hom}_{\bar{\mathcal{U}}_*}(M, \check{R} \bar{H}_* Y)$ et les inclusions

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_*}^1(\Sigma M, \bar{H}_* Y) &\hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{K}_*}^1(\Sigma^2 M, H_* \Sigma Y) \\ &\text{et } \text{Hom}_{\bar{\mathcal{U}}_*}(M, R^1 \Omega \bar{H}_* Y) \hookrightarrow \text{Hom}_{\bar{\mathcal{U}}_*}(M, \check{R} \bar{H}_* Y). \end{aligned}$$

La surjectivité de $\pi \circ h^1$ est équivalente à la proposition suivante:

Proposition 2.5.7 *Soit K le noyau du \mathcal{K}_* -morphisme $H_* \Omega Z \rightarrow H_* \Omega \Sigma Y$. Alors la restriction de v à \bar{K} induit une surjection de \bar{K} sur $R^1 \Omega \bar{H}_* Y$.*

La démonstration de cette proposition est faite dans l'appendice A où elle est une étape essentielle dans la démonstration de 2.5.3.

3 Quelques applications et exemples

3.1 Défaut d'exactitude de l'homologie modulo p pour les fibrations multiplicatives

Proposition 3.1.1 (Moore-Smith [MS2]) *Soit $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ une fibration d'espaces pointés.*

- (a) *L'image du $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme $H_* \Omega_0 Z \rightarrow H_* \Omega_0 Y$ est normale.*
- (b) *L'homologie du complexe $H_* \Omega_0 Z \rightarrow H_* \Omega_0 Y \rightarrow H_* \Omega_0 X$ en $H_* \Omega_0 Y$ est, comme \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf, l'algèbre extérieure ΛM sur un \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué M concentré en degrés congrus à ± 1 modulo $2p$.*

Démonstration du (a) On remplace la fibration multiplicative $\Omega Z \rightarrow \Omega Y \rightarrow \Omega X$ par une suite exacte de groupes simpliciaux et on utilise le point de vue (i) de 1.1.2.1. Notons qu'il ne s'agit pas là d'une application des parties 1 et 2; cependant (a) est indispensable pour énoncer (b).

Démonstration du (b) Soit H l'homologie en question. D'après 2.2.3 (b) l'ensemble pointé $S_n H$ est trivial pour tout entier $n \not\equiv \pm 1 \pmod{2p}$ et l'on conclut en utilisant le point (b) de la proposition ci-dessous. \square

Proposition 3.1.2 *Soit H une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf.*

- (a) *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*
 - (i) *l'ensemble pointé $S_n H$ est trivial pour tout entier $n \geq 1$;*
 - (ii) *H est triviale.*
- (b) *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*
 - (i) *l'ensemble pointé $S_n H$ est trivial pour tout entier $n \not\equiv \pm 1 \pmod{2p}$;*
 - (ii) *le \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué PH est concentré en degrés congrus à ± 1 modulo $2p$ et l'homomorphisme naturel $PH \rightarrow QH$ est surjectif;*
 - (iii) *H est, comme \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf, l'algèbre extérieure AM sur un \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué M concentré en degrés congrus à ± 1 modulo $2p$.*

Démonstration. Soient H une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf et $n \geq 1$ un entier. L'application naturelle $P_n H \rightarrow Q_n H$ se factorise en tant qu'application d'ensembles pointés par l'inclusion naturelle $P_n H \hookrightarrow S_n H$ de 1.5.5 et la surjection naturelle $S_n H \twoheadrightarrow Q_n H \cong S_n VQH$. Rappelons que l'inclusion $P_n H \hookrightarrow S_n H$ est en fait une bijection si n est impair pour $p=2$ et si n n'est pas divisible par $2p$ pour $p > 2$.

La condition (i) de (a) implique donc que QH (ou PH) est trivial ce qui établit (a).

L'implication (i) \Rightarrow (ii) du point (b) résulte à nouveau de ce qui précède.

Maintenant si PH est concentré en degrés impairs l'inclusion $PH \hookrightarrow H$ se prolonge en une inclusion de \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf $APH \hookrightarrow H$ qui est aussi une surjection dès que l'application $PH \rightarrow QH$ en est une. Ceci démontre l'implication (ii) \Rightarrow (iii). \square

Remarques. (1) Compte tenu de la proposition 3.1.2 (b) le point (b) de la proposition 3.1.1 est conséquence de la représentabilité des foncteurs $S_{W(n)}$ pour les entiers $n \not\equiv \pm 1 \pmod{2p}$. Notons en revanche que la représentabilité de ces foncteurs n'utilise le point (b) de la proposition 3.1.1 que dans les deux cas suivants:

- X est un espace d'Eilenberg-Mac Lane;
 - Z est un espace d'Eilenberg-Mac Lane et la fibration $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ est principale.
- (2) Compte tenu de la proposition 3.1.2 (a) la semi-représentabilité des foncteurs $S_{W(n)}$ pour tout entier $n \geq 1$ est quant à elle «équivalente» à la proposition 2.1.1.
- (3) L'homologie H du complexe intervenant en 3.1.1 (b) est en fait une A -algèbre de Hopf instable. Posons $M = PH = QH$, M est donc un A -module instable concentré en degrés congrus à ± 1 modulo $2p$ et H est \mathcal{H}_* -isomorphe à AM et à VM (attention: AM n'est pas un objet de \mathcal{H}_* pour tout A -module instable M).

3.2 Sur les spectres de Brown-Gitler

On note $T(n)$ le spectre dont la suspension est le spectre des suspensions de l'espace pointé $T_1(n)$:

$$\Sigma T(n) = \Sigma^\infty T_1(n).$$

Les propriétés de $T_1(n)$ impliquent:

- (a) $H_* T(n) \cong G(n)$ comme A -module (à droite);

(b) pour tout espace pointé Y l'homomorphisme naturel

$$[T(n), \Sigma^\infty Y] \rightarrow \bar{H}_n Y$$

est surjectif ($[T(n), \Sigma^\infty Y]$ désigne le groupe abélien des applications du spectre $T(n)$ dans le spectre des suspensions de Y);

(c) $T(n)$ est rétracte à homotopie près du spectre des suspensions d'un espace pointé (par exemple $\Omega T_1(n)$).

Les propriétés (a) et (b) caractérisent le spectre $T(n)$ à équivalence d'homologie modulo p près. En effet soit $T^{bis}(n)$ un autre spectre vérifiant ces propriétés, comme $T(n)$ satisfait (c) il existe une application de spectres $T^{bis}(n) \rightarrow T(n)$ qui induit un isomorphisme en homologie modulo p .

L'existence d'un spectre $T(n)$ vérifiant (a) et (b) est due à Brown et Gitler [BG] (dans cet article ils se limitent au cas $p=2$, le plus important dans les applications, notamment [Mah, BP1, Co]) et «l'unicité» à Brown et Peterson [BP2]; la notation $T(n)$ apparait déjà dans [BG] ce qui justifie la notation $T_1(n)$ que nous avons adoptée pour les espaces de Brown-Gitler. Brown et Gitler construisent en fait les n -duaux des spectres $T(n)$ et c'est plutôt à ces n -duaux que l'on réserve habituellement l'appellation de spectres de Brown-Gitler.

Le théorème 0.1 concernant les espaces de Brown-Gitler implique un théorème analogue pour les spectres $T(n)$. Soit Y un spectre, on note $\Omega_0^\infty Y$ la composante connexe du point base dans $\Omega^\infty Y$.

Théorème 3.2.1 *Soit n un entier supérieur ou égal à 2; soit Y un spectre. Il existe un épimorphisme de groupes abéliens, naturel en Y :*

$$[T(n), Y] \twoheadrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}} (W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n), H_* \Omega_0^\infty Y)$$

qui est un isomorphisme si n est non congru à $\pm 1 \pmod{2p}$ ou si Y est un spectre d'Eilenberg-Mac Lane.

Démonstration. On a la suite d'isomorphismes naturels de groupes abéliens:

$$[T(n), Y] \cong [\Sigma T(n), \Sigma Y] \cong [\Sigma^\infty T_1(n), \Sigma Y] \cong [T_1(n), \Omega^\infty \Sigma Y].$$

On a donc d'après 2.2.3 un épimorphisme naturel $[T(n), Y] \twoheadrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}} (W^{\mathbb{F}_p}(n), H_* \Omega_0(\Omega^\infty \Sigma Y))$ qui est un isomorphisme si n est non congru à $\pm 1 \pmod{2p}$. Or:

- on a des équivalences d'homotopie, naturelles en Y , $\Omega(\Omega^\infty \Sigma Y) \cong \Omega^\infty Y$ et $\Omega_0(\Omega^\infty \Sigma Y) \cong \Omega_0^\infty Y$;
- $H_* \Omega_0^\infty Y$ est un objet abélien de $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p}$;
- $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$ est l'abélianisé de $W^{\mathbb{F}_p}(n)$ (voir 1.5.4). \square

Remarque. Pour $n \equiv \pm 1 \pmod{2p}$ on a $T(n) \cong \Sigma T(n-1)$ et donc aussi:

$$[T(n), Y] \cong \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}} (W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n-1), H_* \Omega_0(\Omega^\infty Y)).$$

Voici une application du théorème 3.2.1

Calcul de l'ordre de l'identité dans $[T(n), T(n)]$.

Corollaire 3.2.2 (Lin [Li]) *Soit n un entier pair supérieur ou égal à 2. Alors l'ordre de l'identité dans $[T(n), T(n)]$ est $p^{v_p(n)+1}$, $v_p(n)$ désignant la valuation p -adique de n .*

Démonstration. Soit $\iota: W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n) \rightarrow H_* \Omega^\infty T(n)$ le $\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$ -morphisme correspondant à l'identité de $T(n)$ via la bijection $[T(n), T(n)] \cong \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}}(W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n), H_* \Omega^\infty T(n))$. On se convainc tout d'abord que ι est injectif.

Pour cela on utilise l'analogie abélien du lemme 1.2.3.2 et les points suivants :

- l'application naturelle $\bar{H}_* \Omega^\infty T(n) \rightarrow H_* T(n)$ se factorise par les indécomposables;
- la composition $QW^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n) \rightarrow QH_* \Omega^\infty T(n) \rightarrow H_* T(n)$ s'identifie à l'inclusion $G^{\mathbb{F}_p}(n) \hookrightarrow G(n)$;
- $H_* \Omega^\infty T(n)$ est libre comme \mathbb{F}_p -algèbre graduée commutative, en effet ceci est vérifié pour le spectre des suspensions d'un espace pointé connexe (voir [CLM, théorème 4.2, p. 40]) et $T(n)$ est rétracte d'un tel spectre.

Ce qui précède montre que l'homomorphisme de groupes abéliens

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}}(W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n), W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)) \\ & \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}}(W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n), H_* \Omega^\infty T(n)) \cong [T(n), T(n)] \end{aligned}$$

induit par ι est injectif et puisque l'image de l'identité de $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$ par cet homomorphisme est l'identité de $T(n)$ il suffit de calculer l'ordre de l'identité dans $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}}(W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n), W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n))$. Or l'élément $p \text{Id}$ de $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}}(W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n), W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n))$ est la composition du *Verschiebung* et de l'élévation à la puissance p -ème, $x \mapsto (\xi x)^p$; on en déduit bien que $p^{v_p(n)} \text{Id} \neq 0$ et $p^{v_p(n)+1} \text{Id} = 0$. \square

En fait $\text{Hom}_{\mathcal{H}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}}(W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n), W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n))$ est engendré comme groupe abélien par l'identité et est donc isomorphe comme anneau à $\mathbb{Z}/p^{v_p(n)+1}$. Ce résultat, dû originalement à Schoeller [Sc], peut se démontrer par récurrence à l'aide de la troisième remarque suivant la proposition 1.5.5.

3.3 Réalisation des suites exactes de Mahowald

3.3.1 Les suites exactes de Mahowald

Rappelons tout d'abord ce que sont les suites exactes de Mahowald (voir [Mah, LZ2, Sect. 3.2]).

Soit n un entier > 0 , on considère l'homomorphisme de A -modules instables, que l'on note $\sigma: G(n) \rightarrow \Sigma G(n-1)$, représentant la suspension $\Sigma[G(n-1)]$ de la classe canonique de $G(n-1)$. Cet homomorphisme est toujours surjectif et voici une description de son noyau.

Pour $n \not\equiv 0, 2 \pmod{2p}$, σ est un isomorphisme.

Pour $n \equiv 0, 2 \pmod{2p}$, on pose :

- $\theta_n = S q^{n/2}$ si $p = 2$,
- $\theta_n = P^{n/2p}$ si $p > 2$ et $n \equiv 0 \pmod{2p}$,
- $\theta_n = \beta P^{(n-2)/2p}$ si $p > 2$ et $n \equiv 2 \pmod{2p}$,

– $\tau(n) = n - |\theta_n|$ ($|\theta_n|$ désignant le degré de θ_n comme élément de A), et on note $\theta_n: G(\tau(n)) \rightarrow G(n)$ l'homomorphisme de A -modules instables représentant $[G(n)]_{\theta_n}$. Alors la suite de A -modules instables:

$$0 \longrightarrow G(\tau(n)) \xrightarrow{\theta_n} G(n) \xrightarrow{\sigma} \Sigma G(n-1) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Les suites exactes ci-dessus s'appellent les suites exactes de Mahowald. On note η_n l'élément de $\text{Ext}_{\mathcal{A}_*}^1(\Sigma G(n-1), G(\tau(n)))$ représenté par une telle suite; $\text{Ext}_{\mathcal{A}_*}^1(\Sigma G(n-1), G(\tau(n)))$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel de dimension un engendré par η_n . On note $\Sigma_+(\eta_n)$ l'élément de $\text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 G(n-1), \Sigma_+ G(\tau(n)))$ représenté par l'extension de A -coalgèbres instables:

$$0 \rightarrow \Sigma_+ G(\tau(n)) \rightarrow \Sigma_+ G(n) \rightarrow \Sigma^2 G(n-1) \rightarrow 0$$

obtenue en «suspendant» la suite exacte de Mahowald. On va voir maintenant que si n est congru à 2 modulo $2p$ alors il n'est pas nécessaire de suspendre pour obtenir une extension de A -coalgèbres instables à partir de la suite exacte de Mahowald.

Le cas $n \equiv 2 \pmod{2p}$. Si n est un entier de la forme $2pk + 2$ la suite exacte de Mahowald s'écrit:

$$0 \rightarrow \Sigma G(2k) \rightarrow G(2pk + 2) \rightarrow \Sigma^2 G(2pk) \rightarrow 0.$$

Or l'homomorphisme $\lambda: \text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 G(2pk), \Sigma_+ G(2k)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}_*}^1(\Sigma^2 G(2pk), \Sigma G(2k))$ de 2.5 est un isomorphisme. En effet, pour $p > 2$ les groupes $\text{Hom}_{\mathcal{A}_*}(G(2pk), \Theta' G(2k))$ et $\text{Hom}_{\mathcal{A}_*}(G(2pk), (G(2k) \otimes G(2k))^{\ominus 2})$ sont nuls et pour $p = 2$ les flèches ∂ et $v \circ -$ du carré cartésien:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 G(4k), \Sigma_+ G(2k)) & \xrightarrow{\lambda} & \text{Ext}_{\mathcal{A}_*}^1(\Sigma^2 G(4k), \Sigma G(2k)) \\ \downarrow \chi & & \downarrow \partial \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}_*}(G(4k), (G(2k) \otimes G(2k))^{\ominus 2}) & \xrightarrow{v \circ -} & \text{Hom}_{\mathcal{A}_*}(G(4k), \Theta G(2k)) \end{array}$$

sont des isomorphismes si bien qu'il en est de même pour les flèches λ et χ . Il existe donc une unique structure de A -coalgèbre instable sur $\mathbb{F}_p \oplus G(2pk + 2)$, que l'on notera $G_+(2pk + 2)$, telle que la suite exacte $0 \rightarrow \Sigma_+ G(2k) \rightarrow G_+(2pk + 2) \rightarrow \Sigma^2 G(2pk) \rightarrow 0$, somme directe de la suite exacte de Mahowald et de la suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow 0 \rightarrow 0$, est une \mathcal{X}_* -extension. Le coproduit de $G_+(2pk + 2)$ est trivial pour $p > 2$ (observer cependant que dans ce cas $G(2pk + 2)$ n'est pas une suspension!) mais non pour $p = 2$; en fait on vérifie dans ce dernier cas que $G_+(4k + 2)$ est isomorphe à $\delta(\mathbb{F}_2 \oplus G^{\mathbb{F}_2}(4k + 2))$ (voir 1.4.3), $\delta: \mathcal{X}_*^{\mathbb{F}_2} \rightarrow \mathcal{X}_*$ désignant l'adjoint à gauche de l'oubli $\mathcal{X}_* \rightarrow \mathcal{X}_*^{\mathbb{F}_2}$ (voir 1.7).

On note ζ_n l'élément de $\text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 G(n-2), \Sigma_+ G((n-2)/p))$ décrit ci dessus; ζ_n est donc caractérisé par la formule $\lambda(\zeta_n) = \eta_n$. Voici une autre caractérisation de ζ_n .

On dispose d'un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 G(n-2), \Sigma_+ G((n-2)/p)) & \cong & \text{Ext}_{\mathcal{A}_*}^1(\Sigma^2 G(n-2), \Sigma G((n-2)/p)) \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \\
 \text{Hom}_{\mathcal{A}_*}(G(n-2), \check{R}G((n-2)/p)) & \cong & \text{Hom}_{\mathcal{A}_*}(G(n-2), \Theta G((n-2)/p))
 \end{array}$$

dans lequel toutes les flèches sont des isomorphismes et l'image de ζ_n dans $\text{Hom}_{\mathcal{A}_*}(G(n-2), \Theta G((n-2)/p))$ est l'application qui représente $\Theta[G((n-2)/p)]$.

Pour $p=2$ et $n \equiv 0 \pmod 4$ ce diagramme d'isomorphismes existe encore et l'on étend la définition de ζ_n par la propriété ci-dessus; on observera que l'on n'a pas dans ce cas-là $\lambda(\zeta_n) = \eta_n$.

3.3.2 *Sur certaines applications entre espaces de Brown-Gitler dont l'invariant de Hopf est relié aux suites exactes de Mahowald.*

Proposition 3.3.2.1 *Soit n un entier congru à 0 ou 2 modulo $2p$ et supérieur ou égal à 2. Alors il existe une application $e: T_1(n-1) \rightarrow T_1(\tau(n))$ qui possède les propriétés suivantes:*

- l'application $(\Omega e)_*: H_* \Omega T_1(n-1) \rightarrow H_* \Omega T_1(\tau(n))$ est triviale (ce qui entraîne que $e_*: \bar{H}_* T_1(n-1) \rightarrow \bar{H}_* T_1(\tau(n))$ est également triviale);
- $h^1(e) = \Sigma_+ \eta_n$;
- la cofibre de e a le type d'homotopie de $T_1(n)$.

Démonstration. Comme $T_1(\tau(n))$ est rétracte d'une suspension les deux premiers points sont conséquence du théorème 2.5.6 (en fait on pourrait seulement utiliser que la coùinité de l'adjonction $\Sigma \Omega T_1(\tau(n)) \rightarrow T_1(\tau(n))$ induit une surjection en homologie modulo p). Pour prouver la troisième il suffit de vérifier les conditions (a), (b) et (c) de 2.3.2. Les conditions (a) et (c) sont clairement remplies (observer que pour la condition (c) le cas $n=2$ ne fait pas exception); la condition (b) l'est à cause du lemme 2.5.5. \square

On se propose de montrer à présent que si n est congru à 2 modulo $2p$ alors on peut supposer que l'application e ci-dessus est une suspension.

Le cas $n \equiv 2 \pmod{2p}$. Soit n un entier > 0 , que l'on suppose pair si $p=2$ et divisible par $2p$ pour $p > 2$.

Le $\mathcal{A}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$ -morphisme $p \text{ Id}: W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n) \rightarrow W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$ (même notation qu'à la fin de 3.2) est la composition d'un $\mathcal{A}_*^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}$ -morphisme $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n) \rightarrow W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n/p)$ que l'on note φ^{ab} et de l'inclusion de $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n/p)$ dans $W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n)$; avec les notations de 1.4.1 on a $\varphi^{\text{ab}}(x_i) = (x_{i-1})^p$ pour $1 \leq i \leq k$ et $\varphi^{\text{ab}}(x_0) = 0$.

On note $\varphi: W^{\mathbb{F}_p}(n) \rightarrow W^{\mathbb{F}_p}(n/p)$ un $\mathcal{A}_*^{\mathbb{F}_p}$ -morphisme dont l'abélianisé est φ^{ab} , c'est-à-dire qui fait commuter le diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
 W^{\mathbb{F}_p}(n) & \xrightarrow{\varphi} & W^{\mathbb{F}_p}(n/p) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n) & \xrightarrow{\varphi^{\text{ab}}} & W^{\mathbb{F}_p, \text{ab}}(n/p)
 \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont les morphismes d'abélianisation; un tel φ existe bien parce que $W^{\mathbb{F}_p}(n)$ est $\mathcal{A}_*^{\mathbb{F}_p}$ -projectif.

On note enfin f l'élément de $[T_1(n), T_1(n/p)]$ correspondant par la bijection $[T_1(n), T_1(n/p)] \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}_*^{\mathbb{F}_p}}(W^{\mathbb{F}_p}(n), W(n/p))$ à la composition de φ et de l'inclusion $W^{\mathbb{F}_p}(n/p) \hookrightarrow W(n/p)$; on observe que l'image de f dans l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{A}_*}(H_* T_1(n), H_* T_1(n/p)) = \text{Hom}_{\mathcal{A}_*}(G(n), G(n/p))$ est triviale (en fait cet ensemble est trivial pour $n \neq 0$).

Proposition 3.3.2.2 *Soit n un entier, que l'on suppose pair pour $p=2$ et divisible par $2p$ pour $p>2$. Alors l'invariant de Hopf $h^1(f)$ de l'élément de $[T_1(n), T_1(n/p)]^1$ défini ci-dessus est ζ_{n+2} .*

Démonstration. Soit j un élément de $[T_1(n/p), T_1(n)]$ dont l'image par la surjection $[T_1(n/p), T_1(n)] \twoheadrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}_*^{\mathbb{F}_p}}(W^{\mathbb{F}_p}(n/p), W(n))$ (noter que cette surjection est en fait une bijection si n est divisible par $2p$) est la composition des inclusions $W^{\mathbb{F}_p}(n/p) \hookrightarrow W^{\mathbb{F}_p}(n)$ et $W^{\mathbb{F}_p}(n) \hookrightarrow W(n)$. Par construction :

- L'image de j dans $\text{Hom}_{\mathcal{A}_*}(H_* T_1(n/p), H_* T_1(n)) = \text{Hom}_{\mathcal{A}_*}(G(n/p), G(n))$ est l'application θ_n de la suite exacte de Mohawald.
- L'élément $\Sigma^\infty(j \circ f)$ de $[\Sigma T(n), \Sigma T(n)]$ est égal à p fois la classe de l'identité (voir 3.2) que l'on peut voir comme le smash-produit $f_0 \wedge T(n)$, f_0 désignant la classe dans $[S^1, S^1]$ d'une application de degré p .

La proposition résulte alors des points suivants :

- L'application $\lambda: \text{Ext}_{\mathcal{A}_*}^1(\Sigma^2 G(n), \Sigma_+ G(n/p)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}_*}^1(\Sigma^2 G(n), \Sigma G(n/p))$ est injective.
- L'invariant de Hopf de f_0 , vu comme un élément de $\text{Ext}_{\mathcal{A}_*}^1(\Sigma^2 G(0), \Sigma G(0))$, est η_2 .
- L'application $\text{Ext}_{\mathcal{A}_*}^1(\Sigma^2 G(n), \Sigma G(n/p)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}_*}^1(\Sigma^2 G(n), \Sigma G(n))$ induite par θ_n est injective.
- L'image de $\lambda(\zeta_{n+2})$ (qui rappelons-le coïncide avec η_{n+2} pour n divisible par $2p$) dans $\text{Ext}_{\mathcal{A}_*}^1(\Sigma^2 G(n), \Sigma G(n))$ est le produit tensoriel $\eta_2 \otimes G(n)$; pour se convaincre de ce point-là on peut utiliser que $\text{Ext}_{\mathcal{A}_*}^1(\Sigma^2 G(n), \Sigma N)$ est naturellement isomorphe à $\text{Hom}_{\mathcal{A}_*}(G(n), \Theta N) = N_{n/p}$ pour tout A -module instable N .
- Soit \mathcal{M}_* la catégorie des A -modules à droite «stables», c'est-à-dire pas nécessairement instables, alors l'application naturelle $\text{Ext}_{\mathcal{A}_*}^1(-, -) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{M}_*}^1(-, -)$ est injective.
- Les invariants de Hopf «instable» et «stable» sont compatibles, en un sens évident, avec l'application naturelle ci-dessus. \square

Corollaire-Définition 3.3.2.3 *Soit n un entier congru à 2 modulo $2p$, alors l'espace $T_1(n)$ a le type d'homotopie d'une suspension. Plus précisément soit $T_0(n)$ la cofibre d'une application $T_1(n-2) \rightarrow T_1((n-2)/p)$ représentant la classe d'homotopie f introduite ci-dessus, alors il existe une équivalence d'homotopie $T_1(n) \cong \Sigma T_0(n)$. La A -coalgèbre instable $H_* T_0(n)$ est isomorphe à $G_+(n)$.*

Démonstration. La proposition 3.3.2.2 nous dit que la cofibration $T_1((n-2)/p) \rightarrow T_0(n) \rightarrow \Sigma T_1(n-2)$ donne en homologie modulo p l'extension de A -coalgèbres instables $0 \rightarrow \Sigma_+ G((n-2)/p) \rightarrow G_+(n) \rightarrow \Sigma^2 G(n-2) \rightarrow 0$ considérée en 3.3.1. On a en particulier $H_* T_0(n) \cong G_+(n)$ comme A -coalgèbre instable.

On a également $\bar{H}_* \left(T_0(n), \mathbb{Z} \left[\frac{1}{p} \right] \right) = 0$ (observer que le cas $n=2$ ne fait pas

exception). La suspension $\Sigma T_0(n)$ vérifie donc à nouveau les conditions (a), (b) et (c) du théorème 2.3.2. \square

Remarques. La proposition 3.3.2.2 sera utilisée dans la démonstration de la proposition 2.5.3 donnée dans l'appendice A. Comme la proposition 2.5.3 est la clé du théorème 2.5.1 nous avons pris soin de ne pas faire dépendre la proposition 3.3.2.2 de ce théorème! C'est aussi en vue de cette utilisation future que nous avons supposé n pair plutôt que divisible par 4, pour $p=2$, dans l'énoncé 3.3.2.2.

3.4 Sur les désuspensions de $T_1(6)$ pour $p=2$

On suppose $p=2$ et $n=6$.

On vérifie par inspection qu'il existe exactement quatre A -coalgèbres instables K deux à deux non isomorphes telles que le A -module instable \bar{K} soit isomorphe à $G(6)$. On vient de voir que l'une d'entre elles, $G_+(6)$, est l'homologie modulo p d'un espace. En fait il en de même pour les trois autres.

Proposition 3.4.1 *Soit K une A -coalgèbre instable telle que le A -module instable \bar{K} soit isomorphe à $G(6)$. Alors il existe un espace pointé simplement connexe X tel que :*

- (a) *il existe un \mathcal{H}_* -isomorphisme $H_* X \cong K$;*
- (b) *il existe une équivalence d'homotopie $\Sigma X \cong T_1(6)$.*

Démonstration. D'après la remarque (3) qui suit l'énoncé du théorème 1.6.4 il existe un \mathcal{H}_* -isomorphisme $W(6) \cong JK$. On a donc d'après le théorème 2.2.3 (b) et la définition même du foncteur J des bijections naturelles en Y :

$$[T_1(6), Y] \cong \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(JK, H_* \Omega_0 Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(K, H_* \Omega_0 Y).$$

Puisque le foncteur $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_*}(K, H_* \Omega_0 Y)$ est un foncteur en groupes, on en déduit une structure de cogroupe sur $T_1(6)$. Comme $T_1(6)$ est 2-connexe et de dimension 7, le théorème 3.4 de [Ga] montre que cette structure est induite par une équivalence d'homotopie $\Sigma X \cong T_1(6)$ (avec X 1-connexe). Il reste à montrer que ceci implique (a).

Cette implication résulte du lemme ci-dessous. Observons avant de l'énoncer que pour toute A -coalgèbre instable K la A -algèbre de Hopf instable JK est canoniquement un cogroupe de \mathcal{H}_* et rappelons que QJK s'identifie comme A -module instable à \bar{K} .

Lemme 3.4.2 *Soient K et L deux A -coalgèbres instables et $f: JK \rightarrow JL$ un isomorphisme de \mathcal{H}_* -cogroupes. Alors l'application $Qf: \bar{K} \rightarrow \bar{L}$ préserve le coproduit réduit.*

Démonstration. Elle se fait à l'aide de la construction suivante. Soit $\psi: JK \rightarrow JK$ la «multiplication par 2» du cogroupe JK . On vérifie tout d'abord que $Q\psi: \bar{K} \rightarrow \bar{K}$ est triviale; ψ induit donc un \mathcal{U}_* -morphisme $\overline{JK}/\overline{JK}^2 \rightarrow \overline{JK}^2/\overline{JK}^3$. On vérifie que ce morphisme s'identifie au coproduit réduit $\bar{K} \rightarrow \bar{K} \otimes \bar{K}$. \square

Remarque. La démonstration ci-dessus ne marche que pour $p=2$. Pour une démonstration plus conceptuelle valable quelque soit p utiliser le théorème 1.2 de [Be].

Appendice A

L'objet de cet appendice est de donner une démonstration des deux propositions ci-dessous, promise au paragraphe 2.5 dont nous reprenons les notations:

Proposition 2.5.3 *Pour tout espace pointé Y l'application naturelle $v: \bar{H}_*(\Omega Z) \rightarrow \check{R}\bar{H}_* Y$ est surjective.*

Proposition 2.5.7 *Soit K le noyau du \mathcal{H}_* -morphisme $H_* \Omega Z \rightarrow H_* \Omega \Sigma Y$. Alors la restriction de v à \bar{K} induit une surjection de \bar{K} sur $R^1 \Omega \bar{H}_* Y$.*

On vérifie sans difficultés qu'il suffit de démontrer ces propositions pour les espaces pointés connexes; en conséquence dans cet appendice tous les espaces seront supposés connexes.

A.1 Démonstration de la proposition 2.5.3

On procède en trois étapes compte tenu des filtrations de $\check{R}\bar{H}_* Y$ décrites en 2.5.

1-ère étape. L'image de v contient le sous-module $R^1 \Omega \bar{H}_* Y$ de $\check{R}\bar{H}_* Y$.

C'est clairement une conséquence de la proposition 2.5.7 que l'on démontrera au prochain paragraphe.

2-ème étape. L'image de v contient le sous-module $A^2 \bar{H}_* Y$ de $\check{R}\bar{H}_* Y$.

On note CY le cône (réduit) d'un espace pointé Y ; on a une inclusion canonique $Y \hookrightarrow CY$ dont l'espace quotient s'identifie à ΣY . Soient Y_1 et Y_2 deux espaces pointés, on note $D(Y_1, Y_2)$ le sous-espace pointé de $CY_1 \times CY_2$ réunion des sous-espaces $CY_1 \times Y_2$ et $Y_1 \times CY_2$. On dispose de deux applications canoniques, $e: D(Y_1, Y_2) \rightarrow \Sigma(Y_1 \wedge Y_2)$ et $f: D(Y_1, Y_2) \rightarrow \Sigma Y_1 \vee \Sigma Y_2$. On vérifie que e est une équivalence d'homotopie (faible) et que le diagramme suivant est cocartésien:

$$\begin{array}{ccc}
 D(Y_1, Y_2) & \xrightarrow{f} & \Sigma Y_1 \vee \Sigma Y_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 CY_1 \times CY_2 & \longrightarrow & \Sigma Y_1 \times \Sigma Y_2.
 \end{array}$$

Ce diagramme montre que f est triviale en homologie modulo p et que $h^1(f)$ s'identifie à la classe de la \mathcal{H}_* -extension $\Sigma_+ (\bar{H}_* Y_1 \oplus \bar{H}_* Y_2) \hookrightarrow \Sigma_+ \bar{H}_* Y_1 \otimes \Sigma_+ \bar{H}_* Y_2 \rightarrow \Sigma \bar{H}_* Y_1 \otimes \Sigma \bar{H}_* Y_2$.

On fait ensuite $Y_1 = Y_2 = Y$ et on considère la composée g de f et de l'application canonique $\Sigma Y \vee \Sigma Y \rightarrow \Sigma Y$. La functorialité de l'invariant de Hopf implique que le \mathcal{U}_* -morphisme $\pi \circ h^1(g): \Sigma^{-1} \bar{H}_* D(Y, Y) \rightarrow \check{R}\bar{H}_* Y$ est le composé de l'isomorphisme $\Sigma^{-1} \bar{H}_* D(Y, Y) \cong \bar{H}_*(Y) \otimes \bar{H}_*(Y)$, de l'épimorphisme canonique $\bar{H}_* Y \otimes \bar{H}_* Y \rightarrow A^2 \bar{H}_* Y$ et de l'inclusion canonique $A^2 \bar{H}_* Y \hookrightarrow \check{R}\bar{H}_* Y$.

Etant donné le caractère universel de v la seconde étape est bien achevée. \square

Remarques. La construction précédente est inspirée d'une construction que l'on trouve par exemple dans [Ba, Ar]. On remarquera aussi que l'application $\Sigma(Y \wedge Y) \rightarrow \Sigma Y$ composée de l'équivalence d'homotopie $\Sigma(Y \wedge Y) \cong D(Y, Y)$ et de g s'identifie à homotopie près à l'adjointe du «commutateur» $Y \wedge Y \rightarrow \Omega \Sigma Y$.

3-ème étape. Le composé de v et du \mathcal{U}_* -épimorphisme $\check{R}\bar{H}_*Y \rightarrow \Theta\bar{H}_*Y$ est surjectif.

Soient n un entier > 0 que l'on suppose pair si $p > 2$ et y un élément de $H_n Y$. On «représente» y par une application $a: T_1(n) \rightarrow \Sigma Y$ et l'on considère la composée de a et de l'application $f: T_1(pn) \rightarrow T_1(n)$ de 3.3.2.2. Cette composée s'écrit également $u \circ b$, u désignant l'application $\Sigma\Omega Z \rightarrow \Sigma Y$ introduite en 2.5 (en même temps que v) et b une application de $T_1(pn)$ dans $\Sigma\Omega Z$. En utilisant le calcul de l'invariant de Hopf de f (c'est-à-dire la proposition 3.3.2.2) et la functorialité de cet invariant, on vérifie que le composé du \mathcal{U}_* -isomorphisme $G(pn) \cong \Sigma^{-1}\bar{H}_*T_1(pn)$, de $\Sigma^{-1}b_*: \Sigma^{-1}\bar{H}_*T_1(pn) \rightarrow \bar{H}_*\Omega Z$, de v , et du \mathcal{U}_* -épimorphisme $\check{R}\bar{H}_*Y \rightarrow \Theta\bar{H}_*Y$ représente l'élément Θy . \square

A.2 Démonstration de la proposition 2.5.7

A.2.1 Rappels sur le second homomorphisme de coin de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'une fibration

On considère une fibration $q: E \rightarrow B$, B étant un espace pointé simplement connexe. On note F la fibre de q au dessus du point base de B et $i: F \hookrightarrow E$ l'inclusion canonique. La suite spectrale d'Eilenberg-Moore de q , dont le terme E^2 est isomorphe comme \mathbb{F}_p -coalgèbre bigraduée à $\text{Cotor}_{H_*B}(H_*E, \mathbb{F}_p)$, converge fortement vers H_*F et plus précisément vers le gradué d'une filtration décroissante par des sous- A -modules instables $F_s H_*F$, $s \in \mathbb{N}$; on a en particulier $F_0 H_*F = H_*F$ et $F_1 H_*F = \ker(i_*: H_*F \rightarrow H_*E)$. On se propose de rappeler l'interprétation du second homomorphisme de coin $\kappa_1: \Sigma F_1 H_*F \rightarrow \text{Cotor}_{H_*B}^1(H_*E, \mathbb{F}_p)$ (qui est un \mathcal{U}_* -morphisme).

Par définition on a une suite exacte de A -modules instables $H_*E \rightarrow H_*(E, F) \rightarrow \Sigma F_1 H_*F \rightarrow 0$. Or le produit $1 \times q: E \rightarrow E \times B$ induit une application de paires $(E, F) \rightarrow (E \times B, E \times *)$ et donc un \mathcal{U}_* -morphisme $H_*(E, F) \rightarrow H_*E \otimes \bar{H}_*B$ si bien que l'on obtient un \mathcal{U}_* -morphisme naturel $v: \Sigma F_1 H_*F \rightarrow C$, C désignant le conoyau de l'homomorphisme $H_*E \rightarrow H_*E \otimes \bar{H}_*B$ induit par $1 \times q$.

Proposition A.2.1.1 (voir par exemple [Sm]) *L'homomorphisme v est le composé du second homomorphisme de coin $\kappa_1: \Sigma F_1 H_*F \rightarrow \text{Cotor}_{H_*B}^1(H_*E, \mathbb{F}_p)$ et de l'inclusion naturelle de $\text{Cotor}_{H_*B}^1(H_*E, \mathbb{F}_p)$ dans C .*

Cette proposition admet le corollaire ci-dessous. Soit λ un \mathcal{K}_* -morphisme $H_*B \rightarrow L$ tel que le composé $\lambda \circ q_*$ est trivial; λ induit un \mathcal{U}_* -morphisme $\text{Cotor}_{H_*B}^1(H_*E, \mathbb{F}_p) \rightarrow \text{Cotor}_L^1(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) = PL$.

Corollaire A.2.1.2 *Le \mathcal{U}_* -diagramme:*

$$\begin{array}{ccc} H_*(E, F) & \longrightarrow & \Sigma F_1 H_*F \\ \downarrow q_* & & \downarrow \\ \bar{H}_*B & \xrightarrow{\lambda} & \bar{L} \end{array}$$

dans lequel la flèche verticale de droite est la composée de κ_1 , du \mathcal{U}_* -morphisme $\text{Cotor}_{H_*B}^1(H_*E, \mathbb{F}_p) \rightarrow PL$ induit par λ , et de l'inclusion $PL \hookrightarrow \bar{L}$, est commutatif.

A.2.2 Détermination de la A -algèbre de Hopf instable K

En appliquant le foncteur Ω à la fibration $Z \rightarrow \Sigma Y \rightarrow \mathbb{F}_p[\Sigma Y]$ on obtient une fibration multiplicative $\Omega Z \rightarrow \Omega \Sigma Y \rightarrow \Omega \mathbb{F}_p[\Sigma Y]$ ou encore $\Omega Z \rightarrow \Omega \Sigma Y \rightarrow \mathbb{F}_p[Y]$ grâce à l'équivalence d'homotopie canonique $\mathbb{F}_p[Y] \cong \Omega \mathbb{F}_p[\Sigma Y]$. En accord avec A.2.1 les deux applications $\Omega Z \rightarrow \Omega \Sigma Y$ et $\Omega \Sigma Y \rightarrow \mathbb{F}_p[Y]$ seront respectivement notées i et q .

Factorisation canonique du \mathcal{H}_ -morphisme $q_*: H_* \Omega \Sigma Y \rightarrow H_* \mathbb{F}_p[Y]$.* On note $I: \mathcal{E}_* \rightarrow \mathcal{U}_*$ l'adjoint à droite de l'oubli $\mathcal{U}_* \rightarrow \mathcal{E}_*$. Soit M un objet de \mathcal{U}_* , on note $\eta: M \rightarrow IM$ l'unité de l'adjonction précédente; c'est un \mathcal{U}_* -monomorphisme dont le conoyau est noté $I'M$. On observera que si l'on applique le foncteur Ω à la \mathcal{U}_* -suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow IM \rightarrow I'M \rightarrow 0$ on obtient une \mathcal{U}_* -suite exacte à quatre termes $0 \rightarrow \Omega M \rightarrow \Omega IM \rightarrow \Omega I'M \rightarrow R^1 \Omega M \rightarrow 0$ puisque IM est par définition même \mathcal{U}_* -injectif. On désignera ci-après par e_M l'élément de $\text{Ext}_{\mathcal{U}_*}^1(I'M, M)$ représenté par la \mathcal{U}_* -suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow IM \rightarrow I'M \rightarrow 0$.

On est maintenant en mesure d'explicitier la factorisation canonique de q_* . La A -algèbre de Hopf instable $H_* \mathbb{F}_p[Y]$ est naturellement isomorphe à $V I \bar{H}_* Y$ et q_* se factorise de la façon suivante:

$$H_* \Omega \Sigma Y \longrightarrow V Q H_* \Omega \Sigma Y \cong V \bar{H}_* Y \xrightarrow{V \eta} V I \bar{H}_* Y \cong H_* \mathbb{F}_p[Y].$$

Il en résulte que le composé de q_* et du \mathcal{H}_* -morphisme évident $\lambda: H_* \mathbb{F}_p[Y] \rightarrow V I \bar{H}_* Y$ est trivial.

On détermine alors la A -algèbre de Hopf instable K en procédant comme pour la proposition 2.1.2. On considère le \mathcal{U}_* -morphisme naturel $\alpha: \bar{K} \rightarrow \Omega I \bar{H}_* Y$ adjoint de la composition:

$$\Sigma \bar{K} \longrightarrow \Sigma F_1 H_* \Omega Z \xrightarrow{\kappa_1} \text{Cotor}_{H_* \mathbb{F}_p(Y)}^1(H_* \Omega \Sigma Y, \mathbb{F}_p) \longrightarrow P V I \bar{H}_* Y \longrightarrow I' \bar{H}_* Y.$$

Le \mathcal{H}_* -morphisme naturel $\iota: K \rightarrow V \Omega I' \bar{H}_* Y$ adjoint de α est un \mathcal{H}_* -isomorphisme.

A.2.3 La proposition 2.5.7 est clairement une conséquence de la proposition suivante, plus précise:

Proposition A.2.3 *Pour tout espace pointé connexe Y le \mathcal{U}_* -morphisme composé $v \circ (\bar{i})^{-1}: V \Omega I' \bar{H}_* Y \rightarrow \bar{R} \bar{H}_* Y$ est composé des épimorphismes canoniques $V \Omega I' \bar{H}_* Y \rightarrow \Omega I' \bar{H}_* Y$ et $\Omega I' \bar{H}_* Y \rightarrow R^1 \Omega \bar{H}_* Y$ et du monomorphisme canonique $R^1 \Omega \bar{H}_* Y \hookrightarrow \bar{R} \bar{H}_* Y$.*

Démonstration. L'application $u: \Sigma \Omega Z \rightarrow \Sigma Y$ est l'adjointe de $i: \Omega Z \rightarrow \Omega \Sigma Y$, c'est-à-dire la composée de Σi et de la coïunité de l'adjonction $\Sigma \Omega \Sigma Y \rightarrow \Sigma Y$. On dispose donc d'un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma Y & \longrightarrow & \text{c\^one}(u) & \longrightarrow & \Sigma^2 \Omega Z \\ \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ \Sigma \Omega \Sigma Y & \longrightarrow & \Sigma \text{c\^one}(i) & \longrightarrow & \Sigma^2 \Omega Z \end{array}$$

dans lequel les deux lignes sont des cofibrations. En prenant l'homologie modulo p on obtient un diagramme commutatif:

$$(D) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Sigma_+ \bar{H}_* Y & \longrightarrow & H_* \text{c\^one}(u) & \longrightarrow & \Sigma^2 \bar{H}_* \Omega Z \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow \\ & & \Sigma_+ \bar{H}_* \Omega \Sigma Y & \longrightarrow & \Sigma_+ \bar{H}_* \text{c\^one}(i) & \longrightarrow & \Sigma^2 F_1 H_* \Omega Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

dans lequel les deux lignes sont exactes; la ligne sup\u00e9rieure est en fait une \mathcal{X}_* -extension dont la classe dans $\text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 \bar{H}_* \Omega Z, \Sigma_+ \bar{H}_* Y)$ est par d\u00e9finition $h^1(u)$.

On consid\u00e8re ensuite le diagramme commutatif:

$$(D') \quad \begin{array}{ccc} \bar{H}_* \text{c\^one}(i) & \longrightarrow & \Sigma F_1 H_* \Omega Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ I \bar{H}_* Y & \longrightarrow & I' \bar{H}_* Y \end{array}$$

obtenu en «empilant» le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \bar{H}_* \text{c\^one}(i) & \longrightarrow & \Sigma F_1 H_* \Omega Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{H}_* \mathbb{F}_p[Y] & \xrightarrow{\lambda} & \overline{VI' \bar{H}_* Y} \end{array}$$

fournit par A.2.1.2 et le diagramme commutatif \u00e9vident:

$$\begin{array}{ccc} \bar{H}_* \mathbb{F}_p[Y] & \xrightarrow{\lambda} & \overline{VI' \bar{H}_* Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ QH_* \mathbb{F}_p[Y] & \xrightarrow{Q\lambda} & Q\overline{VI' \bar{H}_* Y} \end{array}$$

En juxtaposant les diagrammes (D) et $\Sigma_+(D')$ on se convainc ais\u00e9ment que l'image de $h^1(u)$ dans $\text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 \bar{K}, \Sigma_+ \bar{H}_* Y)$ co\u00efncide avec celle de $e_{H_* Y}$ par la composition

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{U}_*}^1(I' \bar{H}_* Y, \bar{H}_* Y) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma I' \bar{H}_* Y, \Sigma_+ \bar{H}_* Y) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 \Omega I' \bar{H}_* Y, \Sigma_+ \bar{H}_* Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}_*}^1(\Sigma^2 \bar{K}, \Sigma_+ \bar{H}_* Y), \end{aligned}$$

la premi\u00e8re fl\u00e8che \u00e9tant induite par le foncteur Σ_+ , la deuxi\u00e8me par l'inclusion $\Sigma \Omega I' \bar{H}_* Y \hookrightarrow I' \bar{H}_* Y$, et la troisi\u00e8me par le \mathcal{U}_* -morphisme $\alpha: \bar{K} \rightarrow \Omega I' \bar{H}_* Y$.

La proposition A.2.3 découle alors formellement de ce que pour tout objet M de \mathcal{W}_* l'image de e_M par la composition

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{W}_*}^1(I' M, M) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{W}_*}^1(\Sigma I' M, \Sigma_+ M) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{W}_*}^1(\Sigma^2 \Omega I' M, \Sigma_+ M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{W}_*}(\Omega I' M, \check{R} M) \end{aligned}$$

est le composé de l'épimorphisme canonique $\Omega I' M \rightarrow R^1 \Omega M$ et du monomorphisme canonique $R^1 \Omega M \hookrightarrow \check{R} M$. \square

Appendice B. Une caractérisation des foncteurs homotopiques covariants représentables par un espace simplement connexe

Fabien Morel

B.1 Foncteurs représentables, foncteurs simplement connexes exacts

On rappelle que $h\mathcal{S}_{pt}$ désigne la «catégorie homotopique pointée» c'est-à-dire la catégorie de fractions obtenue en inversant les équivalences faibles de la catégorie des espaces topologiques pointés ou de la catégorie des ensembles simpliciaux pointés [GZ, Qu, BK].

Dans cet appendice, nous caractérisons les foncteurs covariants $F: h\mathcal{S}_{pt} \rightarrow \mathcal{E}ns_{pt}$ ($\mathcal{E}ns_{pt}$ désignant la catégorie des ensembles pointés) représentables par un espace pointé simplement connexe: il s'agit d'une version duale du théorème de représentabilité de Brown [Br]. Ce type de problème a déjà été étudié par plusieurs auteurs. A notre connaissance, on peut citer Brown lui-même (appendice de [Br]), Heller [He] ou encore J.P. May (non publié). Le cas «simplement connexe» étudié ci-après n'a d'autre application en vue que le théorème 2.2.3 de la partie 2 de cet article.

Soit X un espace pointé. On note $R_X: h\mathcal{S}_{pt} \rightarrow \mathcal{E}ns_{pt}$ le foncteur covariant représenté par X ; on a donc $R_X Y = [X, Y]$ pour tout espace pointé Y .

Rappelons qu'un foncteur covariant $S: h\mathcal{S}_{pt} \rightarrow \mathcal{E}ns_{pt}$ est dit représentable s'il est isomorphe à un foncteur R_X pour un certain espace pointé X .

Soit S un foncteur covariant $h\mathcal{S}_{pt} \rightarrow \mathcal{E}ns_{pt}$ (en abrégé un foncteur homotopique). Nous dirons que S est simplement connexe s'il vérifie la condition suivante:

(C.1) Soient Y_0 la composante connexe du point base de l'espace pointé Y et \tilde{Y}_0 son revêtement universel. Alors l'application $S\tilde{Y}_0 \rightarrow SY$ est une bijection.

Soit $S: h\mathcal{S}_{pt} \rightarrow \mathcal{E}ns_{pt}$ un foncteur covariant simplement connexe. Nous dirons que S est «semi-représentable» s'il existe un espace pointé simplement connexe X et un élément x de SX tels que:

- (a) pour tout espace pointé Y , l'application naturelle (induite par x) $[X, Y] \rightarrow SY$ est surjective;
- (b) pour tout entier $n \geq 2$ et tout groupe abélien π l'application $[X, K(\pi, n)] \rightarrow SK(\pi, n)$ est bijective.

On dira que le couple (X, x) «semi-représente» S . Un tel couple est unique à isomorphisme près. En effet, soient Y un espace pointé simplement connexe et y un élément de SY tels que pour tout entier $n \geq 2$ et tout groupe abélien

π l'application (induite par y) $[Y, K(\pi, n)] \rightarrow SK(\pi, n)$ est bijective. Il existe au moins une application $f: X \rightarrow Y$ qui envoie x sur y . Elle induit par hypothèse un isomorphisme en cohomologie à coefficients dans tous les groupes abéliens; c'est donc une équivalence d'homotopie puisque les deux espaces sont simplement connexes.

Cependant, contrairement au cas où S est représentable, le couple (X, x) n'est pas nécessairement «unique à isomorphisme canonique près»: il peut exister des équivalences d'homotopie $f: X \rightarrow X$ non homotope à l'identité qui «fixent» x .

Un foncteur simplement connexe $S: h\mathcal{S}_{pt} \rightarrow \mathcal{E}n_{s_{pt}}$ est dit semi-exact s'il vérifie les conditions suivantes:

(C.2) Pour tous espaces pointés Y et Z , l'application naturelle $S(Y \times Z) \rightarrow SY \times SZ$ est une bijection.

(C.3) Pour tout ensemble E et tout entier $n \geq 1$, l'application naturelle:

$$S((K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, n))^E) \rightarrow (S(K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, n)))^E$$

est une bijection.

(C.4) Soient $Z \rightarrow Y$ une application pointée et:

$$Z \rightarrow \dots \rightarrow Y_{n+1} \rightarrow Y_n \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow Y_0 \cong Y$$

sa tour de Postnikov. Alors l'application naturelle:

$$SZ \rightarrow \varprojlim_n S Y_n$$

est surjective.

(C.5) Soient Y un espace pointé, π un groupe abélien, n un entier ≥ 2 , $f: Y \rightarrow K(\pi, n)$ une application pointée de Y dans un espace d'Eilenberg-Mac Lane, et Z la fibre homotopique de f . Alors la suite d'ensembles pointés $SZ \rightarrow SY \rightarrow SK(\pi, n)$ est exacte: un élément de SY est l'image d'un élément de SZ si et seulement si son image dans $SK(\pi, n)$ est triviale.

Observons que l'action à homotopie près de $\Omega K(\pi, n)$ sur Z induit en vertu de (C.2) une action du groupe abélien $S\Omega K(\pi, n)$ sur l'ensemble pointé SZ .

Un foncteur simplement connexe et semi-exact S sera dit exact s'il vérifie en plus de (C.1), (C.2), (C.3), (C.4) et (C.5) la condition suivante:

(C.6) Soient Y un espace pointé, π un groupe abélien, n un entier ≥ 2 , $f: Y \rightarrow K(\pi, n)$ une application de Y dans un espace d'Eilenberg-Mac Lane, et Z la fibre homotopique de f . Deux éléments de SZ diffèrent par l'action du groupe abélien $S\Omega K(\pi, n)$ sur SZ si et seulement s'ils ont même image dans SY .

Notons que si X est un espace pointé simplement connexe, le foncteur R_X est simplement connexe et exact. Réciproquement:

Théorème B.1 Soit $S: h\mathcal{S}_{pt} \rightarrow \mathcal{E}n_{s_{pt}}$ un foncteur covariant simplement connexe. Alors:

- (a) S est semi-exact si et seulement si il est semi-représentable;
- (b) S est exact si et seulement si il est représentable.

B.2 Homologie et cohomologie des foncteurs simplement connexes semi-exacts

On se donne dans toute cette partie un foncteur covariant $S: h\mathcal{S}_{p_1} \rightarrow \mathcal{E}^n s_{p_1}$ simplement connexe semi-exact.

Cohomologie d'un foncteur simplement connexe semi-exact. Soient π un groupe abélien et n un entier ≥ 1 . On note $H^n(S; \pi)$ l'ensemble pointé $SK(\pi, n)$.

Cet ensemble est muni d'une structure canonique de groupe abélien. En effet, comme S vérifie la propriété (C.2) la multiplication de $K(\pi, n)$, $K(\pi, n) \times K(\pi, n) \rightarrow K(\pi, n)$, induit une loi de groupe abélien $SK(\pi, n) \times SK(\pi, n) \rightarrow SK(\pi, n)$. Le groupe abélien $H^n(S; \pi)$ s'appellera le n -ème groupe de cohomologie de S à coefficients dans π . On pose $H^0(S; \pi) = \pi$. La simple connexité de S montre que les groupes $H^1(S; \pi)$ sont nuls pour tout groupe abélien π .

On note $\mathcal{A}b$ la catégorie des groupes abéliens et $H^n(S; -): \mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{A}b$ le foncteur qui envoie un groupe abélien π sur le n -ème groupe de cohomologie de S à coefficients dans π ; c'est un foncteur additif d'après (C.2).

Caractérisation des foncteurs représentables $\mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{A}b$

Théorème B.2 (Watts) *Soit $H: \mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{A}b$ un foncteur additif covariant exact à gauche et commutant aux produits quelconques de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Alors H est représentable: il existe un groupe abélien π et un isomorphisme de foncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{A}b}(\pi, -) \cong H$.*

Pour une démonstration voir [Wa]. Ce théorème résulte du fait que \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est un cogénérateur de la catégorie abélienne $\mathcal{A}b$ (tout groupe abélien A se plonge dans un produit de \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).

Homologie entière d'un foncteur homotopique simplement connexe semi-exact. Soit $H: \mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{A}b$ un foncteur additif covariant. On note $R^i H$, $i=0, 1$, le i -ème foncteur dérivé à droite de H ; $R^0 H$ est un foncteur additif exact à gauche.

D'après (C.3) le foncteur $R^0 H^n(S; -)$ vérifie les hypothèses du théorème B.2. Il existe donc un groupe abélien $H_n(S; \mathbb{Z})$ et pour tout groupe abélien π une bijection naturelle:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}b}(H_n(S; \mathbb{Z}), \pi) \cong (R^0 H^n(S; -))(\pi).$$

Le groupe abélien $H_n(S; \mathbb{Z})$ s'appellera le n -ème groupe d'homologie à coefficients entiers de S .

Puisque par convention $H^0(S; \pi) = \pi$ on a $H_0(S; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$; de même, l'égalité $H^1(S; \pi) = 0$ montre que l'on a $H_1(S; \mathbb{Z}) = 0$.

Observons que l'on a une transformation naturelle canonique $H^n(S; -) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(H_n(S; \mathbb{Z}), -)$. On se propose au paragraphe suivant de montrer que cette transformation naturelle est surjective et de déterminer son noyau.

Suites exactes des coefficients universels. Soit $0 \rightarrow \pi' \rightarrow \pi \rightarrow \pi'' \rightarrow 0$ une suite exacte de groupes abéliens. On considère la longue suite d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane:

$$\begin{aligned} \pi' \rightarrow \pi \rightarrow \pi'' \rightarrow K(\pi', 1) \rightarrow K(\pi, 1) \rightarrow \dots \rightarrow K(\pi', n) \rightarrow K(\pi, n) \\ \rightarrow K(\pi'', n) \xrightarrow{\delta} K(\pi', n+1) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

dans laquelle chaque séquence de trois espaces consécutifs est une fibration à homotopie près. Lorsqu'on applique S à cette suite on obtient en vertu de (C.5) une longue suite exacte de groupes abéliens:

$$0 \rightarrow H^0(S; \pi') \rightarrow H^0(S; \pi) \rightarrow H^0(S; \pi'') \xrightarrow{\delta} H^1(S; \pi') \rightarrow H^1(S; \pi) \rightarrow \dots$$

$$\rightarrow H^n(S; \pi') \rightarrow H^n(S; \pi) \rightarrow H^n(S; \pi'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(S; \pi') \rightarrow \dots$$

Supposons maintenant que le groupe abélien π (et donc π') est un objet injectif de $\mathcal{A}b$. Par définition des foncteurs dérivés à droite $R^i H^n(S; -)$ de $H^n(S; -)$, $i=0, 1$, la suite exacte ci-dessus fournit pour tout n une suite exacte de groupes abéliens, naturelle en π :

$$0 \rightarrow R^1 H^{n-1}(S; \pi) \rightarrow H^n(S; \pi) \rightarrow R^0 H^n(S; \pi) \rightarrow 0.$$

Compte tenu des isomorphismes canoniques:

$$R^0 H^n(S; -) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(H_n(S; \mathbb{Z}), -)$$

et

$$R^1 H^n(S; -) \cong R^1 R^0 H^n(S; -) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}b}^1(H_n(S; \mathbb{Z}), -),$$

la suite exacte précédente s'interprète comme une suite exacte de foncteurs $\mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{A}b$:

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}b}^1(H_{n-1}(S; \mathbb{Z}), -) \rightarrow H^n(S; -) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(H_n(S; \mathbb{Z}), -) \rightarrow 0.$$

Cette suite exacte de foncteurs s'appellera la suite exacte des coefficients universels du foncteur S ; sa valeur en un groupe abélien π est donc la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}b}^1(H_{n-1}(S; \mathbb{Z}), \pi) \rightarrow H^n(S; \pi) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(H_n(S; \mathbb{Z}), \pi) \rightarrow 0$$

précédemment construite.

Fonctorialité de l'homologie entière et des suites exactes de coefficients universels. Les constructions précédentes sont fonctorielles. Précisons un peu. Notons respectivement $h\mathcal{S}_{pt}^1$, \mathcal{F}_e^1 , \mathcal{F}_{se}^1 et \mathcal{F} la sous catégorie de $h\mathcal{S}_{pt}^1$ dont les objets sont les espaces pointés simplement connexes, la «catégorie» opposée à celle des foncteurs homotopiques simplement connexes exacts, la «catégorie» opposée à celle des foncteurs homotopiques simplement connexes semi-exacts et la «catégorie» opposée à celle des foncteurs homotopiques (la justification des guillemets ci-dessus autour du mot catégorie est que les $\text{Hom}(-, -)$ ne sont pas *a priori* des ensembles). On a des plongements pleinement fidèles $h\mathcal{S}_{pt}^1 \hookrightarrow \mathcal{F}_e^1 \hookrightarrow \mathcal{F}_{se}^1 \hookrightarrow \mathcal{F}$ et $h\mathcal{S}_{pt} \hookrightarrow \mathcal{F}$ induits par la correspondance $X \mapsto R_X$. Par la suite nous identifierons souvent un espace pointé X à son image dans \mathcal{F} , avec cette convention un élément x de SX s'identifiera à un \mathcal{F} -morphisme $S \rightarrow X$.

L'homologie entière des foncteurs homotopiques simplement connexes et semi-exacts définit un foncteur $\mathcal{F}_{se}^1 \rightarrow \mathcal{A}b_*$ ($\mathcal{A}b_*$ désignant la catégorie des groupes abéliens \mathbb{N} -gradués). De même les suites exactes de coefficients universels sont fonctorielles.

Soit X un espace pointé simplement connexe. L'égalité $[X, K(\pi, n)] = H^n(R_X; \pi)$ définit un isomorphisme canonique $H_*(X; \mathbb{Z}) \cong H_*(R_X; \mathbb{Z})$. Un élé-

ment x de SX (que l'on considère comme un \mathcal{F} -morphisme $S \rightarrow X$) induit donc un homomorphisme $x_*: H_*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(S; \mathbb{Z})$.

Un \mathcal{F}_{se}^1 -morphisme $f: S \rightarrow T$ de \mathcal{F}_{se}^1 induisant un isomorphisme en homologie entière s'appellera une équivalence faible. Notons que f est une équivalence faible si et seulement s'il induit un isomorphisme en cohomologie à coefficients dans tous les groupes abéliens.

B.3 Démonstration du théorème B.1

Lemme B.3.1 Soit $y: S \rightarrow Y$ un \mathcal{F} -morphisme, Y étant un espace pointé et S un objet de \mathcal{F}_{se}^1 . Alors il existe un espace pointé simplement connexe X et un \mathcal{F} -diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow x & \downarrow \\ S & \xrightarrow{y} & Y \end{array}$$

dans lequel x est une équivalence faible.

Démonstration. Nous allons construire X par récurrence. Soit n un entier ≥ 0 . Une n -réalisation de y est la donnée:

- d'un espace pointé X_n ;
- d'une application $f_n: X_n \rightarrow Y$;
- d'un morphisme $x_n: S \rightarrow X_n$;

tels que:

- (a) $f_n \circ x_n = y$;
- (b) x_n est n -connexe, c'est-à-dire que $H_k(x_n): H_k(S; \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(X_n; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $k \leq n$ et un épimorphisme pour $k = n + 1$.

Notons $X_0 = \tilde{Y}_0$ et $f_0: X_0 \rightarrow Y$ le morphisme canonique. D'après (C.1) on peut trouver $x_0: S \rightarrow X_0$ tel que $f_0 \circ x_0 = y$. On constate que y_0 est 0-connexe puisque S et X_0 sont simplement connexes. Le triplet (X_0, f_0, x_0) est donc une 0-réalisation de y .

Soient $n \geq 0$ et (X_n, f_n, x_n) une n -réalisation de y . Notons $K_{n+1} = \ker(H_{n+1}(x_n): H_{n+1}(S; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n+1}(X_n; \mathbb{Z}))$ et $C_{n+2} = \text{coker}(H_{n+2}(x_n): H_{n+2}(S; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n+2}(X_n; \mathbb{Z}))$. Considérons le diagramme de suites exactes de coefficients universels pour le groupe abélien π :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}b}^1(H_{n+1}(X_n; \mathbb{Z}), \pi) & \longrightarrow & H^{n+2}(X_n; \pi) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}b}^1(H_{n+1}(S; \mathbb{Z}), \pi) & \longrightarrow & H^{n+2}(S; \pi) & & \\ & & & & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(H_{n+2}(X_n; \mathbb{Z}), \pi) & \longrightarrow 0 \\ & & & & & \downarrow & \\ & & & & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}b}(H_{n+2}(S; \mathbb{Z}), \pi) & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Ce diagramme fournit une suite exacte à six termes reliant les différents noyaux et conoyaux.

Pour $\pi = C_{n+2}$, l'obstruction à relever l'épimorphisme $H_{n+2}(X_n; \mathbb{Z}) \rightarrow C_{n+2}$ en un élément α de $H^{n+2}(X_n; C_{n+2})$ dont l'image par x_n^* soit nulle dans $H^{n+2}(S; C_{n+2})$ « vit » dans $\text{Ext}_{\mathcal{A}b}^1(K_{n+1}, C_{n+2})$; on la représente par une extension $e: 0 \rightarrow C_{n+2} \rightarrow E_{n+2} \rightarrow K_{n+1} \rightarrow 0$.

On considère maintenant le diagramme précédent avec $\pi = E_{n+2}$. Comme l'image de e par l'inclusion $C_{n+2} \rightarrow E_{n+2}$ est triviale il existe un élément α de $H^{n+2}(X_n; E_{n+2})$ vérifiant $x_n^*(\alpha) = 0$ et relevant l'homomorphisme $H_{n+2}(X_n; \mathbb{Z}) \rightarrow E_{n+2}$.

Notons X_{n+1} la fibre homotopique de l'application $\alpha: X_n \rightarrow K(E_{n+2}, n+2)$. Le \mathcal{F} -morphisme composé $S \rightarrow X_n \rightarrow K(E_{n+2}, n+2)$ est trivial par construction et d'après (C.5) il existe donc un \mathcal{F} -morphisme $x_{n+1}: S \rightarrow X_{n+1}$ tel que x_n est le composé de x_{n+1} et de l'application $X_{n+1} \rightarrow X_n$.

La suite spectrale de Serre à coefficients entiers pour la fibration $X_{n+1} \rightarrow X_n \rightarrow K(E_{n+2}, n+2)$ fournit des isomorphismes $H_k(X_{n+1}; \mathbb{Z}) \cong H_k(X_n; \mathbb{Z})$ pour $k \leq n$, ainsi qu'une suite exacte:

$$0 \rightarrow H_{n+2}(X_{n+1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n+2}(X_n; \mathbb{Z}) \rightarrow E_{n+2} \rightarrow H_{n+1}(X_{n+1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n+1}(X_n; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

qui se décompose en les suites exactes courtes suivantes:

- $0 \rightarrow H_{n+2}(X_{n+1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n+2}(X_n; \mathbb{Z}) \rightarrow C_{n+2} \rightarrow 0$;
- $0 \rightarrow C_{n+2} \rightarrow E_{n+2} \rightarrow K_{n+1} \rightarrow 0$;
- $0 \rightarrow K_{n+1} \rightarrow H_{n+1}(X_{n+1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n+1}(X_n; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$.

On en déduit que $x_{n+1}: S \rightarrow X_{n+1}$ est $(n+1)$ -connexe et que, en notant $f_{n+1}: X_{n+1} \rightarrow Y$ l'application canonique, le triplet $(X_{n+1}, f_{n+1}, x_{n+1})$ est une $(n+1)$ -réalisation de $y: S \rightarrow Y$.

On obtient en itérant cette construction une tour de fibrations $\rightarrow X_{n+1} \rightarrow X_n \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow Y$ et un élément de $\varprojlim_n S Y_n$ au dessus de y . On note X la limite inverse de cette tour. D'après (C.4) on peut trouver un morphisme $x: S \rightarrow X$ qui relève l'élément de $\varprojlim_n S X_n$; on vérifie alors que l'homomorphisme $x_*: H_*(S; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(X; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme et que le composé de x et de l'application canonique $X \rightarrow Y$ est égal à y . \square

Lemme B.3.2 *Considérons un \mathcal{F} -diagramme commutatif dans lequel X, Y et Z sont des espaces pointés et S un objet de \mathcal{F}_e^1 :*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{z} & Z \\ \downarrow x & & \downarrow v \\ X & \xrightarrow{y} & Y. \end{array}$$

Alors il existe un \mathcal{F} -morphisme $u: X \rightarrow Z$ tel que $v \circ u = y$.

Remarque. On ne demande pas ci-dessus l'égalité $u \circ x = z$; celle-ci peut être réalisée a posteriori puisque x est un \mathcal{F} -isomorphisme!

Démonstration. On se ramène d'après (C.1) au cas où Y et Z sont simplement connexes.

Supposons tout d'abord que v est une fibration principale de fibre $K(\pi, n)$ où π est un groupe abélien et $n \geq 2$. Notons $\alpha: Y \rightarrow K(\pi, n+1)$ l'application classifiante.

Par hypothèse, $y^*(\alpha)$ est triviale dans $H^{n+1}(X; \pi)$; en effet x^* est un isomorphisme et $(v \circ z)^*(\alpha)$ est triviale dans $H^{n+1}(S; \pi)$.

On peut donc trouver $u': X \rightarrow Z$ qui relève y . D'après (C.6), il existe un élément w de $H^n(S; \pi) \cong H^n(X; \pi)$ qui envoie $u' \circ x$ sur z . Notons $u: X \rightarrow Z$ l'application $w \cdot u'$, désignant l'action de $H^n(X; \pi)$ sur $[X, Z]$. On a $v \circ u = y$ et $u \circ x = z$, ce qui établit le cas considéré.

Le cas général se traite par récurrence sur la décomposition de Postnikov de v en utilisant (C.4). \square

Démonstration du théorème B.1 (a) On se convainc facilement que tout foncteur $h\mathcal{S}_{pt} \rightarrow \mathcal{E}n\mathcal{S}_{pt}$ simplement connexe semi-représentable est semi-exact. Réciproquement soit S un foncteur covariant simplement connexe semi-exact $h\mathcal{S}_{pt} \rightarrow \mathcal{E}n\mathcal{S}_{pt}$. Soient X un espace pointé simplement connexe et $x: S \rightarrow X$ une équivalence faible (l'existence d'un tel couple (X, x) est assurée par le lemme B.3.1 que l'on applique avec $Y = *$). Nous souhaitons montrer que (X, x) semi-représente S . Il suffit pour cela de montrer que pour tout espace pointé Y l'application:

$$[X, Y] \rightarrow SY$$

induite par x est surjective. En effet, lorsque Y est un espace d'Eilenberg-Mac Lane, cette application est bijective puisque x induit un isomorphisme en homologie entière (voir B.2).

Soit $y: S \rightarrow Y$ un élément de SY . Le lemme B.3.1 montre l'existence d'un espace pointé simplement connexe X' et d'un \mathcal{F} -diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} & & X' \\ & \nearrow x' & \downarrow y' \\ S & \xrightarrow{y} & Y \end{array}$$

dans lequel x' est une équivalence d'homologie entière. Ce même lemme appliqué à l'élément $(x, x'): S \rightarrow X \times X'$ de $S(X \times X')$ montre l'existence d'un espace pointé simplement connexe X'' et d'un \mathcal{F} -diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} & & X'' \\ & \nearrow x'' & \downarrow \\ S & \xrightarrow{(x, x')} & X \times X' \end{array}$$

dans lequel x'' est une équivalence faible. Chacun des deux \mathcal{F} -morphisms $z: X'' \rightarrow X$ et $z': X'' \rightarrow X'$ composés du \mathcal{F} -morphisme $X'' \rightarrow X \times X'$ et des projections est une équivalence d'homologie entière et donc un isomorphisme puisque les espaces sont simplement connexes. Notons $u: X \rightarrow Y$ le \mathcal{F} -morphisme composé $y' \circ z' \circ z^{-1}$; par construction $u \circ x = y$ ce qui montre bien la surjectivité de l'application $[X, Y] \rightarrow SY$.

(b) Supposons de plus que S est exact. On veut montrer que l'application $[X, Y] \rightarrow SY$ est injective pour tout espace pointé Y .

Soient y' et y'' deux applications $X \rightarrow Y$ ayant même image y dans SY . On a donc un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{y} & Y \\ \downarrow x & & \downarrow \Delta \\ X & \xrightarrow{(y', y'')} & Y \times Y \end{array}$$

Δ désignant la diagonale de Y . Le lemme B.3.2 montre qu'il existe une application $u: X \rightarrow Y$ telle que $\Delta \circ u = (y', y'')$; on a donc $y' = u = y''$ ce qui achève la démonstration du théorème B.1. \square

References

- [An] André, M.: Homologie des algèbres commutatives. (Grundlehren Math. Wiss.) Berlin Heidelberg New York: Springer 1974
- [Ar] Arkowitz, M.: The generalized Whitehead product. *Pac. J. Math.* **12**, 7–23 (1962)
- [Ba] Baues, H.J.: Iterierte Join-Konstruktionen. *Math. Z.* **131**, 77–84 (1973)
- [Be] Berstein, I.: On co-group in the category of graded algebras. *Trans. Am. Math. Soc.* **115**, 257–269 (1965)
- [BG] Brown, E.H., Gitler, S.: A spectrum whose cohomology is a certain cyclic module over the Steenrod algebra. *Topology* **12**, 283–295 (1973)
- [BK] Bousfield, A.K., Kan, D.M.: Homotopy limits, completions, and localizations. (Lect. Notes Math., vol. 304) Berlin Heidelberg New York: Springer 1972
- [Bo] Bousfield, A.K.: Nice homology coalgebras. *Trans. Am. Math. Soc.* **148**, 473–489 (1970)
- [BP1] Brown, E.H., Peterson, F.P.: A universal space for normal bundle of n -manifolds. *Comment. Math. Helv.* **54**, 405–430 (1979)
- [BP2] Brown, E.H., Peterson, F.P.: On the stable decomposition of $\Omega^2 S^{n+2}$. *Trans. Am. Math. Soc.* **243**, 287–298 (1978)
- [Br] Brown, E.H.: Cohomology theories. *Ann. Math., II. Ser.* **75**, 467–484 (1962)
- [BS] Bott, R., Samelson, H.: On the Pontryagin product in spaces of paths. *Comment. Math. Helv.* **27**, 320–337 (1953)
- [Ca] Cartan, H.: Séminaire H. Cartan 1954/1955. Algèbres d'Eilenberg-Mac Lane et homotopie, exposés 1–11 et 13–16. Benjamin: New York 1967
- [CLM] Cohen, F.R., Lada, T.J., May, J.P.: The homology of iterated loop spaces. (Lect. Notes Math., vol. 533) Berlin Heidelberg New York: Springer 1976
- [Co] Cohen, R.: The immersion conjecture on differentiable manifolds. *Ann. Math.* **122**, 237–328 (1985)
- [Da] Davis, D.: A family of unstable Steenrod-modules which include those of G. Carlsson. *J. Pure Appl. Algebra* **35**, 253–267 (1985)
- [De] Demazure, M.: Lectures on p -divisible groups. (Lect. Notes Math., vol. 302) Berlin Heidelberg New York: Springer 1972
- [DG] Demazure, M., Gabriel, P.: Groupes algébriques, vol. 1. Paris: Masson 1970
- [Die] Dieudonné, J.: Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$ (V). *Bull. Soc. Math. Fr.* **84**, 207–239 (1956)
- [Dit] Ditters, B.: Sur une série exponentielle non commutative définie sur les corps de caractéristique p . *C.R. Acad. Sci. Paris* **268**, 580–582 (1969)
- [Ga] Ganea, T.: Co-groups and suspensions. *Invent. Math.* **9**, 185–197 (1970)
- [GL] Goerss, P., Lannes, J.: Realizing unstable injectives. *Math. Z.* **196**, 239–248 (1987)

- [Go1] Goerss, P.: A direct construction for the duals of Brown-Gitler spectra. *Indiana Univ. Math. J.* **34**, 733–751 (1985)
- [Go2] Goerss, P.: Unstable projective and stable Ext with applications. *Proc. Lond. Math. Soc.*, III. Ser. **53**, 539–561 (1986)
- [Go3] Goerss, P.: Projective and injective Hopf algebras over the Dyer-Lashof algebra. (Preprint)
- [GZ] Gabriel, P., Zisman, M.: *Calculus of fractions and homotopy theory.* (Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 35) Berlin Heidelberg New York: Springer 1967
- [He] Heller, A.: On the representability of homotopy functors. *J. Lond. Math. Soc.*, II. Ser. **23**, 551–562 (1981)
- [Ja] James, I.M.: Reduced product spaces. *Ann. Math.* **62**, 170–197 (1955)
- [La1] Lannes, J.: Sur le n -dual du n -ème spectre de Brown-Gitler. *Math. Z.* **199**, 29–42 (1988)
- [La2] Lannes, J.: Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p -groupe abélien élémentaire. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* (à paraître)
- [Li] Lin, W.-H.: Order of the identity map of the Brown-Gitler spectrum. In: Carlsson, G. et al. (eds.) *Algebraic Topology Proceedings, Arcata 1986.* (Lect. Notes Math., vol. 1370, pp. 274–279) Berlin Heidelberg New York: Springer 1986
- [LZ1] Lannes, J., Zarati, S.: Invariants de Hopf d'ordre supérieurs et suite spectrale d'Adams instable. *C.R. Acad. Sci., Paris* **296**, 695–698 (1983)
- [LZ2] Lannes, J., Zarati, S.: Sur les \mathcal{W} -injectifs. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **19**, 1–31 (1986)
- [Mac] Mac Lane, S.: *Categories for the working mathematician.* (Grad. Texts Math., vol. 5) Berlin Heidelberg New York: Springer 1971
- [Mah] Mahowald, M.: A new infinite family in ${}_2\pi^S$. *Topology* **16**, 249–254 (1977)
- [Mi] Miller, H.R.: The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces. *Ann. Math.* **120**, 39–87 (1984) et corrigendum, *Ann. Math.* **121**, 605–609 (1985)
- [MM] Milnor, J., Moore, J.: On the structure of Hopf algebra. *Ann. Math.*, II. Ser. **81**, 211–264 (1965)
- [MS1] Moore, J., Smith, L.: Hopf algebras and multiplicative fibrations I. *Am. Math.* **90**, 752–780 (1968)
- [MS2] Moore, J., Smith, L.: Hopf algebras and multiplicative fibrations II. *Am. J. Math.* **90**, 1113–1150 (1968)
- [Qu] Quillen, D.: *Homotopical Algebra.* (Lect. Notes Math., vol. 43) Berlin Heidelberg New York: Springer 1967
- [Sc] Schoeller, C.: Etude de la catégorie des algèbres de Hopf commutatives connexes sur un corps. *Manusc. Math.* **3**, 133–155 (1970)
- [Se] Serre, J.-P.: *Corps locaux.* Hermann: Paris 1959
- [Sm] Smith, L.: Lectures on the Eilenberg-Moore spectral sequence. (Lect. Notes Math., vol. 134) Berlin Heidelberg New York: Springer 1970
- [Wi] Witt, E.: Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grade p^n . *J. Reine Angew. Math.* **176**, 126–140 (1936)